



*Moș Asociativă pentru
Cultură și Literatură poporului
Român.*

GAZETA MATEMATICĂ

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXIX.

NUMĂRUL 1. — SEPTEMBRIE 1923



SUMARUL

1. Lista Membrilor Societății «Gazeta Matematică».
2. Premiile și alte dispozițiuni ale fondurilor «Gazetei Matematice».
3. Regulamentul Premiului «Vasile Conta».
4. O problemă și o teoremă asupra indicato-
rilor Căpitan I. Linteș.
5. Note Matematice: 1 — 5.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 104.
8. Probleme Rezolvate: 2336, 2604, 2748, 2937, 3026, 3038, 3061,
3065.
9. Exerciții: 1 — 7.
10. Probleme propuse: 3091 — 3100.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILAKET

1923

SPRE ȘTIINȚA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică”** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXIX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politehnică din București, **Tr. Lalescu**, Doctor în Matematici, Profesor Universitar și **I. D. Teodor**, Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Școala Politehnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice” se vor trimite D-lui **GEORGE BORNEANU**, Inginer, Directorul Fabricilor de chibrituri și timbre, București.

Se pot trimite și pe același nume în Str. Sf. Constantin 31, București.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor rediă în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela D-l Cassier *I. D. Teodor*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poștă.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evită confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

În vederea sporirii taxelor poștale, corespondenții pot trimite de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei fol, fără a lăsa spații albe pe margini sau dedesubt, tăind folle în consecință.

Nu se admite însă a se trata pe aceeași foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, creațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ”, trebuie să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 53, 56, 59, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 10, 23, 38, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 94, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 43, 45, 47, 58, 59, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 53, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 15, 16, 26, 36, 45, 53, 56, 61, 83, 95, 3000, 05, 08, 10, 13, 19, 25, 40, 42, 45, 55, 60, 69, 70, 71, 75, 80, 84, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

G A Z E T A M A T E M A T I C A

ANUL XXIX No. 1

SUPLIMENT

15 septembrie 1923

RECREAȚIUNI

1. **Numere rimate.** În poeziile noastre populare și în ale poezilor noștri, se găsesc deseori numere prin versuri, după cum s'a arătat în unele suplimente anterioare. La unele din ele, numerele sunt puse în rime. Astfel, mai toate numerele necesare nomenclaturii în sistemul zecimal, se găsesc în rime; nu am întâlnit însă până acum pe 0, pe 4, pe 1.000.000 etc., în schimb, nu lipsesc numere fracționare. Iată, deocamdată, exemple din numerele până la zece.

1. De ai ști că 'n a mea cale, vöiu face totdeauna, Din 7 nopți 1 noapte, din 7 zile 1. (ALEXANDRI).

2. Decât te găsim cu 2, Durduleanö hăi, Mai bine piereau 2 boi și 150 de oi, Și 5060 de miei, 7 scroafe cu porci. (EMINESCU).

3. Și de 3 ori câte 3 zile și nopți de 3 ori 3, Ea lasă somnul dulce să pască 'n urma ei. (ALEXANDRI).

5. Foaie verde ruptă 'n 5, Plinu-i codru de voinici La tot pasul câte 5. (EMINESCU).

6. Să n'ai odihnă 'n mormânt, Cum nu am eu pe acest pământ, Să n'ai pace nici în casă Zile numai 5 or 6. (EMINESCU).

7. Și are frați de cruce 7, Care au supt sânge cu lapte. (ALEXANDRI).

8. Vlădica că e vlădică Și tot are ibovnică, Dar eu încă protopop, Ce să nu am 7, 8. (Proverb).

9. Trece luna, trece 2, Trece 5, trecută 9, Doamna născu 2 feciori, 2 de gemeni frățiori, Cu cosițe poleite Și cu fețe înflorite De păreau strălucitori Ca 2 ochi veselitori. (ALEXANDRI).

10. Măi, tătare, dă-ne pace, Măi, tătare, stai, nu trece, Măi, tătare, nu mă face, Să-ți sfărâm capul în 10. (ALEXANDRI).

De altfel s'au alcătuit poezii numai în cifre, ca următoarea, pe care am mai dat-o, cu altă ocazie, scoasă din cântecul tablei lui PITAGORA:

$$1 \times 2 = 2,$$

$$3 \times 3 = 9.$$

(Odată două i două, trei ori trei fac nouă).

(Va urmă)

I. I.

* * *

2. **Rezolvarea logică a problemei 2964.** În recreația 6 din Suplimentul de pe ianuarie 1923, D-I I. COȘEREANU deduce în mod logic soluția acestei probleme, bazat pe observația că de doi ani încoace *prima problemă* propusă în *primul număr* al *Gazetei Matematice* are ca soluție numărul anului respectiv. Așa, prima problemă propusă în septembrie 1921 are ca soluție 1921; prima problemă propusă în septembrie 1922 are ca soluție pe 1922.

După această logică ar fi să ne așteptăm ca D-I Maior G. LITEANU, propunătorul acelor probleme, să reînceapă seria problemelor propuse în septembrie 1923 cu una care să aibă ca soluție pe 1923 și așa mai departe la infinit, ceea ce nu se poate, căci viața unui om este finită. Apoi care din descendenții D-sale din anii 8078 și 9198, vor reproduce în *Gazeta Matematică* problema 2855 din 1921, care are ca soluțiuni și pe 8078 și 9189?

G. B.

* * *

3. **Geometrie urbană.** Primii botezători ai stradelor din Bucureștii — poate chiar inginerul N. MAXENȚIANUL, — ca recunoștință Geometriei, care servă

la ridicarea planurilor oraşelor, a dat unor străzi, nume de figuri sau termeni cari aparţin acelei ştiinţe. Unele din acele nume au fost schimbate ulterior în altele de personaje importante, de care matematica nu are să vorbească nici odată; altele cu locuri istorice iar nu geometrice, etc. Aşa a dispărut strada *Dreaptă*, singura stradă rectilinie pe vremea acelor botezători. Ne-au rămas însă strada *Cercului* şi a *Semicercului*; străzile *Arcului* şi a *Săgeţii*; avem o stradă *Rondă*, alta *Scurtă*, alta *Inclinată*. Geometriei de situaţie i s'a dedicat vestita stradă *Labirint*.

I. I.

* * *

4. O *altă* geometrie. La o şcoală militară pregătitoare, anul trecut (poate că şi anul acesta) se predă o geometrie pe care elevii o numiau *Geometria văzduhului*! Cu aceasta bieţii elevi denumiau *geometria descriptivă* care li se predă! Bietul MONGE!

T. DORDEA.

* * *

5. Valoarea biblică a lui π . În *Paralipomene* II, la descrierea Templului, lui SOLOMON, la Cap. IV aliniatul 2 se spune:

„Şi a făcut *mare* turnată de 10 coţi, dintr'o margine pânăla cealaltă, rotundă împrejur şi de 5 coţi de înaltă şi inconjurul ei eră de 30 coţi“.

De aci rezultă că:

$$30 = 2\pi \cdot 10$$

$$\pi = 1,5.$$

Cam *mare*! (Prin *mare* se înţelege un bazin).

I. I.

* * *

6. O *problemă de minimum*. Un conferenţiar pregăteşte un discurs. Care este numărul minimum de auditori pentru ca să se țină acea conferinţă nemodificată?

R. Doi, căci altfel, în loc de „*Domnilor*“, trebuie să se zică „*Domnule*“.

I. I.

* * *

7 A *patra dimensiune*. În poezia „*Roata morii*“, COŞBUC spune:

Iar ce-a urmat la ce-ăşi mai spune?

Noi n'am ajuns în nici un rost

Tu zici: Erori, băete, prost

Şi roata pentru tine a fost

A *patra dimensiune*.

I. I.

* * *

8. *Linii ori unghiuri*? THÉOPHILE GAUTHIER în *Avatar* spune:

„Dar hainele falfăiau ca şi cum ar fi fost atârinate pe un cuer şi desemnau nişte linii perpendiculare care se transformau în unghiuri drepte când medicul se aşeză jos“.

Cine poate să-mi explice aceste rânduri?

B. M. BARBĂLATT,

* * *

9. Un *nou gen de progresii*. Citim într'un ziar din 22/X/1922:

„Proiectul de lege pentru îmbunătăţirea situaţiei funcţionarilor nu prezintă decât o ameliorare provizorie a situaţiei salariaţilor de Stat, când scumpea merge într'o *progresie dezolantă*, ...“.

T. DORDEA.

* * *

10. **Triunghiul magic.** Avem :

$$\begin{array}{r} 4 \qquad 4 + 8 + 5 = 9 + 8 = 4 + 9 + 4 = 17 \\ 9 \ 8 \\ 4 \ 8 \ 5 \end{array}$$

* * *

11. **Infinit mărginit.** Fie ABC un triunghi înscris în cercul O. Se știe că inversul unui punct de pe cercul circumscris în raport cu ABC este la infinit și inversul unui vârf este pe latura opusă. Deci inversul lui A este pe BC și la infinit în același timp. Rezultă că infinitul este un punct de pe latura BC. Pentru că triunghiul are trei laturi, rezultă că avem 3 infinite și numai 3.

. B. M. BARBĂLATT.

* * *

12. **Răbdare imaginară.** S'a găsit un calculator care a dat că :

$$i^i = 0,207879576350761908546055619834978770033877841631769614.$$

I. I.

* * *

13. **Matematica și feminismul.** Imi propun să demonstrez că femeile nu pot aspira la egalitate cu bărbații. În această privință unii zic „da” alții zic „nu”. Ca să-i împăcăm pe toți, ar trebui să avem :

$$NU = DA.$$

Avem însă :

$$1 = 0!$$

Inmulțim aceste două egalități una cu alta și apoi ambii membri cu U și avem :

$$UNU = DOUA!$$

$$\therefore \frac{1}{2} UNU = UNA!$$

Deci chiar în ipoteza admisă, se deduce, ceea ce se știe, că *femeia este jumătatea bărbatului.*

M. GHERMĂNESCU.

Prin demonstrațiuni de această natură, se poate stabili orice. Astfel nu se poate spune că *a* sau *u* nu reprezintă ceva pozitiv, ceea ce putem exprima astfel :

$$a > 0, \qquad u > 0,$$

$$\therefore 1a > 0, \qquad 1u > 0.$$

$$\therefore una > 0, \qquad unu > 0.$$

Partea a doua fiind nulă o putem înmulți cu o mărime finită și tot nulă va rămâne. Să înmulțim respectiv cu *di* și cu *duă*. Găsim :

$$\therefore una > doi, \qquad unu > două.$$

Așa dar sunt cazuri când o femeie valorează mai mult chiar ca doi bărbați și alte ori un bărbat mai mult ca două femei, ceea ce este în ordinea naturală a lucrurilor !

I. I.

* * *

14. **Astronomie urbană.** Pentru motivele arătate la No. 3, și astronomia a fost luată în considerare la nomenclatura străzilor orașului București. Se

dăduse chiar numele de strada *Astronomului*, înlocuită mai târziu cu numele unui medic, profesiune mai utilă Bucureștenilor decât astronomia. Avem strada *Soarelui* și strada *Lunei*, precum și a *Semilunei*. Există străzile *Jupiter*, *Uranus*, *Neptun*, *Luceafărului*; s'au înlocuit numele străzilor *Saturn* și *Mercur*, dar pare că nu a existat strada *Marte*, căci comisiunea de nomenclatură probabil nu a întâlnit nici o bătaie pe străzi în timpul lucrărilor ei.

Stelele sunt reprezentate prin strada *Constelației*. Cele patru anotimpuri nu lipsesc din București, căci există strada *Primăverii* azi înlocuită și există străzile *Verei*, *Toamnei* și *Ernei*. Avem străzile *Dimineții* și *Serei*, a *Zorilor*, *Crepuscului* și *Aurorei*. Există străzile *Occident*, *Orient*, *Nord*, nu știu dacă a fost strada *Sudului*. Strada *Echinoxului* nu lipsește; de a *Solstițiului* nu am auzit încă!

I. I.

* * *

15. Ce matematicieni se pot citi pe străzile Bucureștilor?

În București avem strada *Pitagora* și strada *Spiru Haret*, care poartă numele a doi matematicieni. Există și strada *Pascal*, dar cine știe căruia *Pascal* i se datorește numele ei!

I. I.

* * *

16. Numerele întregi puteri ale aceluiași număr. Se știe că:

$$\lim (1 + x/m)^m = e^x \quad (m = \infty).$$

Înlocuim aci pe x cu m , $2m$, $3m$, ... și avem:

$$2^m = e^m ; 3^m = e^{2m} ; 4^m = e^{3m} ; \dots$$

și cum $e^0 = 1$, scoatem:

$$1 = e^0 ; 2 = e ; 3 = e^2 ; 4 = e^3 ; 5 = e^4 ; \dots$$

F. NEGRETZU.

* * *

17. $1 + \infty = 0$. Avem:

$$i = \cos \frac{1}{2}\pi + i \sin \frac{1}{2}\pi ;$$

$$\therefore i = \frac{\cos \frac{1}{2}\pi}{1 - \sin \frac{1}{2}\pi}.$$

Membrul al doilea devine 0/0. Regula lui L'HÔPITAL ne dă:

$$i = \frac{-\sin \frac{1}{2}\pi}{-\cos \frac{1}{2}\pi} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\pi = \infty ;$$

$$\therefore i^2 = -1 = \infty^2 = \infty$$

$$\therefore 1 + \infty = 0.$$

E. ȘTEFĂNESCU.

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARA

DE

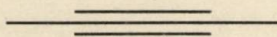
MATEMATICI ELEMENTARE SI SPECIALE

PENTRU UZUL

ȘCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ȘI SUPERIOARE

VOLUMUL XXIX

15 SEPTEMBRIE 1923 — 15 AUGUST 1924



BUCUREȘTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE-FILARET

1923

LISTA MEMBRILOR SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICA“

DELEGAȚIUNEA PENTRU ANUL XXIX *)

A. SALIGNY, TR. LALESCU ȘI I. D. TEODOR (CASSIER).

PERSONALUL REDACȚIUNII.

1. IONESCU. Membru delegat pentru schimburi de reviste, primirea lor, cereri, recreațiuni, diverse și reclamațiuni privitoare la tipărire.
- G. ȚIȚEA. Raportor.
- G. BORNEANU. Membru delegat pentru convocările lunare, pentru primirea și repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice*.
- G. BORNEANU ȘI GH. ILIESCU. Membri delegați pentru corecturi și imprimarea revistei.
- I. IONESCU. Membru delegat pentru aritmetică elementară.
- V. CRISTESCU. Membru delegat pentru geometrie elementară și trigonometrie.
- TH. ANGHELUȚĂ. Membru delegat pentru algebră elementară.
- G. A. NICHIFOR. Membru delegat pentru geometria descriptivă.
- CR. MATEESCU. Membru delegat pentru mecanica elementară.
- C. ORĂȘANU. Membru delegat pentru geometria analitică și cosmografie.
- N. ABRAMESCU. Membru delegat pentru note de matematici superioare.
- TH. ANGHELUȚĂ. Membru delegat pentru probleme propuse de matematici superioare.
- M. GHERMĂNESCU. Membru delegat pentru exerciții și chestiuni de examen.
- G. BORNEANU ȘI GH. ILIESCU. Membri delegați pentru alcătuirea tablei de materii.
- E. ABASON, N. ABRAMESCU, TH. ANGHELUȚĂ, LT. COL. G. BUCLIU, E. CARAMAN, V. CRISTESCU, M. GHERMĂNESCU, LT. A. GHIMUȘ, D. V. IONESCU, LT. I. LINTEȘ, MAIOR G. LITEANU, TH. MAREȘ, CR. MATEESCU, G. A. NICHIFOR, LT. G. NICULESCU, O. ONICESCU, O. ȚINO, GH. ZAPAN ȘI CĂPITAN GR. ZAPAN. Membri delegați pentru cercetarea și redactarea problemelor rezolvate.

*) Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri și un cassier. (Art. 13 din Statute).

MEMBRIL.

- 1 1922, Mart. 1* ABASON E. Inginer. Licențiat în Matematici. — Serviciul de Studii și Construcții din M. L. P. Asistent la Școala Politehnică. — Strada Justinian, 18. București.
- 2 1907, Iulie 1 ABRAMESCU N. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Științe din Cluj.
- 3 1913, Oct. 7 ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Școala Politehnică din Timișoara. — Piața Doja, 12. Timișoara.
- 4 1922, Noem. 4 ANGHELUȚĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Seminarul pedagogic universitar. — Calea Rahovei 46. București.
- 5 1919, Sept. 12 ANGHELESCU A. Doctor în Matematici. — Profesor agregat la Universitatea din Cluj.
- 6 1921, Febr. 5 AVRAMESCU C. Inginer — Direcțiunea 11-a tehnică din Ministerul de război, — Str. Clopotarii Vechi, 15. București.
- 7 1911, Febr. 20 BANCIU I. Licențiat în Matematici. — Profesor la Liceul Spiru Haret. — Str. Lucaci 95. București.
- 8 1912, Aug. 28 BELEȘ I. Inginer-Şef. — Director în administrația centrală a Ministerului Lucrărilor Publice. Asistent la Școala Politehnică din București. — Str. Regală 12. București.
- 9 1920, Ian. 10 BORNEANU GEORGE. Inginer. — Directorul Fabricilor de Chibrituri și Timbre. — Str. Sf. Constantin, 31. București.
- 10 1920, Ian. 10 BRATU GH. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj. Prodecan al Facultății de Științe. Profesor la Academia Comercială din Cluj. — Str. Brătianu, 29. Cluj.
- 11 1910, Iunie 21 BRUCKNER VICTOR Inginer Inspector General. — Directorul serviciului podurilor C. F. R. — Str. Scaune, 33. București.
- 12 1920 Aug. 15 BUDEANU I. C. Inginer. — Societatea „Electrică”. Conferențiar la Școala Politehnică din București. — Str. Berzei, 45. București.
- 13 1910, Apr. 3 BUICLIU GH. I. Locot.-Colonel de Artilerie. — Director de Studii și Profesor la Școala Specială a Artileriei. Profesor la Școala Pregătitoare de Artilerie și la Școala Politehnică din Timișoara. — Școala Specială a Artileriei. Timișoara.
- 14 1920, Ian. 10 BURADESCU TRAIAN. Inginer. — Inspecția II-a Intreținere C. F. R. — Bulevardul Anastase Stolojan, 63. Craiova.
- 15 1910, Oct. 25 BUȘILĂ D. C. Inginer. — Profesor la Școala Politehnică din București. — Str. Matei Milo, 2 bis. București.
- 16 1921, Mai 4 BUȘILĂ I. Inginer. — Asistent la Școala Politehnică din București. — Str. Esculap, 6 bis. București.
- 17 1914, Iulie 12 CAMBUREANU V. Inginer. — Inspector principal la C. F. R. — Str. Sf. Sava, 16. Iași.
- 18 1910, Aug. 3 CAPRIEL DICRAN. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Galați.

*) Data admiterii.

- 19 1922, Noem. 4 CAPRIEL I. Inginer. — Industriaș. — Str. Visarion, 5. București.
- 20 1920, Mart. 1 CARAMAN E. Licențiat în Matematici. — Profesor. — Str. Vulturului, 20. Galați.
- 21 1920, Ian. 10 CAZACU N. C. Inginer. — Sub-șef de secție. Direcția Generală a construcțiilor de căi ferate. — Stația Basarabeasca, Basarabia.
- 22 1914, Dec. 20 CHIRICUȚĂ A. Inginer-Șef — Șeful biroului tehnic al serviciului hidraulic. — Calea Șerban Vodă, 26. București.
- 23 1920, Mart. 1 CHIȚULESCU I. IOAN. Inginer-Direcția Specială a Ateliereilor C. F. R. Asistent la Școala Politehnică din București. — Str. Pantelimon, 34. București.
- 24 1921, Febr. 5 CIOC M. Inginer. — Director la Creditul Tehnic. — Str. Marconi, 3. București.
- 25 1895, Sep. 15* (fondator) CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General. — Director General al C. F. R. — Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). București.
- 26 1910, Apr. 3 COSTINESCU DAN. Inginer. — Director tehnic al Fabricii de hârtie Letea. Bacău.
- 27 1895, Sept. 15 (fondator) CRISTESCU VASILE. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului tehnic din Direcția Generală de Construcții de C. F. — Str. 11 Februarie, 2. București.
- 28 1922, Noem. 1 DUMITRESCU I. GH. Licențiat în Matematici. — Profesor la Liceul Militar „Mănăstirea Dealului”. Târgoviște.
- 29 1922, Martie 1 DUMITRESCU ARG. D. Inginer. — Str. Madona Dudu, 68. Craiova.
- 30 1918, Ian. 28 FELIX CORNELIU. Colonel în rezervă. — Str. Plantelor, 50 bis. București.
- 31 1909, Iulie 1 FILIPESCU EM. GH. Inginer. — Director de Studii și Lucrări la Societatea Comunală a Tramvaelor București. Profesor la Școala Politehnică din București. — Str. Vasile Lascăr, 212. București.
- 32 1921, Mai 4 GABRIELESKU RAMIRO. Inginer. — Șeful diviziei de dragage din Serviciul Hidraulic. — Str. Concordiei, 11 bis. București.
- 33 1914, Dec. 20 GÂLCĂ I. TOMA. Inginer-Șef. — Str. Luigi Cazzavilan, 8. București.
- 34 1906, Mart. 4 GEORGESCU I. N. Inginer-Șef. — Directorul General al Serviciului Înbunătățirilor Funciare. — Str. G. D. Palade, 35. București.
- 35 1921, Febr. 5 GEORGESCU N. N. Inginer. — Directorul Fabr. de Chibrituri—Cluj.
- 36 1922, Aug. 31 GHERMĂNESCU MIHAIL. Licențiat în Matematici. — Profesor Secundar. Secretarul Facultății de Științe. — Str. Raion, 31. București.
- 37 1913, Aug. 30 GHEORGHIU MIRCEA. Inginer. — Comisiunea mixtă a Porților de Fier. — Orșova.
- 38 1913, Aug. 30 GHEORGHIU S. I. Inginer-Șef. — Șeful Serviciului tehnic din Direcția Generală a Construcțiilor de Căi Ferate. — Str. Dionisie, 94. București.
- 39 1921, Mai 4 GHIMUȘ A. D. Locotenent. — Direcția de Studii a Școalei Militare de Geniu. — Str. Vasile Lupu, 18. București.

*) Data fondării revistei „Gazeta Matematică”. Societatea „Gazeta Matematică” a fost constituită la 1 Septembrie 1909.

- 40 1910, Iunie 2 GRIGORESCU C. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Plantelor, 42. București.
- 41 1920, Ian. 10 GUTZU VICTOR. Inginer. — Directorul Manufacturei de Tutun. — Sf. Gheorghe. Județul Trei Scaune.
- 42 1922, Mai 10 ILIESCU GH. Inginer. — Subdirectorul Fabricilor de Chibrituri și Timbre — Str. Olimp, 11 bis. București.
- 43 1895, Sept. 15 IOACHIMESCU GH. ANDREI. Inginer-Şef. Licențiat în Matematici. — (fondator) Profesor la Școala Politehnică din București. — Str. Buzești, 76, București.
- 44 1920, Ian. 10 IOANOVICI AUREL. Inginer. — Str. Dr. Felix, 41. București.
- 45 1922, Noem. 1 IONESCU V. D. Licențiat în Matematici. — Str. Gutenberg, 6. București.
- 46 1895, Sept. 15 IONESCU I. Inginer Inspector General. — Profesor la Școala Politehnică din București; Președinte al Secțiunii Constructorilor. Membru în Consiliul tehnic superior al Lucrărilor Publice; în Consiliul permanent al Instrucțiunii Publice, pentru secțiunea industrială; în Comitetul de Direcțiune al Poștelor, Telegrafelor și Telefoanelor; în Comitetul de Direcțiune al Construcțiunilor de căi ferate; Vice-președinte al Comisiunii interimare a Capitalei. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Călușei, 23. București.
- 47 1912, Iunie 2 JIJE ADAM. Căpitan Comandor în rezerva marinei. Licențiat în Științe. Inginer Electrician. — Concesionarul luminatului electric și al alimentării cu apă din Sulina. — Sulina.
- 48 1905, Martie 1 LALESCU TR. Doctor în Matematici. Inginer electrician. — Profesor Universitar. Profesor la Școala Politehnică din București. Deputat. — Str. General Anghelescu, 48. București.
- 49 1919, Sept. 12 LINTEȘ I. Căpitan de Artilerie. — Școala de Tragere a Artileriei. — Râșnov (Brașov).
- 50 1921, Mai 4 LITEANU I. GH. Maior. — Ministerul de Război, Direcția 11-a. Tehnică. — Aleea Sebastopol, 27. București.
- 51 1913, Aug. 30 MALCOCI C. Inginer-Şef. — Subdirector General R. M. S. — Str. Francmazonă, 5. București.
- 52 1921, Febr. 5 MAREȘ T. Inginer. — Direcțiunea generală de Studii, Construcții și Ape din Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Militari, 20. București.
- 53 1922, Mai 10 MATEESCU CR. Inginer. — Societatea „Electrică”, București. — Str. Maltopol, 12. București.
- 54 1921, Febr. 5 MIHALOPOL C. Inginer-Şef. — Director G-ral al Societății „Drajna”. — Str. Profesori, 6 bis. București.
- 55 1909, Iunie 1 MIREA N. ȘT. Inginer-Şef. Licențiat în Matematici. — Profesor la școala superioară de Arhitectură. — Str. Inundației, 8. București.
- 56 1920, Ian. 10 MITTELU C. CLAUDIU. Inginer. Licențiat în Matematici. — Subdirectorul Manufacturii de tutun „Belvedere”. — București.

- 57 1920, Ian, 10 MITTELU C. I. Inginer.
- 58 1906, April. 1 MOȚOI I. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Dionisie, 59. București.
- 59 1909, Noem. 1 NĂSTURĂȘ D. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Iulia Hajdeu, București.
- 60 1922, Martie 1 NEGRETZU I. Inginer de Mine. — Antreprenor minier. — Str. Șerban Vodă, 170. Pitești.
- 61 1910, Mai 20 NICHIFOR A. G. Doctor în Matematici. — Conferențiar la Universitatea din București. Inspector școlar. — Str. Dimitrie Racoviță, 32. București.
- 62 1922, Noem. 4 NICOLAU TH. M. Inginer. — Direcțiunea G-lă de Poduri și Sosele. Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Militari, 20. București.
- 63 1895, Sept. 15 NICOLESCU N. Inginer-Șef. — Șef de divizie în Direcțiunea G-lă de Studii, Construcții și Ape din M. L. P. — Bulevardul Ferdinand, 29. București.
- 64 1920, Oct. 28 NICULESCU CRISTEA. Inginer-Șef. — Str. Colonel Răsnovanu, 45. Piatra Neamț.
- 65 1923, Iulie 4 NICULESCU GH. Locotenent de Artilerie. — Str. G-ral Praporgescu, 3. Timișoara.
- 66 1922, Martie 1 ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Conferențiar la Facultatea de științe din București.
- 67 1913, Oct. 7 ORĂȘANU D. CEZAR. Inginer-Șef. Licențiat în Matematici. — Șef de divizie la Direcțiunea Generală Construcțiilor de C. F. Profesor la Școala de Aerostație. Profesor la Școala de Topometrie. Membru în consiliul tehnic al Cadastrului. — Str. Știrbey Vodă, 45. București.
- 68 1910, Mai 20 ORĂȘANU GR. Licențiat în Matematici. — Inspector școlar. Profesor la Liceul din Ploiești. — Str. Stănică Marin, 32. Ploiești.
- 69 1914, Dec. 20 PANAITESCU SC. General de divizie în rezervă. — Membru corespondent al Academiei Române. Consilier la Banca Românească din Chișinău. — Chișinău.
- 70 1911, Dec. 17 PATRICIU G. TITUS. Licențiat în Matematici. — Profesor la Școala superioară de Comerț și Liceul Național. — Str. Lăpușneanu, 2. Iași
- 71 1920, Oct. 28 PHILIPPIDE M. Inginer. Directorul Societății Anonime Române de Navigație pe Dunăre. — Brăila.
- 72 1911, Aug. 11 POPESCU GH. Inginer Inspector General. — Secretar General al Ministerului de Comunicații. Director General al Porturilor și Căilor de Comunicație pe apă. Profesor la Școala Politehnică din București. — Str. Gh. Chițu, 27. București.
- 73 1922, Aug. 31 POPESCU ION. Inginer. — Societatea S. T. B. — Stradela General Lahovary, 5. București.
- 74 1910, Aug. 3 RADU E. M. Inginer-Șef. — Director în Direcția Generală de Studii și Construcții. Asistent la Școala Politehnică din București. — Str. Dionisie, 30. București.

- 75 1920, Aug. 15 REVICI TEOFIL. Inginer. — Direcția de Poduri C. F. R. — Str. Păstorului, 16. București.
- 76 1892, Sept. 15 (fondator) ROGO M. Inginer Inspector General. — Str. General Angelescu, 68. București.
- 77 1914, Dec. 20 ROȘU V. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Str. Francmazonă, 68. București.
- 78 1914, Dec. 9 SALIGNY ANGHEL. Inginer Inspector General. — Membru al Academiei Române. Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politehnică din București. — Str. Basarabia, 10. București.
- 79 1904, Sept. 1 SALIGNY M. Inginer-Șef. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic. Profesor la Școala de Conducători de Lucrări Publice din București. — Str. Basarabia, 10. București.
- 80 1920, Ian. 10 SĂPUNARU S. GH. Inginer. — Directorul Societății Clădirea Românească. — Str. Semicercului, 7. București.
- 81 1920, Aug. 15 ȘERBĂNESCU C. VICTOR. Inginer.
- 82 1919, Sept. 12 SERGESCU P. Licențiat în Matematici. — Profesor la Liceul Traian din Turnu Severin. — Rue de Blainville, 6. Paris.
- 83 1921, Febr. 5 SFÎNȚESCU C. Inginer. — Directorul Serviciului Cadastrului dela Primăria Capitalei. — Str. Caragiale, 25. București.
- 84 1910, Aug. 3 SMÂNTĂNESCU AUREL. Inginer-Șef. Direcția II-a de Poduri și Șosele. — Str. Sf. Ștefan, 35. București.
- 85 1923, Iulie 4 STAMATESCU I. Profesor la Liceul Matei Basarab și Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. G-ral Lahovary, 87. București.
- 86 1920, Ian. 10 STAN D. Inginer. — Societatea Comunală a Tramvaelor, București. — Str. Câmpineanu, 34. București.
- 87 1906, April 1 TEODOR D. I. Inginer Inspector General. — Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului. Profesor la Școala Politehnică din București. — Fabrica de Chibrituri. București.
- 88 1900, Noem. 1 TEODOREANU V. Profesor la Liceul Național și Liceul Militar din Iași. — Str. Cuza Vodă, 22. Iași.
- 89 1911, Mai, 18 TEODORESCU V. N. Inginer Inspector General. — Directorul General al Soc. Pietroșani. — Str. Aurel Vlaicu, 22. București.
- 90 1910, Mai 20 THIERRIN H. G. Licențiat în Matematici. — Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin“. — Str. Scaune, 33. București.
- 91 1921, Aug. 31 TÎNO O. Licențiat în Matematici. — Profesor la Liceul Gh. Șincai. — Str. Mihail Cornea, 80. București.
- 92 1895, Noem 1 ȚÎȚICA GH. Doctor în Științele Matematice. — Membru al Academiei Române. Profesor la Facultatea de științe din București. — Str. Dionisie, 82. București.
- 93 1919, Sept. 12 ULESCU AL. Inginer. — Creditul Technic Transilvănean. — Calea Victoriei, 23. București.
- 94 1914, Dec. 20 VARDALA I. Inginer Inspector General. — Subdirector General al Porturilor și Căilor de Comunicație pe apă. — Str. Dimineții, 4. București.

- | | | |
|----|----------------|---|
| 95 | 1923, Mart. 26 | VASILESCU Gr. Inginer. — Comisia Europeană a Dunării. — Sulina. |
| 96 | 1920, Ian. 10 | VASILESCU C. I. Inginer. — Directorul Manufacturii de tutun „Iași”. — Iași. |
| 97 | 1920, Sept. 28 | ZAPAN Gh. Licențiat în drept. Avocat. — Bulevardul Elisabeta, 9 bis. București. |
| 98 | 1921, Mai 4 | ZAPAN Gr. Inginer hotarnic. Căpitan de Artilerie. — Profesor la Liceul Militar „Mănăstirea Dealului”. — Târgoviște. |

PREMIILE ȘI ALTE DISPOZIȚIUNI ALE FONDURILOR „GAZETEI MATEMATICE“

PENTRU

CURSUL ANULUI 1923 — 1924

(1 Septembrie 1923—31 August 1924).

În conformitate cu dispozițiunile art. 11 din regulamentul general al fondurilor «Gazetei Matematice», subsemnații membri ai comisiei pentru controlarea gestiunii acestor fonduri și pentru privegherea la îndeplinirea prevederilor regulamentare ale fiecărui fond, desemnați în Adunarea Generală, care a avut loc în ziua de 31 August 1922, aducem la cunoștință următoarele :

1) Din venitul anual al fondului SPIRU C. HARET, conform regulamentului pentru administrarea lui, publicat în «Gazeta Matematică» vol. XXVI pag. 108, urmează să se cumpere cărți de matematici pure și aplicate (literatură matematică, istoria matematicilor, varietăți și curiozități matematice, aparate și modele matematice, etc.), care să se doneze bibliotecilor școlare dela școli secundare, sau corespondenților meritoși, elevi ai acestor școli. Cărțile se vor distribui între începutul anului școlar și vacanța Crăciunului.

În baza hotărârii luată de adunarea generală dela 31 August 1923, cărțile de felul celor enumerate mai sus, cumpărate din venitul anului expirat, s'au destinat să se doneze liceului real din Timișoara.

2) Din venitul fondului Lt. Col. G. TĂNĂSESCU, al cărui regulament a fost publicat în «Gazeta Matematică», vol. XXVIII, pag. 19, urmează să se dea cărți de matematică primului clasificat la concursurile anuale ale «Gazetei Matematice».

3) Premiul bienal INGINER H. CAPRIEL, în valoare de 500 lei, pentru lucrări de matematici superioare sau pure aplicate, se acordă lucrărilor ce se vor prezenta Societății de către: Studenții Universităților, Elevii Școalei de Poduri și Șosele sau de către Elevii Școalelor de Artilerie, Geniu și Marină din țară.

Regulamentul acestui premiu a fost publicat în «Gazeta Matematică» anul XVII pag. 361.

Subiectul lucrării pentru premiul pe anul 1925 va fi anunțat în «Gazeta Matematică» anul XXIX numărul 9 (pe luna Mai).

Lucrările trebuiesc trimise Societății cel mai târziu până la 1 Mai 1925, iar rezultatul se va publica în numărul din Septembrie 1925 al «Gazetei Matematice».

Premiul este indivizibil și în cazul când nu se va găsi nici o lucrare meritorie, se va ține un nou concurs.

4) Premiul VASILE CONTA, în valoare de 200 lei, alimentat din fondurile «Gazetei Matematice», se acordă exclusiv pentru lucrări de filozofie matematică.

Regulamentul acestui premiu s'a aprobat în ședința Adunării Generale Extraordinare dela 26 Martie a. c. și se publică în prezentul număr al «Gazetei Matematice».

Autorul trebuie să fie român și să-și fi făcut studiile secundare în țară.

Lucrările trebuiesc prezentate până la 1 Iulie al fiecărui an și în caz când până la această dată nu s'a primit nici o lucrare, se va aștepta data de 1 Iulie anul următor și așa mai departe.

Comisiunea care va examina lucrările prezentate după 1, 2, 3, etc. ani va propune pentru premiere una sau două lucrări dintre cele mai bune cu totalul sumelor strânse an cu an până la acea dată, sumă care, dacă intervalul e mai mare de 1 an, se va putea divide între lucrările alese. Comisiunea va putea însă să nu recomande nici una din lucrările prezentate.

Raportul comisiunii însărcinată cu cercetarea lucrărilor, se va supune desbaterilor Adunării Generale Extraordinare în cursul lunii Octombrie, iar rezultatul se va publica în numărul din Noembrie al «Gazetei Matematice».

5) „*Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la științele militare*“, în valoare de 200 lei, se acordă pentru cea mai bună publicațiune de matematică aplicată la științele militare, apărută în cursul fiecărui an.

Regulamentul acestui premiu a fost publicat în «Gazeta Matematică» anul XXIII pag. 9.

Autorul publicațiunii trebuie să fie român sau să-și fi făcut cultura matematică în țară.

Premiul este indivizibil și se acordă neapărat în fiecare an. În cazul când nu se găsește nici o lucrare de premiat, sau în cazul când autorul lucrării premiate nu voește a primi suma de 200 lei, ea se va da uneia din revistele în care se publică și chestiuni de știință matematică aplicată la științele militare.

Comisiunea însărcinată cu examinarea publicaţiunilor militare apărute prin reviste, broşuri sau cărţi speciale pânăla 1 Septembrie anul trecut, precum şi manuscrisele ce s'ar aduce la cunoştinţa societăţii pânăla acea dată, va întocmi un raport ce se va supune desbaterilor Adunării Generale Extraordinare în cursul lunei Ianuarie.

Premiul se va anunţa în numărul ce apare în luna Martie şi se va acorda lucrării premiate după apariţia numărului.

6) Din fondul ANGHEL SALIGNY, destinat tipăririi bibliotecii tehnice a «Gazetei Matematice», nu s'au putut tipări lucrările primite spre publicare, din cauza costului ridicat al tiparului şi al leagatului, venitul fondului nefiind suficient pentru acoperirea cheltuelilor. În asemenea condiţiuni, publicarea s'a amânat pentru mai târziu, când sperăm că condiţiunile economice se vor îmbunătăţi.

7) Din fondurile bibliotecii »Gazeta Matematică«, se vor re-tipări în cursul anului:

Algebra Superioară de N. Abramescu.

Geometria Analitică, fasc. I de Tr. Lalescu, (ed. II)

şi se va tipări :

Geometria Analitică, fasc. IV de Tr. Lalescu.

COMISIUNEA PENTRU PREMII

IOAN G. BUŞILĂ.

G. EM. FILIPESCU.

REGULAMENTUL PREMIULUI „VASILE CONTA“.

(Modificat în Adunarea Generală Extraordinară din 26 martie 1923.)

Art. 1. — Se înfiinţează un premiu anual de 200 lei, din fondurile Societăţii «Gazeta Matematică», în locul premiului cu acelaş nume, format din donaţia viageră a D-nei Ana Conta Kernbach. Premiul se acorda pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filosofia matematicelor, adusă la cunoştinţa Societăţii în cursul fiecărui an, începând cu anul 1923 — 1924.

Dacă pânăla data de 1 iulie a unui an, nu s'a prezentat nici o lucrare, se va aştepta data de 1 iulie a anului următor. Comisiunea, care va examina lucrările prezentate după 1, 2, 3, ... ani,

va propune pentru premiare una sau două lucrări dintre cele mai bune, cu totalul sumelor strânse an cu an, pânăla acea dată, sumă care, dacă intervalul e mai mare de un an, se va putea divide între lucrările alese.

Comisiunea va putea însă, să nu recomande niciuna din lucrările prezentate.

Comisiunea, care nu a propus acordarea nici unui premiu, nu se va înlocui complet, ci numai se va primeni, rămânând în comisiunea următoare cel puțin un membru din comisiunea precedentă.

Comisiunea va lucra totdeauna cu majoritate.

Art. 2. — Autorul lucrării trebuie să fie român și să-și fi făcut studiile secundare în țară.

Art. 3. — Nu se admit la premii lucrările membrilor Societății «Gazeta Matematică».

Art. 4. — Premiul va purta numele «Premiul Vasile Conta».

Art. 5. — Premiul se poate divide în condițiunile arătate la *Art. 1.*

Art. 6. — Adunarea Generală anuală va alege o comisiune compusă din 3 membri ai Societății, dintre care unul va fi din delegația Societății. Tot Adunarea Generală anuală primenește această comisiune, în condițiunile notate la *Art. 1.*

Comisiunea își va putea asocia un specialist, licențiat sau doctor în filosofie, pentru examinarea lucrărilor.

Art. 7. — Raportul comisiunii se va pune în desbaterea unei Adunări Generale extraordinare, în cursul lunii octomvrie, care hotărăște lucrarea căreia i se va acorda premiul. Rezultatul se va aduce la cunoștință în numărul din noemvrie al «Gazetei Matematice», iar premiul se va liberă autorului lucrării, după apariția acestui număr.

Art. 8. — Societatea nu e obligată a tipări lucrările premiate. Se va face însă o scurtă dare de seamă a lucrării premiate, care se va publică în «Gazeta Matematică».

RAPORTORI :

I. VARDALA

G. NICHIFOR.

Acest regulament a fost aprobat în Adunarea Generală extraordinară din 26 martie 1923.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII.

O PROBLEMA ȘI O TEOREMA ASUPRA INDICATORILOR.

1) Problemă.

Există perechi de numere consecutive care să aibă acelaș indicator?

Aceasta este problema ce mi-am propus a rezolvă mai jos.

Fie N și $N+1$ două numere consecutive, care au acelaș indicator, adică :

$$\varphi(N) = \varphi(N+1).$$

Fie $a_1, a_2, a_3, \dots$ factorii primi ai lui N și $b_1, b_2, \dots$ factorii primi ai lui $N+1$, atunci după formula lui EULER, avem :

$$\varphi(N) = N \cdot \frac{\prod(a-1)}{\prod a},$$

$$\varphi(N+1) = (N+1) \cdot \frac{\prod(b-1)}{\prod b},$$

unde am însemnat simbolic :

$$\prod i = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot \dots$$

Conform problemei, ar trebui însă să avem :

$$1) \quad N \cdot \frac{\prod(a-1)}{\prod a} = (N+1) \cdot \frac{\prod(b-1)}{\prod b}.$$

În această relație, N nu se divide cu $N+1$, deasemenea $\prod(i-1)$ nu se divide cu $\prod i$, deaceia, trebuie să admitem că N se va divide numai cu $\prod(b-1)$ și $N+1$ cu $\prod(a-1)$ și atunci putem chiar scrie că :

$$N/\prod a = \prod(b-1)$$

$$\text{și} \quad (N+1)/\prod b = \prod(a-1).$$

Dar din aceste relații, deducem că :

$$2) \quad \prod a \cdot \prod(b-1) + 1 = \prod b \cdot \prod(a-1).$$

Să admitem că atât factorii a_i cât și b_i sunt mai mari ca 2, atunci relația 2) nu poate exista, deoarece membrul întâi ar fi *impar* și membrul al doilea *par*. Dar chiar dacă unul din numere N sau $N+1$ l'ar avea pe 2 ca factor prim, tot n'ar putea să existe nee-

galitatea 2), decât numai dacă unul din numere ar fi de formă 2^z , adică o putere a lui 2. Să admitem deci că $N + 1 = 2^z$, atunci se vede ușor că N va fi de forma $(2^{z-1} + 1)$, cu condiția ca acest număr să fie prim, sau :

$$N = (2^z + 1)(2^\beta + 1)(1^\gamma + 1) \dots$$

și

$$N + 1 = 2^{z+\beta+\gamma+\dots+1},$$

cu condiția ca numerele $(2^z + 1)$, $(2^\beta + 1)$, $(2^\gamma + 1)$, etc. . . . să fie prime. Așa dar, acestea vor fi soluțiunile problemei. În particular, avem perechile :

$$(1, 2), (3, 4), (15, 16), (255, 256), \text{etc.} \dots$$

Prin urmare, putem zice că : *există perechi de numere consecutive, care să aibă același indicator.*

* * *

Această problemă mi-a sugerat însă o alta, pe care am numit-o — grație formei ei — teoremă și iată enunțul :

2) **Teoremă.** *Să se demonstreze că nu există trei numere consecutive, care să aibă același indicator.*

Fie N , $N + 1$ și $N + 2$, trei numere consecutive, ai căror factori primi sunt a_i , b_i și c_i . Am văzut mai sus — relația 2) — că dacă indicatorii numerelor N și $N + 1$ sunt egali, atunci avem relația 2); ori între factorii primi ai numerelor N , $N + 1$ și $N + 2$ va trebui să avem deasemenea :

$$\Pi a . \Pi(b - 1) + 1 = \Pi b . \Pi(a - 1),$$

$$\Pi a . \Pi(c - 1) + 1 = \Pi c . \Pi(a - 1),$$

$$\Pi b . \Pi(c - 1) + 1 = \Pi c . \Pi(b - 1),$$

dacă $\varphi(N) = \varphi(N + 1) = \varphi(N + 2)$.

Dar, tot mai sus, am văzut că dacă $\varphi(N) = \varphi(N + 1)$, atunci $N + 1 = 2^z$, deci relațiunile de mai sus se reduc la :

$$3) \quad \Pi a + 1 = 2 . \Pi(a - 1),$$

$$4) \quad \Pi a . \Pi(c - 1) + 1 = \Pi c . \Pi(a - 1),$$

$$5) \quad 2 . \Pi(c - 1) + 1 = \Pi c.$$

Apoi dacă $N + 1$ e par, atunci N și $N + 1$ sunt impari și deci factorii lor primi sunt mai mari ca 2. În acest caz, relațiunea 4) nu poate exista, căci membrul întâi e *impar* și al doilea e *par*. Deci teorema este demonstrată pentru acest caz.

Să admitem că N este o putere a lui 2. Atunci relațiunile se mai pot scrie :

$$\begin{aligned} 6) \quad & 2 \cdot \Pi(b - 1) + 1 = \Pi b, \\ 7) \quad & 2 \cdot \Pi(c - 1) + 1 = \Pi c, \\ 8) \quad & \Pi b \cdot \Pi(c - 1) + 1 = \Pi c \cdot \Pi(b - 1). \end{aligned}$$

Dar dacă N este par, atunci și $N + 2$ este par și Πc va fi și el par, deci relațiunea 7), care are membrul întâi *impar* și al doilea *par*, nu poate exista.

Raționamentul este analog dacă $N + 2$ este o putere a lui 2. Teorema este dar demonstrată și în acest caz.

* * *

Câteva consecințe.

Problema și teorema de mai sus mi-a mai sugerat și următoarea teoremă mai generală :

Teoremă. *Trei sau mai multe numere consecutive nu pot avea același indicator.*

Deasemenea, m'am întrebat dacă : *există numere consecutive, care să aibă aceeași sumă sau produs a numerelor prime cu ele și inferioare lor*, adică dacă putem avea cel puțin :

$$\begin{aligned} 9) \quad & \sigma(N) = \sigma(N + 1), \\ 10) \quad & \Pi(N) = \Pi(N + 1). \end{aligned}$$

Dar $\sigma(N) = N \cdot \frac{\varphi(N)}{2}$ și $\sigma(N + 1) = (N + 1) \frac{\varphi(N + 1)}{2}$, deci ar trebui să avem :

$$N \cdot \varphi(N) = (N + 1) \varphi(N + 1),$$

unde ar trebui să avem :

$$\varphi(N) = N + 1$$

și

$$N = \varphi(N + 1),$$

dar $N + 1 > \varphi(N)$, deci : *nu vor exista numere consecutive care să aibă aceeași sumă a numerelor prime cu ele și inferioare lor.*

Deasemenea, egalitatea :

$$\Pi(N) = \Pi(N + 1)$$

nu poate exista, deoarece numerele prime cu N și mai mici ca N sunt numere așa că parte din ele sunt factori de ai lui $(N + 1)$, deci nu pot fi toate prime cu $(N + 1)$ și viceversa, așa încât factorii lui $\Pi(N)$ nu vor fi aceiași cu ai lui $\Pi(N + 1)$. c. c. e. d. d.

CĂPITAN I. LINTES.

NOTE MATEMATICE.

1. *Alte zece aritmetici diverse.* (Vezi nota 92, pag. 447)
Anul XXVIII.

71. **Anuităților.** *E. Baylis.* — Arithmetic of annuities and of life assurances. 1844.

72. **Asigurărilor.** Vezi No. 71.

73. **Brevetului.** *E. Jacquet & A. Laclef.* — Arithmetique du brevet élémentaire et des cours complémentaires.

74. **Complimentară.** Vezi No. 73.

75. **Cronologică.** *M. Beverugo.* — Arithmetica cronologica libellus.

76. **Gradată.** *Prince.* — Arithmetic by grades.

77. **Metodologică.** *E. Collart.* — Arithmetique théorique et méthodologique. Bruxelles. 1904.

78. **Șilingului.** *W. M. Baker.* — A shilling arithmetic. Londra. 1915.

79. **Statului.** *W. J. Milne.* — New-York state arithmetic. New-York. 1914.

80. **Suplimentară.** *I. Hunter.* — Supplementary arithmetic. 1883.

(Va urmă)

I. IONESCU.

2. *Asupra calculului puterilor asemenea a primelor n numere.* Metoda dată de D-l I. AL. STOENESCU în anul XXVIII pag. 289 din *Gazeta Matematică*, se poate extinde pentru a găsi suma puterilor a 7-a, a 9-a etc. S'a arătat acolo că :

$$n^5 = (n + 2)(n + 1)n(n - 1)(n - 2) + 5(n + 1)n(n - 1) + n.$$

Să înmulțim cu $n^2 = (n^2 - 9) + 9 = (n^2 - 4) + 4 = (n^2 - 1) + 1$ și avem :

$$\begin{aligned} n^7 &= (n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3) + \\ &14(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2) + \\ &21(n+1)n(n-1) + n, \end{aligned}$$

$$n^7 = 7! C_{n+3}^7 + 14 \cdot 5! C_{n+2}^5 + 21 \cdot 4 C_{n+1}^3 + C_n^1.$$

Înlocuind combinațiile prin valorile lor, găsim pe Σn^7 .

Procedând analog vom găsi pe Σn^9 , Σn^{11} , etc.

W. SOLOMON.

3. Problema 1448 din „Supplemento al Periodico di Matematica“.

În Gazeta Matematică (XXI, pag. 339—339), am dat o soluție acestei probleme, în care se cerea să se arate că în orice triunghi există relațiunea :

$$1/h_a r_a + 1/h_b r_b + 1/h_c r_c = 1/r_a r_b + 1/r_b r_c + 1/r_c r_a.$$

Iată o soluție mai simplă : Dacă în identitatea :

$$x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 2(xy + yz + zx),$$

facem : $x = 1/r_a$, $y = 1/r_b$, $z = 1/r_c$, obținem :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_a} \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right) + \frac{1}{r_b} \left(\frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_a} \right) + \frac{1}{r_c} \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right) \\ = 2 \left(\frac{1}{r_a r_b} + \frac{1}{r_b r_c} + \frac{1}{r_c r_a} \right), \end{aligned}$$

și cum : $2/h_a = 1/r_b + 1/r_c$, $2/h_b = 1/r_c + 1/r_a$, $2/h_c = 1/r_a + 1/r_b$, rezultă evident :

$$1/h_a r_a + 1/h_b r_b + 1/h_c r_c = 1/r_a r_b + 1/r_b r_c + 1/r_c r_a.$$

GRIGORE ZAPAN.

4. Asupra inegalității $1 + x < e^x$ (x fiind real și pozitiv).

Curba $y = e^x$ taie axa Oy în punctul $A_{(0,1)}$. Tangenta în A la această curbă este

$$y = 1 + x.$$

Deoarece curba $y = e^x$ are concavitătea întoarsă spre Oy , rezultă că pentru orice $x > 0$, vom avea

$$1 + x < e^x.$$

La fel se arată că pentru x real și pozitiv:

$$1 + x \cdot L a < a^x \quad (a > 1).$$

D. V. IONESCU.

5. *Un alt mijloc de demonstrație a unor teoreme dela criteriile de convergență.*

Se știe că dacă într'o serie cu termeni pozitivi:

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots,$$

avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

vom avea în același timp:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Iată o demonstrație a acestei teoreme, dedusă din teorema următoare:

Dacă v_n crește și tinde la infinit cu n și dacă expresiunea:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n},$$

are o limită, atunci și raportul u_n / v_n , are aceeași limită pentru n infinit.

Putem scrie:

$$\sqrt[n]{u_n} = e^{\frac{1}{n} \log u_n}.$$

Conform teoremei, reamintită mai sus, avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log u_{n+1} - \log u_n}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log u_n}{n} = \log l.$$

Deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Dacă avem

$$l = 1,$$

atunci pentru convergența seriei, se consideră după criteriul RAABE-DUHAMEL:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \alpha_n$$

Unde am pus:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \alpha_n.$$

Se poate considera de asemenea după criteriul logaritmico al lui CAUCHY :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}.$$

Se ştie şi în acest caz, că dacă avem :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \alpha_n = \lambda,$$

vom avea şi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} = \lambda.$$

Iată o demonstraţie dedusă tot din aceeaşi teoremă :

Avem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{u_{n+1}} - \log \frac{1}{u_n}}{\log(n+1) - \log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log \frac{u_n}{u_{n+1}}}{n \log(1 + 1/n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left[(1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} \right]^{n \alpha_n} = \lambda. ^1) \end{aligned}$$

GH. D. POPESCU.

BIBLIOGRAFIE.

ERNEST ABASON. **Chestiuni de examen propuse la examenul de admitere în Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele, în anii 1913, 1914, 1915, 1916, 1918, 1919.** Bucureşti 1923.

În Biblioteca „Asociaţiei de matematici pure şi aplicate”, sub No. 5, D-l E. ABASON, un distins absolvent al Şcolii Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti, publică în o broşură de 104 pagini, litografiată, chestiunile de matematici : algebră ; geometrie elementară, analitică şi descriptivă ; trigonometrie şi mecanică, care s’au propus la examenul de admitere în anul preparator al acelei Şcoli, în anii 1913—1919, cu excepţiunea anului 1917, când Şcoala a fost închisă din cauza războiului.

1) Asupra acestei chestiuni a se vedea G. M. Vol. XVI şi XVIII.

Generalizarea acestei chestiuni de TH. ANGHELUŢĂ. Buletinul Asociaţiei de matematici pure şi aplicate An. II No. 3 şi 4.

Școala Națională de Poduri și Șosele s'a desființat în iunie 1920; necrologul ei l'am publicat în No. 1 Anul XXVI al acestei reviste, așa că lucrarea D-lui E. ABASON are mai mult un caracter istoric. Din ea se vede ce pregătire serioasă de matematici trebuia să aibă candidații la acea Școală și pe ce baze solide eră pus învățământul tehnic superior la noi în țară. D-l E. ABASON a dat chestiunilor dela acele examene, una sau mai multe soluțiuni complete, la cele mai ușoare, indicațiuni, la chestiunile de geometrie descriptivă epurele corespunzătoare, la altele, observațiuni interesante, etc. D-sa a depus multă muncă și pricepere în alcătuirea broșurei și a făcut o operă utilă celor ce voiesă se pregătiască serios în matematicile elementare.

Am însă câte-va desiderate de exprimat pentru o viitoare edițiune a lucrării sau pentru publicațiuni noi de această categorie. Este bine ca soluțiunile să se dea cu minimum de cunoștințe matematice. Astfel la problema de trigonometrie dela pag. 8, pe care am propus-o eu la concursul din anul 1913, maximum expresiunii $\sin(\theta + \alpha) + \sin \theta - \sin \alpha$, se poate face fără derivate. Se suprimă $\sin \alpha$, se transformă restul în produsul $2 \sin(\theta + \frac{1}{2}\alpha) \cos \frac{1}{2}\alpha$, se lasă factorii 2 și $\cos \frac{1}{2}\alpha$ și se caută când $\sin(\theta + \frac{1}{2}\alpha)$ este maximum, de unde se scoate $\theta = 90 - \frac{1}{2}\alpha$.

Pe de altă parte, este bine să se dea și soluții mai lungi, dar pe căi mai cunoscute, căci un candidat, sub căldurile examenelor, nu poate avea timpul de găsit artificii frumoase; acestea trebuiesc date în a doua soluțiune.

Nu dispun de timp spre a cercetă mai de aproape calculele și rezultatele numerice date în broșură; o revizuire însă pare necesară căci am zărit unele scăpări din vedere. Astfel la pag. 97, valoarea lui Pd este $17,5 : 0,96 = 18,222$.

Recomandăm lucrarea D-lui E. ABASON candidaților pentru concursuri la Școli tehnice și alte examene de matematici pure elementare.

I. IONESCU.

Mathesis. Anul XXXVII. No. 7. Iulie 1923. Bruxelles. Bibliografia triunghiului și tetraedrului, de J. NEUBERG. Contribuție la studiul curbelor strâmbe, de D-ra LANNAY. Asupra curbelor tangențiale și normaliane, de E. N. BARISIEN. O problemă asupra cercurilor, de J. NEUBERG. Asupra ortopolului și asupra unei teoreme a lui MORLEY. Deslegarea ecuațiilor de gradul III după SIMON STEVIN, de H. BOSMANS.

Revista de matematicas y fisicas elementales. Anul V. No. 3. Iulie 1923. Buenos Aires. Calculul rapid al determinanților, de E. REBUERTO. Logaritmii și împărțirea prescurtată, de B. IG. BĂIDAFÉ.

Journal de mathématiques élémentaires. Anul 47. No. 17, 18, 19, 20. Paris 1923.

Revista matematică din Timișoara. Anul III. No. 6. August 1923. Timișoara. Simetrie și omogenitate, de T. LALESCU.

C E R E R I.

104. Care sunt mijloacele populare cu care se apreciază mărimea sau conținutul căpițelor cu fân?

I. I.

90. *Răspuns.* Prin cererea 90 se făcea apel la cititorii *Gazetei Matematice* de a da concursul la reeditarea *Culegerii de Probleme de Aritmetică*. În curs de un an, numai doi corespondenți ai acestei reviste au pregătit 12 capitole, care reprezintă cam 10% din totalul *Culegerii*.

Rog pe corespondenții, cari au luat manuscrise să mi le restituie; pe alții, cari dispun de timp și de putere de muncă, să mi le ceară.

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2336. *Să se determine suprafața triunghiului ABC, în funcție de laturile b și c, știind că tangentele unghiurilor sunt în progresie armonică.*

LT. I. LINTEȘ.

I. Să presupunem:

$$1) \quad 2/\operatorname{tg} A = 1/\operatorname{tg} B + 1/\operatorname{tg} C.$$

Din relația:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

și simetricele ei, deducem că:

$$\frac{a \cos B}{b \cos A} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

Dar:

$$a/b = \sin A / \sin B,$$

deci:

$$\frac{a \cos B}{b \cos A} = \frac{\sin A \cos B}{\sin B \cos A} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

Așa dar, analog, vom găsi că :

$$2) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} A = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2} \\ \operatorname{tg} B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2 + b^2 - a^2} \\ \operatorname{tg} C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + c^2 - b^2} \end{cases}$$

Înmulțind în 1) cu $\operatorname{tg} A$, avem :

$$2 = \operatorname{tg} A / \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} A / \operatorname{tg} C$$

și ținând seamă de relațiunile din 2), găsim :

$$3) \quad 2a^2 = b^2 + c^2.$$

Mai știm apoi că : $2S = bc \sin A$,
de unde :

$$4) \quad \sin A = 2S/bc$$

$$\text{Asemenea : } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

unde înlocuind pe a^2 din 3), avem :

$$5) \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2}{2bc}.$$

Ridicând la pătrat relațiunile 4) și 5) și adunându-le, găsim :

$$6) \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1 = 4S^2/b^2c^2 + (b^2 + c^2)^2/16b^2c^2,$$

de unde :

$$7) \quad S = \frac{1}{8} \sqrt{16b^2c^2 - (b^2 + c^2)^2}.$$

Formula este valabilă când cantitatea de sub radical e pozitivă, adică în condiția :

$$2bc > (b - c)^2.$$

II. Presupunem acum :

$$2/\operatorname{tg} B = 1/\operatorname{tg} A + 1/\operatorname{tg} C.$$

Înmulțind ambii membri cu $\operatorname{tg} B$ și ținând seamă de relațiunile 2), găsim condiția :

$$2b^2 = a^2 + c^2.$$

Procedând analog ca la 1), găsim :

$$8) \quad S = \frac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 - (2c^2 - b^2)^2},$$

cu condiția : $2bc > 2c^2 - b^2$.

III. În fine, dacă presupunem :

$$2/\operatorname{tg} C = 1/\operatorname{tg} A + 1/\operatorname{tg} B$$

și procedând ca mai sus, găsim :

$$9) \quad S = \frac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 - (2b^2 - c^2)^2},$$

cu condiția : $2bc > 2b^2 - c^2$.

Astfel formulele 7), 8) și 9) rezolvă complet problema.

LT. I. LINTES.

D-l GH. T. RIZESCU a rezolvat problema, dând numai formula 7).

PROBLEMA 2604. *Să se găsiască numerele întregi și pozitive a și b, știind că fracțiunea a/b se transformă într-un număr zecimal exact, a cărui parte întreagă este a - b, iar parte zecimală a + b.*

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Soluția I, dată de D-l A. TAUBER (Lc. Laurian, Botoșani).

Numărul b cuprinzându-se în a de a - b ori, avem evident :

$$a > b(a - b) \quad \dots \quad a < b + 1 + 1/(b - 1).$$

Sau, deoarece $b \neq 1$;

$$(1) \quad a \leq b + 1.$$

Enunțul dă însă $b < a$, care împreună cu (1) dă $b < a \leq b + 1$,

$$\dots \quad a = b + 1.$$

Problema revine la a găsi numărul b, astfel încât să avem :

$$(2) \quad 1/b = 0,(2b + 1).$$

Fie n numărul cifrelor lui $2b + 1$. Egalitatea (2) se mai poate scrie

$$(3) \quad b(2b + 1) = 10^n.$$

b și $2b+1$ fiind prime între ele, iar $2b+1$ fiind nepereche, rela-
țiunea (3) are loc numai dacă se ia: $b=2^n$ și $2b+1=5^n$,

$$\therefore 2^{n+1}+1=(2^2+1)^n=2^{2n}+\dots+1.$$

Este evident că ultima egalitate are loc numai pentru $n=1$,
ceea ce dă ca soluție:

$$b=2 \quad \text{și} \quad a=3.$$

În adevăr, $3/2=1,5=(3-2), (3+2)$.

Soluția II, dată de D-l N. CIORĂNESCU.

Deoarece $a > b$, se poate pune

$$(1) \quad a = nb + c \quad (b < c).$$

și atunci condiția enunțului devine

$$(nb+c)/b = n+c/b = (n-1)b+c, (n+1)b+c.$$

Partea întreagă trebuind să fie aceeași, urmează că

$$(2) \quad n = (n-1)b + c.$$

Însă deoarece $b \geq 2$, avem neapărat din (2)

$$2 \leq (n-c)/(n-1) \quad \therefore \quad n \leq 2-c.$$

n și c fiind numere întregi pozitive diferite de zero, ultima neega-
litate nu are loc decât pentru $n=c=1$, ceea ce dă în (1) $a=b+1$.

De aci, procedând ca la soluția întâia, se găsește:

$$a=3 \quad \text{și} \quad b=2.$$

Soluția III, dată de D-l W. SOLOMON (Lc. Matei Basarab,
București).

Fracțiunea a/b transformându-se în fracțiune zecimală exactă,
avem neapărat

$$(1) \quad b = 2^m \cdot 5^n.$$

Pe de altă parte, avem evident $a-b < a < a-b+1$.

Înlocuind aici pe b prin valoarea sa din (1), se găsește

$$2^m \cdot 5^n a - 2^{2m} \cdot 5^{2n} < a < 2^m \cdot 5^n a - 2^{2m} \cdot 5^{2n} + 2^m \cdot 5^n$$

$$\therefore \quad 2^m \cdot 5^n < a < 2^{2m} \cdot 5^{2n} / 2^m (5^n - 1)$$

$$\therefore \quad 1 < a/b < 2^m \cdot 5^n / 2^m (5^n - 1) = (2^m \cdot 5^n + 1 - 1) / (2^m \cdot 5^n - 1) \\ = 1 + 1/(2^m \cdot 5^n - 1),$$

ceea ce dovedește că partea întreagă a lui a/b este egală cu 1. Prin urmare, $a = b + 1 = 2^m \cdot 5^n + 1$.

Soluția problemei este deci :

$$a = 2^m \cdot 5^n + 1, \quad b = 2^m \cdot 5^n.$$

Rămâne să se determine m și n . Pentru aceasta, introduc valorile lui a și b în egalitatea definitivă de enunț și găsim :

$$2^m \cdot 5^n + 1 = 2^m \cdot 5^n [1, (2 \cdot 2^m \cdot 5^n + 1)],$$

sau, înmulțind ambii membri cu $2^n \cdot 5^m$ și observând că membrul II trebuie să devie întreg ca și membrul I, se găsește după reducerea termenilor asemenea

$$2^n \cdot 5^m = 2 \cdot 2^m \cdot 5^n + 1.$$

Pentru ca membrul I să fie nepereche, trebuie să se ia $n=0$, ceea ce dă

$$5^m = 2^{m+1} + 1,$$

care nu are loc decât pentru $m = 1$, adică

$$a = 3, \quad b = 2.$$

Notă. 1°. D-l T. POPOVICIU (Lc. Moise Nicoară, Arad) a dat o soluție algebrică.

2°. Celelalte soluțiuni primite au găsit soluția exactă a problemei, însă s'au pus dela început în ipoteza că a și b sunt numere de câte o cifră, ceea ce nu se spune în enunț. Din cauza acestei particularizări a enunțului, numele acestor rezolvitori nu a fost menționat.

PROBLEMA 2748. *Fie D piciorul bisectoarei unghiului A, al triunghiului ABC, înscris în cercul cu centrul în O. Să se arate că tangenta DQ la cercul I, înscris triunghiului ABC, este perpendiculară pe OA și că dreapta care unește mijlocul laturei BC cu Q, se întâlnește cu celelalte două, analog obținute, în un punct pe cercul I.*

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Soluție dată de d-nii: C. H. NICOLAU; T. POPOVICIU (Lc. Moise Nicoară, Arad); M. GRÜNBAUM și B. BARBĂLAT (Lc. Bârlad).

Fie M punctul în care DQ taie pe OA. DI fiind bisectoara unghiului MDB, avem

$$\sphericalangle MDA = \sphericalangle ADB.$$

Din triunghiul ABD se scoate

$$\sphericalangle ADB = \pi - B - \frac{1}{2} A.$$

Se ştie însă că

$$\sphericalangle OAD = \frac{1}{2} (B - C).$$

Deci unghiul M, din triunghiul AMD, este dat de :

$$M = \pi - ADB - OAD = \frac{1}{2} (B + C + A) = \frac{1}{2} \pi.$$

Unghiul M este prin urmare drept.

Fie R şi S punctele analoage lui Q, iar A',B',C' mijloacele laturilor triunghiului ABC. Conform primei părţi a problemei :

$$IQ \parallel OA ; IR \parallel OB ; IS \parallel OC.$$

Cum IQ,IR,IS sunt egale între ele şi OA,OB,OC sunt de asemenea egale între ele, urmează că triunghiurile ABC şi QRS au laturile paralele. Ele sunt asemenea. De asemenea, triunghiurile A'B'C' şi QRS sunt asemenea. Dreptele A'Q,BR,C'S se întâlnesc în centrul lor de asemănare, care e acelaşi cu centrul de asemănare al cercurilor A'B'C', QRS. Acest centru de asemănare, este tocmai punctul lui FEUERBACH al triunghiului ABC, punct care se află pe cercul I.

PROBLEMA 2937. Să se găsiască limita expresiunei :

$$\log \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)},$$

$$\log n$$

când n creşte nemărginit prin valori întregi şi pozitive.

Mai general, să se găsiască limita expresiunei :

$$\log \frac{\varphi(1) \varphi(2) \dots \varphi(n)}{f(1) f(2) \dots f(n)},$$

$$\log n$$

unde $\varphi(n)$ şi $f(n)$ sunt două polinoame de acelaş grad în raport cu n şi coeficienţii puterilor celor mai mari fiind unitatea.

TH. ANGHELUŢĂ.

Prima soluție. Să considerăm seria cu termeni pozitivi :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

și să presupunem că : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Pentru cercetarea convergenței seriei, se recurge atunci, fie la criteriul RAABE-DUHAMEL, fie la criteriul logaritmice al lui CAUCHY.

Pentru primul criteriu, se pune :

$$u_{n+1}/u_n = 1/(1 + \alpha_n)$$

(1) și se caută $\lim_{n \rightarrow \infty} n \alpha_n$.

În criteriul logaritmice, se caută limita expresiunii

$$(2) \quad \frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} .$$

Acestea fiind reamintite, se dovedește¹⁾ într'un mod general, că dacă expresiunea (1) are o limită, atunci și (2) are aceeași limită.

Pentru găsirea limitei căutate, să punem :

$$u_n = \frac{f(1)f(2)\dots f(n-1)}{\varphi(1)\varphi(2)\dots\varphi(n-1)} .$$

Atunci avem : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(n)}{\varphi(n)}$.

Dar, după enunț, putem scrie :

$$f(n) = n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p ,$$

$$\varphi(n) = n^p + b_1 n^{p-1} + \dots + b_p .$$

Deci avem : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

De unde scoatem că

$$\alpha_n = \frac{\varphi(n)}{f(n)} - 1 = \frac{(b_1 - a_1) n^{p-1} + \dots}{n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p} .$$

1) TH. ANGHELUȚĂ. Buletinul asociației de matematică pure și aplicate
An. II No. 3 și 4.

Prin urmare $\lim_{n=\infty} n \alpha_n = b_1 - a_1$.

Criteriul RAABE-DUHAMEL dând ca limită pe $a_1 - b_1$, atunci și criteriul CAUCHY va da aceeași limită, adică:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{\varphi(1)\varphi(2)\dots\varphi(n)}{f(1)f(2)\dots f(n)}}{\log n} = a_1 - b_1.$$

Pentru cazul particular, limita va fi deci $1/2$.

A doua soluție, dată de D-nii: N. GEORGESCU-ROEGEN, I. B. FLORESCU, GH. D. POPESCU și C. I. GEORGESCU.

Să reamintim următoarea teoremă asupra limitelor:

Dacă v_n crește cu n și devine infinit cu el și dacă raportul

$$E = \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}$$

are o limită, atunci și raportul u_n / v_n , are aceeași limită pentru n infinit.

Având
$$u_n = \log \frac{\varphi(1)\varphi(2)\dots\varphi(n-1)}{f(1)f(2)\dots f(n-1)}$$

și punând
$$v_n = \log(n-1),$$

avem și
$$E = \frac{\log \frac{\varphi(n)}{f(n)}}{\log \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}.$$

Aceasta pentru $n = \infty$ se prezintă sub forma de $0/0$.

Pentru găsirea limitei, se poate scrie:

$$E = \frac{\log \left[\frac{\varphi(n)}{f(n)} \right]^{n-1}}{\log \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}.$$

Totul revine a găsi limita expresiunii:

$$E' = \left[\frac{\varphi(n)}{f(n)} \right]^{n-1},$$

care se prezintă sub forma 1^∞ .

După un artificiu clasic, chestiunea revine la căutarea limitei expresiunii :

$$\frac{\varphi(n) - f(n)}{f(n)} (n-1), \text{ care este } a_1 - b_1.$$

Deci: $\lim E' = e^{a_1 - b_1}$

∴ $\lim E = a_1 - b_1.$

D-l T. POPOVICIU dă o soluție pentru cazul particular, bazându-se pe formula lui WALLIS.

Observație. Găsirea limitei cerute și căutarea convergenței seriei, al cărui termen general este :

$$u_n = \frac{f(1)f(2)\dots f(n)}{\varphi(1)\varphi(2)\dots \varphi(n)},$$

sunt într-o strânsă legătură.

PROBLEMA 3026. Fie M și N două puncte isotomice în raport cu vârfurile B și C ale unui triunghi ABC. Paralelele duse prin M și N la latura AC taie latura AB în M' și N', iar paralelele duse prin M și N la latura AB taie latura AC în M'' și N''. Se cere să se găsiască locul geometric al intersecției dreptelor M'M'' și N'N'', când punctele M și N rămânând isotomice, pozițiunea lor se schimbă pe BC.

I. O. HUBER.

Soluție dată de D-nii: EUGEN I. BALLAN, ALEXANDRU ȘCOTRANO, CONST. E. GEORGESCU, B. M. BARBĂLATT, ION COȘEREANU, CONST. I. GEORGESCU, ADRIAN A. BUȘILĂ, L. M. ARON.

Dreapta MM' fiind paralelă cu CA, avem :

$$AM'/AB = MC/BC.$$

De asemenea dreapta NN'' fiind paralelă cu BA, avem :

$$AN''/AC = BN/BC.$$

Dar punctele M și N fiind isotomice în raport cu B și C, avem $MC = BN$, astfel că relațiile precedente ne dau :

$$AM'/AB = AN''/AC,$$

ceea ce ne arată că dreapta M'N'' este paralelă cu BC.

Analog demonstrăm că $N'M''$ e și ea paralelă cu BC.

Patrulaterul $M'N'M''N''$ este prin urmare un trapez. Se știe însă că într'un trapez, punctul de intersecție al diagonalelor se află pe dreapta care unește mijloacele laturilor paralele ale trapezului, dreaptă care, în cazul figurei noastre, trece prin vârful A și prin mijlocul laturei BC. Locul căutat este deci mediana laturei BC.

Soluție și *generalizare* dată de D-nul TIBERIU POPOVICIU (Elev în Cl. VIII a Liceului Moise Nicoară din Arad). Să rezolvăm următoarea problemă mai generală: Fie M și N două puncte de pe latura BC, simetrice față de un alt punct fix A_1 al laturei BC din triunghiul ABC și fie P_1 și P_2 două puncte fixe în planul triunghiului. Dreptele P_1M și P_1N taie latura AB în M' și N' , iar dreptele P_2M și P_2N taie latura AC în M'' și N'' . Să se găsiască locul intersecției ($M'M''$, $N'N''$), când M și N rămânând simetrice față de A_1 poziția lor pe BC variază. Să însemnăm punctul al cărui loc se caută cu Q.

Fie M_1, N_1 pozițiile punctelor M și N când dreapta P_1M_1 trece prin A. Intersecția ($M'_1M''_1$, $N'_1N''_1$), pe care să o notăm cu Q_1 , este pe AB chiar în M'_1 .

Fie de asemenea M_2, N_2 pozițiunile punctelor M, N, când P_2N_2 trece prin A. Intersecția Q_2 a dreptelor ($M'_2M''_2$, $N'_2N''_2$) este pe AC, chiar în N''_2 .

Din cauza simetriei punctelor M, N; M_1, N_1 și M_2, N_2 de pe latura BC față de punctul fix A_1 , rapoartele anarmonice (NMM_2M_1) și (MNN_2N_1) sunt egale. Rezultă de aici că fasciculele:

($P_1.NMM_2M_1$), ($P_2.MNN_2N_1$), sau ($P_1.N'M'Q_1A$), ($P_2.M''N''AQ_2$) au un raport anarmonic egal. Deci și fasciculele:

$$(M''.N'M'Q_1A) \text{ și } (N'.M''N''AQ_2)$$

au un raport anarmonic egal. Dar ultimele două fascicule au o rază omoloagă comună; urmează atunci, după o proprietate cunoscută, că intersecțiile celorlalte trei raze omoloage luate două câte două, adică punctele Q, Q_1 , Q_2 , sunt în linie dreaptă. De oarece M și N au fost luate arbitrar, reese că dreapta Δ , determinată de punctele Q_1 și Q_2 , este locul geometric căutat al punctului Q.

Dacă punctele P_1 și P_2 sunt aruncate la infinit, atunci MM' , e paralelă cu NN' , iar MM'' e paralelă cu NN'' .

Dacă MM' și NN' sunt paralele cu AC, iar MM'' și NN'' sunt paralele cu AB, locul geometric căutat este o dreaptă paralelă cu

mediana corespunzătoare laturei BC, dusă prin A_1 . Dacă pe lângă aceasta, A_1 este mijlocul lui BC, suntem în cazul cu totul particular al enunțului și locul este însăși mediana.

D-nii CRISTEA P. GOILAV și AL. ȘCODRANO au rezolvat problema cu ajutorul geometriei analitice.

D-nul GR. C. MOISIL a dat o bună soluție cu ajutorul coordonatelor baricentrice. D-sa găsește că dacă punctele M și N sunt puncte isogonale în raport cu unghiul A, locul intersecției dreptelor $M'M''$ și $N'N''$ este simediana AK.

D-sa indică apoi că problema se poate generaliza, considerând că punctele M, N sunt inverse în raport cu un centru $\theta (z_0, \beta_0, \gamma_0)$.

PROBLEMA 3038. *Se dă un con drept SAB, centrul cercului de bază fiind C. Să se găsiască raza unei sfere O, care trece prin S, are centrul pe SC și detașează din conul dat un volum egal cu $a^3 \pi/3$.*

D. V. IONESCU.

Fie SA, SB cele două generatoare ale conului, situate în acelaș plan cu SC, M și N intersecțiile acestor generatoare cu sfera cerută, I proiecția lui M pe SC și E intersecția înălțimei SC cu sfera O. Vom însemna:

$$OS = x, \quad Ol = y, \quad MI = z.$$

Triunghiul OMI, fiind dreptunghic, vom avea:

$$y^2 + z^2 = x^2.$$

Triunghiurile SMI, SAC fiind asemenea:

$$MI/AC = SI/SC \text{ sau } z/R = (x+y)/H.$$

Apoi observăm că

$$\text{vol. SMEN} = \text{vol. SMN} - \text{vol. MON} + \text{vol. OMEN},$$

sau:

$$\pi z^2 (x+y)/3 - \pi z^2 y/3 + 2\pi x^2 (x-y)/3 = \pi a^3/3.$$

Această ecuație se reduce la:

$$z^2 x + 2x^2 (x-y) = a^3.$$

Aşa dar, între cele trei elemente x, y, z , avem următoarele trei relaţiuni:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad x^2 &= y^2 + z^2 \\ (2) \quad zH &= R(x+y) \\ (3) \quad z^2x + 2x^2(x-y) &= a^3 \end{aligned} \right\}$$

Eliminând pe y şi z dintre aceste trei ecuaţii, vom obţine o ecuaţie în x , care ne va da raza sferei cerute.

Din ecuaţia (1) deducem:

$$(4) \quad z^2 = (x-y)(x+y)$$

şi eliminând pe z între aceasta şi (2), avem:

$$(x-y)/(x+y) = R^2/H^2.$$

Din aceasta, deducem:

$$(x-y)/2x = R^2/(R^2 + H^2) = R^2/G^2,$$

G fiind generatoarea conului.

Rezultă că:

$$(5) \quad x-y = 2R^2x/G^2, \quad x+y = 2H^2x/G^2$$

şi din (4), rezultă

$$(6) \quad z^2 = 4R^2H^2x^2/G^4.$$

Înlocuind în ecuaţia (3) pe $x-y$ şi z^2 în funcţie de x , date de formulele (5) şi (6), vom avea:

$$4R^2H^2x^3/G^4 + 4R^2x^3/G^2 = a^3.$$

$$\therefore x^3 = a^3G^4/4R^2(G^2 + H^2)$$

$$\text{şi deci: } x = a \sqrt[3]{G^4/4R^2(G^2 + H^2)}.$$

Notă. Au rezolvat problema D-nii: WILHELM I. SOLOMON (elev cl. VI Lic. Matei Basarab) şi ŞT. F. LĂZĂRESCU (elev cl. VIII Lic. din Giurgiu).

PROBLEMA 3061. *Un număr începe cu 5 şi are în urma acesteia numai cifra 6. Cu care din primele 20 numere poate fi el divizibil? De ce formă sunt acele numere?*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-nii: F. NEGRETZU, A. TAUBER, S. KATZ, N. ARCADIAN.

Numerele terminându-se cu 6, se divid cu 2. Apoi $56 = \mathcal{M}4 = \mathcal{M}8$, pe când 66 nu se divide cu 4. Deci numărul 56 se divide cu 4 și 8, pe când celelalte nu; apoi toate numerele nu se divid cu 16. Mai rezultă de aci, că nici un număr nu se divide cu $12 = \mathcal{M}4$ și cu $20 = \mathcal{M}4$.

Numerele $5666 \dots 66 = 5000 \dots 00 + 666 \dots 66$, nu se divid cu 3, căci prima parte a sumei nu se divide cu 3, pe când a doua se divide totdeauna. Reese apoi de aci că nici unul din numerele 6, 9, 15, 18 nu divid numerele date. Se vede apoi imediat că numerele nu se divid cu 5, sau cu 10.

Ne rămâne de cercetat numerele prime 7, 11, 13, 17, 19.

Observăm că $56 = \mathcal{M}7$, iar împărțind $666 \dots 6$ prin 7, se găsește că $666666 = \mathcal{M}7$. Deci numerele de forma $566 \dots 6$, care au de $6n + 1$ ori pe 6, se divid cu 7. Ele se divid evident și cu 14.

Împărțind pe $566 \dots 6$ prin 11, găsim câtul $515151 \dots$. Împărțirea nu se termină nici odată. Deci nici un număr nu este $\mathcal{M}11$.

Împărțind pe $566 \dots 6$ prin 13, găsim câtul $435897435897 \dots$. Împărțirea nu se termină. Deci nici unul din numere nu este $\mathcal{M}13$.

Împărțind pe $566 \dots 6$ prin 17, găsim câtul $3333 \dots$. Împărțirea nu se va termina nici odată. Deci nici unul din numerele considerate nu se divide cu 17.

Împărțind numărul $566 \dots 6$ prin 19, găsim câtul 298245614 , iar împărțind numărul $666 \dots 6$ prin 19, găsim câtul 0350877195298245614 . Deci numerele care au pe 6 de $18n + 9$ ori se divid cu 19.

Rezumând, ajungem la următoarele concluziuni:

- 1) Toate numerele se divid cu 2.
- 2) Numai numărul 56 se divide cu 4 și 8.
- 3) Numerele care au pe 6 de $(6n + 1)$ ori, se divid cu 7 și cu 14.
- 4) Numerele care au pe 6 de $(18n + 9)$ ori se divid cu 19.
- 5) Nici unul din numerele date nu se divide cu 3, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 20.

Notă. D-l F. NEGRETZU a arătat că forma divizorilor este $(12k + 2)$ și $(12k + 7)$. Se ceruse însă forma numerelor ce se divid cu acești divizori. Ele se găsesc ușor observând că $666 \dots 6 = \frac{2}{3}(10^n - 1)$. Se găsește că:

$$\frac{1}{3}(17 \cdot 10^{6n+1} - 2) = \mathcal{M}7 = \mathcal{M}14.$$

$$\frac{1}{3}(17 \cdot 10^{9(2n+1)} - 2) = \mathcal{M}19.$$

I. I.

PROBLEMA 3065. *Din extremitățile unei laturi a unui triunghi u oarecare, se descriu cercuri care se taie pe înălțimea corespunzătoare acestei laturi. Se duc apoi din vârful opus tangente la aceste cercuri. Să se arate că perpendicularele scoberite din aceste puncte de tangență, respectiv pe laturile adiacente, se vor tăia pe aceeași înălțime.*

G. A. NICHIFOR.

Soluție dată de D-nii : B. M. BARBĂLATT (Bârlad); M. H. BRĂTESCU (R.-Vâlcea); I. COȘEREANU; V. DIMITRIU (Iași); M. FOCȘENEANU; A. NICULESCU; O. POPEA (Chișinău); D. TEODORESCU; E. BALAN și C. I. GEORGESCU.

Fie ABC triunghiul dat și M punctul comun pe înălțimea AA' a cercurilor (B) și (C) de centre B și C. E ușor de văzut că BC fiind linia centrelor și $MA' \perp BC$, atunci înălțimea e *ax radical* al cercurilor (B) și (C). În acest caz, tangentele duse din vârful opus A acestor 2 cercuri, vor fi egale și deci cele 4 puncte de tangență sunt pe un acelaș cerc cu centrul în A. Coarda contactelor tangentelor duse din A la cercul (B) este tocmai perpendiculara din enunțul problemei pe latura AB și tot așa față de cercul (C) și latura AC. Aceleași coarde sunt și *axe radicale* ale perechilor de cercuri (A) (B) și (A) (C). Avem în definitiv 3 cercuri de centre (A) (B) (C), care se taie 2 câte 2 și deci admit un centru radical comun, care va fi situat pe înălțimea AA' a triunghiului ABC.

Observațiune. D-l B. BARBĂLATT observă că cercurile (B) și (C) pot să se taie pe înălțimea AA' și în *puncte imaginare*, fără să arate cum se pot obține asemenea cercuri.

Iată un mijloc pentru a ajunge la aceasta:

Descriem din B un cerc cu o rază după voie, dar evident mai mică decât BA' și din A' ducem o tangentă A'x la acest cerc. Descriem apoi cercul de centru A' și de rază A'x la acest cerc. Descriem apoi cercul de centru A' și de rază A'x și ducem din extremitatea C o tangentă C β la acest al doilea cerc. Cercul de centru C și de rază C β va fi cercul care se taie cu cercul (B) în puncte imaginare pe înălțimea AA'.

În adevăr, avem evident A β tangentă cercului (C) și fiind egală cu tangenta A'x la cercul (B), atunci cercurile (B) și (C) au pe AA' drept ax radical.

G. N.

EXERCITIIL.

1. Care e numărul de patru cifre diferite, de forma $abcd$, așa încât ab și cd să fie două numere prime consecutive, iar c și d să fie numere consecutive.

MAIOR G. LITEANU.

R. Din tabelele Dupuis pag. 138, exprimând prima condiție, găsim numerele :

1923, 2931, 3741, 4753, 5961 și 7983.

Dintre acestea, a doua condiție din enunț o îndeplinește numai numărul 1923.

2. Se scriu patru cifre consecutive în ordine crescândă și se schimbă între ele prima dela stânga cu a doua. Numărul obținut este un patrat. Care sunt acele cifre ?

S. KATZ.

R. Se scriu toate numerele în condițiunile problemei, se elimină cele ce se termină cu 7, 8 și se caută care din celelalte sunt patrâte. Găsim patrutul 4356.

3. Suma cifrelor unui număr de patru cifre este 11, iar suma primelor două este cât a treia, pe când suma ultimelor două este cât produsul primelor două.

A. ABRAMOVICI.

R. Fie m, s, z, u cele patru cifre. Avem :

$$m + s + z + u = 11, \quad m + s = z, \quad ms = z + u,$$

$$\therefore \quad 2z + u = 11$$

De aci, se vede că nu putem lua de cât $u = 1, 3, 5, 7, 9$, când $z = 5, 4, 3, 2, 1$ și $u + z = ms = 6, 7, 8, 9, 10$, când $m + s = z = 5, 4, 3, 2, 1$. Desfacem ms în doi factori și căutăm când suma lor este z corespunzător. Găsim ca soluție numerele 2351 și 3251.

4. Dintr'un punct exterior unei drepte, să se ducă o perpendiculară pe acea dreaptă, știind că partea hârtiei, unde cade piciorul perpendicularei, e găurită și că nu se poate desena în partea drepte, opusă punctului.

L. WEISS.

R. Se duce din punctul dat, cu o deschidere de compas oarecare, un arc care taie dreapta în 2 puncte. Se duce bisectoarea unghiului format cu vârful în punctul dat, care e și perpendiculară pe dreaptă.

5. În orice triunghi avem relațiunea :

$$\frac{r_a^3}{(rb - ra)(rc - ra)} + \frac{r_b^3}{(ra - rb)(rc - rb)} + \frac{r_c^3}{(ra - rc)(rb - rc)} = 4R + r.$$

TRAIAN A. DORDEA.

R. În identitatea :

$$\sum \frac{a^3}{(b-a)(c-a)} = a + b + c, \quad (\text{Culeg. Probl. Alg. IV, 23})$$

dacă facem : $a = ra$, $b = rb$, $c = rc$, avem relațiunea propusă.

6. Cu notațiunile obișnuite, în orice triunghi avem :

$$\frac{1}{r^5} - \frac{1}{r_a^5} - \frac{1}{r_b^5} - \frac{1}{r_c^5} = \frac{10R}{S^4} (a^2 + b^2 + c^2).$$

ION S. ANTONIU.

R. În identitatea :

$$(x+y+z)^5 - (y+z-x)^5 - (z+x-y)^5 - (x+y-z)^5 = 80xyz(x^2+y^2+z^2),$$

facem :

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

și ținem seama că :

$$a + b + c = 2p, \quad S = ra(p-a) = \dots = pr, \quad abc = 4RS.$$

7. Să se demonstreze identitatea :

$$\sum \frac{\cos A}{\alpha \alpha'} = 0,$$

α, α' fiind bisectoare interioare și exterioare.

G. JUJESCU.

$$\begin{aligned} R. \quad \alpha &= ac \sin B / (b + c) \sin \frac{1}{2}A, \quad \alpha' = ac \sin B / (b - c) \cos \frac{1}{2}A, \\ \cos A / \alpha \alpha' &= (b^2 - c^2) / 8S^2 \text{ etc.} \end{aligned}$$

PROBLEME PROPUSE.

3091. Care fracții, fiind coprinse între două treimi și trei sferturi, au patratul lor coprins între aceleași limite ?

E. ȘTEFĂNESCU.

3092. Se ia un număr de două cifre într'un sistem de numerațiune oarecare. În ce caz suma sau diferența dintre acel număr și răsturnatul lui este un patrat sau sub perfect ?

B. BARBĂLATT.

3093. Cu trei cifre diferite să se facă trei patrate perfecte de câte trei cifre.

C. E. GEORGESCU.

3094. Să se demonstreze că toate triunghiurile dreptunghice, care au laturile în progresiune aritmetică, sunt asemenea.

I. IONESCU.

3095. Se dau două triunghiuri T și T' . Să se înscrie în T un triunghi T'' asemenea cu T' și omologic cu T .

T. MAREȘ.

3096. Se dă un con drept SAB , înălțimea sa este SC . Se duce sfera O , care trece prin S , are centrul pe SC și detașează din con un volum egal cu $\frac{1}{3} \pi a^3$.

Fie O_1, O_2 cele două sfere tangente conului S și sferei O . Să se găsiască razele acestor sfere și volumul cuprins între con, sfera O_1 și sfera O_2 .

D. V. IONESCU.

3097. Să se rezolve ecuația:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) = m.$$

C. I. GEORGESCU.

3098. Dacă ecuația

$$A_0 x^m + \dots + Ax^p + Bx^{p-1} + Cx^{p-2} + Dx^{p-3} + Ex^{p-4} \dots + A_m = 0$$

are toate rădăcinile reale, coeficienții A, B, C, D, E a cinci termenî consecutivi, satisfac inegalitatea:

$$(AC - B^2)[4(BD - AE)^3 + 27(BE - DC)^2(AC - B^2)] > 0.$$

TH. ANGHELUȚĂ.

3099. Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghi oarecare avem relațiunea:

$$\begin{aligned} \cos^{\frac{3}{2}} A \cos^{\frac{1}{2}}(B - C) + \cos^{\frac{3}{2}} B \cos^{\frac{1}{2}}(C - A) + \cos^{\frac{3}{2}} C \cos^{\frac{1}{2}}(A - B) \\ = 3 \cos^{\frac{1}{2}} A \cos^{\frac{1}{2}} B \cos^{\frac{1}{2}} C. \end{aligned}$$

EMIL ȘTEFĂNESCU.

3100. Un tun trage un proiectil cu 1000 m/sec. În cât timp acest proiectil va parcurge o distanță orizontală de 1000 m.?

CĂPITAN. I. LINTES.

Dela apariția ultimului număr s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (2861, 3056, 74, 77, 87); Amărăscu G. (3047, 57, 58, 59); Antoniu A. (3012); Balan E. (2091, 675, 89, 799, 932, 3034, 44, 46, 47, 53, 64, 68, E. N.); Barbălătt M. B. (2952, 3043, 64, 74, 77, 85, 87, E. P. R.); Bercovici E. (3058, 59, 79); Blumenfeld D. (3051, 61, 67, 79); Brătescu M. (3068); Bușilă A. (R.); Cădere R. (3048, 58); Caragheorghe C. (3047); Caza-cincu V. (3039, 67); Coșereanu I. (3074, 87); Dobrescu-Băbici I. (3051); Dumitrescu M. (3062, N. R.); Epure St. (3023); Florescu I. (A. E. N.); Focșeneanu M. (3079, N. P.); Georgescu I. Const. (1948, 2035, 63, 64, 116, 30, 458, 73, 615, 51, 799, 851, 60, 922, 3014, 52, 58, 64, 68, 73, 74, 76, A. E. N. P. R.); Goilav Cr. (3062, 63, 67, 68, 79, 87); Goldstein I. (3014, 43, 44, 50, 74, 76, 77, 79); Guțu A. (3047, 50, 57, 68, P.); Iliescu Em. (3058, 67, 72, 79, 81, 82, N. R.); Iliescu M. (3067); Ionescu Longin (3039, 77, 79, 87); Katz S. (E.); Lăzărescu I. (3047); Lăzărescu St. (2868, 3014, 47, 77, 83, E.); Martinian B. (3064, 74); Mateescu G. (2972); Mihăescu C. (3021, 62, 64, 68, 74, 77, P.); Mihăilescu Costin (3082); Mihăilescu Romeo (3039, 57, 59, 76); Mirescu P. (3077, 79); Negretzu Fl. (3051, 72, 76, 78, E. N. P.); Panaitescu A. (3039, 79); Popeanu A. (3048, 50); Popescu D. G. (P.); Popescu N. (3059); Popovici D. (3059, 83); Popoviciu T. (3044, 68, 74, 76, 87, N. P.); Russu E. (2888); Ștefan M. (2972); Ștefănescu E. (2888, 3046, 51, 79, 87, P.); Stoenescu I. (R.); Tauber Al. (2861, 3087, E.); Teodorescu D. (3073, 74, 79); Udrisky Tr. (3037, 50, 53, 64, 65, 79); Weiss L. (2952, 3043, 64, 73, 74, 79); Weiss S. (3048, 57, E.); Zukermann B. (3059).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

La redacția revistei „Gazeta Matematică” se primesc abonamente pentru „Revista de matematicas y físicas elementales” din Buenos-Aires, Anul V (Mai 1923 — Aprilie 1924). Costul unui abonament anual este de 70 lei.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1948, 2035, 295, 98, 340, 440, 635, 40, 43, 51, 61, 75, 82, 89, 803, 27, 35, 38, 51, 72, 79, 87, 95, 902, 10, 18, 29, 31, 32, 59, 71, 78, 80, 83, 91, 93, 3013, 36, 40, 52, 53, 71, 84 și 90 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

27 VOLUME

Colecțiunea întreagă Lei 1500,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 70 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI și XXV, care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie*. (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

2. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. N. Abramescu, *Curs de algebră superioară* pentru cl. V⁻ reală, *Ediția III revăzută și adăugită*, 1921. (Epuizată).

4. A. G. Ioachimescu și G. Țițeica, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă). (Epuizată).

5. Tr. Lalescu și St. N. Mirea, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* Lei 15,—

6. Tr. Lalescu, *Tratat de Geometrie analitică*,
Fascicula I (Epuizată).

Idem, Fascicula II Conice Lei 20,—

Idem, Fascicula III Cuadrice Lei 20,—

7. Gh. Lazăr, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) Lei 5,—

8. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăugită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme Lei 60,—

9. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, *Vocabular Matematic* Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăoga taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul*. Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septembrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimite D-lui: I. D. Teodor, Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la casierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București.

*Omor = Asociatiunea pentru
cultura si literatura poporului*

Român din Sibiu

GAZETA MATEMATICĂ

APARE ODATĂ PE LUNĂ

Sibiu

ANUL XXIX.

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1923

SUMARUL

1. Unul din primii profesori de matematică
munteni: SIMEON MARCOVICI *Tr. Lalescu.*
2. Asupra cronografului JOLY *Locot. I. Linteș.*
3. Note Matematice: 6 — 13.
4. Bibliografie.
5. Cereri: 105.
6. Probleme Rezolvate: 2340, 3022, 2366, 2453, 2747, 2945, 3035,
3050.
7. Exerciții: 8 — 18.
8. Probleme propuse: 3101 — 3110.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET

1923



SPRE ȘTIINȚA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică”** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXIX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politehnică din București, **Tr. Lalescu**, Doctor în Matematici, Profesor Universitar și **I. D. Teodor**, Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Școala Politehnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice” se vor trimite D-lui **GEORGE BORNEANU**, Inginer, Directorul Fabricilor de chibrituri și timbre, București.

Se pot trimite și pe același nume în Str. Sf. Constantin 31, București.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor rediă în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela D-l Cassier *I. D. Teodor*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimisă prin poștă.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evita confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

În vederea sporirii taxelor postale, corespondenții pot trimite de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsa spații albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecință.

Nu se admite însă a se trata pe aceeași foale mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, creațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ”, trebuie să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 56, 59, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 10, 23, 38, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 94, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 43, 45, 58, 59, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 53, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 15, 16, 26, 36, 53, 56, 61, 83, 95, 3000, 05, 08, 10, 13, 19, 25, 40, 42, 45, 55, 60, 69, 70, 71, 75, 80, 84, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 98, 100, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10.

SPRE ȘTIINȚA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică”** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXIX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politehnică din București, **Tr. Lalescu**, Doctor în Matematici, Profesor Universitar și **I. D. Teodor**, Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Școala Politehnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice” se vor trimite D-lui **GEORGE BORNEANU**, Inginer, Directorul Fabricilor de chibrituri și timbre, București.

Se pot trimite și pe același nume în Str. Sf. Constantin 31, București.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor rediă în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela D-l Cassier *I. D. Teodor*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimisă prin poștă.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evita confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

În vederea sporirii taxelor postale, corespondenții pot trimite de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsa spații albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecință.

Nu se admite însă a se trata pe aceeași foale mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, creațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ”, trebuie să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 56, 59, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 10, 23, 38, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 94, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 43, 45, 58, 59, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 53, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 15, 16, 26, 36, 53, 56, 61, 83, 95, 3000, 05, 08, 10, 13, 19, 25, 40, 42, 45, 55, 60, 69, 70, 71, 75, 80, 84, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 98, 100, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10.

UNUL DIN PRIMII PROFESORI DE MATEMATICA MUNTENI:

SIMEON MARCOVICI.

Nu cunosc încă cu precizie şirul profesorilor de matematici, cari au urmat după GHEORGHE LAZĂR la «Colegiul Naţional», din Bucureşti. Este probabil că după GHEORGHE LAZĂR, ION ELIADE a continuat câtvă timp acest învăţământ, pe timpul cât n'a fost închis acest colegiu.

În anul 1827, găsim însă ca profesor pe SIMEON MARCOVICI, care a fost însărcinat în acel an, să țină discursul de deschidere la începerea cursurilor, în ziua de 15 septembrie. Pe vremea aceea, eră bunul obicei să se facă aceasta; profesorul designat se străduia să facă o expunere asupra foloaselor învăţământului şi în afară de aceste consideraţiuni generale, îşi alegea şi o «temă specială» pe care o dezvoltă cu mai multe detalii.

Am găsit discursul lui SIMEON MARCOVICI în «Biblioteca Românească» a lui CARCALECHI, din anul 1834¹⁾. Această cuvântare este interesantă din două puncte de vedere:

1^o. Ne dă câteva informaţiuni biografice asupra lui SIMEON MARCOVICI, care fusese trimis împreună cu EUFROSIN POTECA, C. MOROI şi nefericitul PANDELI să studieze «ştiinţele şi artele» în «luminata Europă».

Iată pasagiul privitor la studiile sale:

«Mai vârtos văzând că prea înaltul guvern m'a învrednicit să mă întorc în prea iubită mea patrie după o *călătorie de şapte ani* în părţile cele mai slăvite a Europei, unde ferindumă de florile veninoase, am cules, pre cât am putut, pe cele dulci şi folositoare ca să le împărtăşesc iubiţilor mei fraţi şi patrioţi după metoda şi regulile ce se orânduiesc în luminata Europă.

«În Italia, al doilea mună a ştiinţelor, făcutam literatura italiană, şi în Paris, al doilea Atenă (Αθηναι), în Paris ca fără greşală poate să se numească săvârşirea omenirii, am învăţat matematica

1) Cuvânt ce s'au zis la deschiderea Şcoalei Naţionale din Bucureşti, în 1827 septembrie 15 de D. SIMEON MARCOVICI, Profesor de Matematică în numita Şcoală. *Biblioteca Românească*. (P. III) pag. 25, anul 1834. În crăiasca tipografie a Universităţii Ungarelei.

teorică și aplecată, îndeletnicindumă cu toate acestea și la literatura franceză ca să nu pierz în zadar șirul ideilor de literatură ce cu osteneală obositoare dobândisem în Italia. Iar acum în slăvita această Școală națională..., prea cinstiții Dumnealor Boeri Efori mau orându-i să învâț matematica elementară și aplicațiile sale»¹⁾.

2^o. Tema aleasă de SIMION MARCOVICI a fost «Istoricul Matematicilor». Iată expunerea lui SIMEON MARCOVICI, care este cât se poate de interesantă, privită în cadrul epocii de atunci, în fața prea cinstiților Dumnealor Boeri Efori, cari încă nu erau dumeriți dacă știința poate fi făcută și de Românașii noștri și nu numai de «Nemți».

«Toate neamurile cele mai vechi, precum Haldeii, Egiptenii, Kinezii și Fenicienii s'au îndeletnicit la știința aceasta; foarte mulți istorici a științei sunt de părere că Haldeii fuseră aflătorii Aritmeticii și Egiptenii ai Geometriei și Algebrii; în urmă Fenicienii le luară dela dânsii și înaintară Aritmetica cu multe aflări și descoperiri folositoare, având mai cu osebire trebuință de dânsa pentru speculațiile neguțătoarești. Grecii găsind drumul bătut, făcură oarecare înaintare, însă nu după analogie cu cele alte științe; TALIS și PITAGORA învățară prin taină dela Magii Egipteni, afară de Filosofie, și Matematica cu Astronomia și le aduseră în patria lor. După dânsii PLATON și alții făcură călătoria aceasta ca prin tainile adunării cu Magii să îmbogățească patria lor cu științele Egiptului, din care cele mai multe s'au prăpădit cu arderea Bibliotecii Alexandrii, pagubă ce au pricinuit la dășăvârșirea Duhului omnesc o zăbavă, sau a zice mai bine, o întoarcere înapoi de zece veacuri. Strămoșii Romani foarte puțin s'au îndeletnicit la Matematică, fiind că starea lor cum și turbările politicești cerea neapărat ca să se sârguiască mai cu osebire la tactica ostășească și la științele politicești, mai vârtos la retorică; cu toate acestea Roma au avut bărbați foarte vestiți la toate celelalte ramuri de învățături precum SENECA și CICERON la Filosofie, TITUL-LIVIE, SALUSTIE la Istorie, ORATIE și VIRGILIE la Poeziă și alți mulți.

«Iar neamurile cele nouă au adus matematica și aplicațiile ei la cea mai înaltă săvârșire. Skiptrul Științii aceștia au fost întru întâi în mâna Italienilor prin TARTALIA, BOMBILLI, și GALILEU; apoi au trecut

1) *Istoricul matematicii* (pag. 29).

la Franțezi prin VIET, la Englezi prin NEWTON, la Nemți prin EULER și iarăși s'au întors la Franțezi prin D'ALAMBERT, LA-GRANGE și LA-PLAS unde templul ei este mai luminos și jertvitori neîncetați, și unde crez că va rămânea încă multe veacuri.»¹⁾

Aceste câteva observațiuni care luminează întru câtvă spiritul epocii lui GHEORGHE LAZĂR sunt, poate, binevenite, acum când sărbătorim pentru a doua oară, în cadrul României întregite, pe întemeetorul învățământului Național de amândouă părțile Carpaților, acel ce a deslănțuit puternica mișcare culturală care ne-a deșteptat și ne-a întărit conștiința națională.

TR. LALESCU.

ASUPRA CRONOGRAFULUI JOLY.

Principiul măsurării iuțelii unui proiectil, tras de o gură de foc, constă în determinarea timpului parcurs de proiectil între două puncte cunoscute și cât mai apropiate și dacă S ar fi distanța între acele două puncte, se înțelege lesne că iuțeala va fi dată de relația :

$$(1) \quad V = S/t,$$

t , fiind timpul măsurat. Natural că această relație ne spune că iuțeala este constantă, lucru ce nu este adevărat în cazul unui proiectil, dar punctele care determină spațiul S sunt foarte aproape, așa în cât variația iuțelii este considerată ca fiind neglijabilă.

Cronograful Joly permite măsurarea timpului t , bazat fiind pe întreruperea a doi *ruptori electrici*, plasați în dreptul punctelor unde voim a măsură iuțeala. Ruptorii sunt influențați de *unda balistică* pe care o naște proiectilul în aer, pe timpul mersului.

Se demonstrează ușor în Balistica Interioară, că unda balistică este *un con*, în vârful căruia este proiectilul, iar semi-unghiul de deschidere este :

$$(2) \quad \sin \frac{1}{2} \alpha = u/v,$$

unde u este iuțeala de propagare a sunetului.

1) Idem, pag. 29 — 30.

Detaliile măsurătoarei timpului t cu ajutorul ruptorilor electrici, fiind o chestiune de specialitate, sărim peste ea și conchidem că unda balistică atingând ruptorii pe rând, la un interval de timp t , va permite înregistrarea grafică a timpului t , iar pe S îl cunoaștem, fiind chiar depărtarea între ruptori. Ceeace trebuie să avem în vedere este că: iuțeala proiectilului, pe care voim s'o determinăm, trebuie să o bănuim că ar fi mai mare decât iuțeala sunetului, căci altfel am avea $u > v$ și deci:

$$\sin \frac{1}{2} \alpha > 1.$$

Așa dar, metoda e bună pentru guri de foc a căror iuțeală a proiectilului, în punctul unde voim a o măsură, trebuie să fie mai mare decât iuțeala de propagare a sunetului.

Problema așa cum este expusă până aci, pare simplă, totuși practica ne-a dovedit că este mult mai complicată. În adevăr, odată cu eșirea proiectilului din țeavă, deci odată cu nașterea undei balistice, se va naște o altă undă, numită *undă de gură* și aceasta datorită suflului gazelor exploziei. Această undă propagându-se diferit de unda balistică, va influența și ea ruptorii electrici și timpul înregistrat ar fi fals.

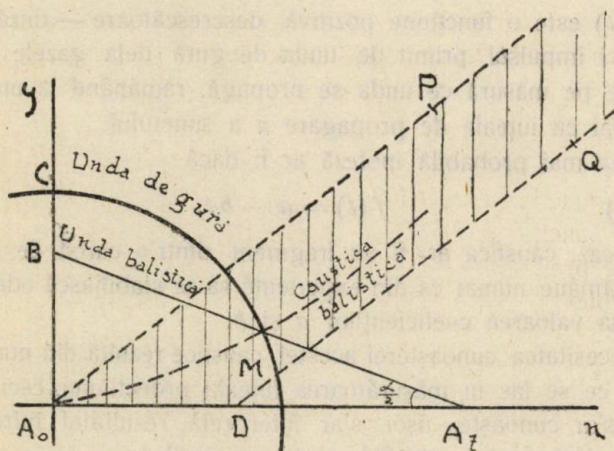
Practic, s'au găsit mijloace pentru a înlătura influența undei de gură, însă prin tatonări și deci măsurători multe. Teoretic, părăndu-mi-se că problema prezintă condițiuni propice de studiat, mi-am propus să fac aceasta, în rândurile ce urmează. Am căutat toate lucrările străine care au studiat această chestiune și negăsind asemenea studii în această direcție, îndrăsnesc a publica într'o revistă românească concluziile la care am ajuns numai pe cale teoretică.

Unda de gură, fiind născută de suflul gazelor, primind prin urmare, pe lângă iuțeala de propagare a sunetului u și un spor de viteză, pe care i-l comunică gazele exploziei la eșirea din țeavă, adică tocmai ceea ce mai sus am denumit suflul gazelor, urmează că sfera undei de gură va avea o iuțeală de propagare $U > u$, deci va devansa unda balistică. Astfel că în orice moment, unda de gură se va intersecta cu unda balistică, dând astfel naștere unei suprafețe pe care s'o numim *caustica balistică* — aceasta în analogie cu caustica ce se naște la oglinzi și lentile în optică.

Să vedem fenomenul pe cale analitică, și pentru aceasta, să presupunem drept origină a axelor coordonate punctul A_0 (figura),

adică gura țevei, locul unde iau naștere unda de gură și unda balistică. Intr'un moment oarecare t , când proiectilul se va afla în A_t , raza undei de gură va fi:

$$\overline{A_0 C} = u \cdot t,$$



iar intersecția undei de gură cu unda balistică va fi în M.

Dar unda de gură este — în plan — dreapta $A_t B$, deci va avea drept ecuație analitică :

$$(3) \quad x / \overline{A_0 A_t} + y / \overline{A_0 B} = 1,$$

cum însă :

$$\overline{A_0 A_t} = v \cdot t \text{ și } \overline{A_0 B} = \overline{A_0 A_t} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = v \cdot t \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$$

și cum din (2) $\sin \frac{1}{2} \alpha = u/v$, urmează că :

$$v = u / \sin \frac{1}{2} \alpha,$$

deci ecuația dreptei din (3) devine :

$$(4) \quad x + y / \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = u \cdot t / \sin \frac{1}{2} \alpha.$$

Ecuația undei de gură, care în secțiune plană este un cerc, va fi :

$$(5) \quad x^2 + y^2 = u^2 \cdot t^2.$$

Locul geometric al intersecției acestor două unde va fi tocmai caustica balistică ; ori, în plan, locul va fi tocmai curba trasată întrerupt, în figură. Ecuația, în plan, a causticei balistice se deduce din eliminarea lui t în ecuațiile (4) și (5).

Această eliminare însă, constituie partea cea mai subtilă a problemei, de oarece nu se cunoaște precis valoarea lui U .

Se admite însă că :

$$(6) \quad U = u + f(t),$$

unde $f(t)$ este o funcțiune pozitivă descrescătoare — tinzând către zero, căci impulsul primit de unda de gură dela gazele exploziei descrește pe măsură ce unda se propagă, rămânând la un moment dat numai cu iuțeala de propagare u a sunetului.

Cea mai probabilă ipoteză ar fi dacă :

$$(7) \quad f(t) = a - bt,$$

în care caz, caustica ar fi un fragment dintr'o curbă de gradul al 3-lea. Rămâne numai ca din experiență să se stabilizească odată pentru totdeauna valoarea coeficienților a și b .

Necesitatea cunoașterii acestei caustice rezultă din numeroasele tatonări ce se fac în măsurătoarea iuțeala proiectilului, căci dacă poziția ei s'ar cunoaște, ușor s'ar interpreta rezultatul întreruperilor electrice, fără a mai schimba poziția ruptorilor.

Pentru că experiențe nu am putut face spre a găsi valorile coeficienților a și b , am recurs la următoarea ipoteză :

Mi-am propus să determin o fâșie, în care să fie cuprinsă caustica, natural, în presupunerea că nu mă voi duce niciodată cu ruptorii la infinit, departe de gura de foc, spre a măsura iuțeala proiectilului, deci această fâșie va cuprinde curba până la o anumită depărtare, nefiind vorba de asimptote. Astfel mi-am propus să stabilesc poziția fâșiei hașurate din figură.

a) Presupun că $U = u$ și atunci curba caustică devine o dreaptă a cărei ecuație este :

$$(8) \quad y = x \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha/2),$$

adică tocmai dreapta A_0P , deci am presupus că $f(t) = 0$.

b) Să presupunem acum că

$$f(t) = Ct = A_0D,$$

adică, unda de gură, în loc să ia naștere în A_0 , va lua naștere în D , cu alte cuvinte va devansa, în direcția suflului gazelor, unda balistică cu cantitatea A_0D .

Prin considerațiunile cantităților de mișcare, dezvoltate de

gaze la gura țevei, față de proiectil și față de aerul înconjurător, am dedus — aproximativ — că :

$$A_0 D = v_0 \sqrt{H/P},$$

H fiind presiunea atmosferică, P greutatea proiectilului și v_0 viteza inițială a proiectilului. Dacă notăm $K = \sqrt{H/P}$ și calculând diferite valori pentru P, variind între 4 și 100 km, găsim K variabil între $1/2$ și $1/10$. Cunoșcând astfel pe $A_0 D$, ecuația dreptei D.Q, va fi :

$$(9) \quad y = (x - K \cdot v_0) \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha/2).$$

Astfel cunoaștem *fâșia caustică*, pe care, dacă o evităm atunci când așezăm ruptorii electrici, putem interpreta ușor și exact rezultatul fără a mai face tatonări.

Observațiune. Am considerat mai sus că unda de gură se propagă după o sferă. Dacă am căutat însă să fim și mai riguroși, am conchide ușor că în realitate unda de gură, datorită suflului gazelor care se face numai într'o direcțiune, se deformează în sensul mersului proiectilului, în direcția de acțiune a gazelor, fiind mai lesne comparabilă cu un elipsoid, a cărei ecuație în spațiu ar fi :

$$(10) \quad x^2/a + y^2/b + z^2/c = 1,$$

unde

$$a = u_1 \cdot t, \text{ iar}$$

$$b = c = u_2 \cdot t,$$

iar $u_1 > u_2$, căci u_1 este viteza de propagare în direcția acțiunii gazelor. În plan ecuația ar fi numai :

$$(11) \quad x^2/a + y^2/b = 1,$$

care ar înlocui ecuația 5 de mai sus.

Problema, deși pare prea complicată față de practică, totuși s'ar putea ușor studia. Neintrevăzând însă posibilitățile unei completări a studiului prin experiențe, mă opresc aci.

LOCOT. I. LINTEȘ.

NOTE MATEMATICE.

6. *Alte zece algebre diverse* (A se vedeă nota 49 pag. 285 Vol. XXXVI).

21. *Absolută.*

E. Schröder. — Die formalen Elemente der absoluten Algebra. Baden 1874.

22. *Dublă.*

A. D. Morgan. — Trigonometry and double algebra. 1849.

23. **Grafică.** *H. S. Hall.*— Short iutroduction to graphical algebra 1907.
24. **Inaintată.** *W. C. Brenke.*—Adwanced algebra. New-York 1917.
25. **Lineară.** *L. E. Dickson.*— Linear algebras. Cambridge 1914.
26. **Practică.** *J. V. Collius.*— Practical algebra 1912.
27. **Simplificată.** *Bouvier-Lapierre.*— Algèbre simplifiée. Paris.
28. **Studentească.** *I. W. Collenso.*— Student's algebra. 1878.
29. **Universală.** *A. N. Whitehead.*— A treatise on universal algebra. Cambridge.
30. **Vectorială.** *L. Silberstein.*— Elements of vector algebra. London 1919.

(Va urmă)

I. IONESCU.

7. *O problemă.* In cele ce urmează, îmi propui să studiez următoarea problemă:

„Există numere de forma A^m al căror indicator să fie de forma B^n ?”.

Fie $A = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \dots$, deci :

$$\varphi(A^m) = a^{m\alpha-1} \cdot b^{m\beta-1} \dots (a-1)(b-1) \dots$$

Pentru ca $\varphi(A^m)$ să fie de forma B^n , ar trebui să avem :

$$m\alpha - 1 = k_1 \cdot n$$

$$m\beta - 1 = k_2 \cdot n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

iar numerele $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$, ... să fie puteri ale lui n . Dar, în acest caz, avem :

$$A^m = (x^n + 1)^{k_1 n + 1} \cdot (y^n + 1)^{k_2 n + 1} \dots,$$

unde $(x^n + 1)$, $(y^n + 1)$, ..., trebuesc să fie prime ; iar :

$$B^n = (x^n + 1)^{k_1 \cdot n} \cdot (y^n + 1)^{k_2 \cdot n} \dots x^n \cdot y^n \dots$$

Deci numerele A și B vor fi:

$$A = (x^n + 1)^{\frac{k_1 n + 1}{m}} \cdot (y^n + 1)^{\frac{k_2 n + 1}{m}} \dots$$

$$B = x \cdot y \dots (x^n + 1)^{k_1} \cdot (y^n + 1)^{k_2} \dots$$

unde — reamintesc — trebuie să avem:

$$(k_1 \cdot n + 1)/m = \alpha, \quad (k_2 \cdot n + 1)/m = \beta, \dots$$

Deasemenea, pentru ca numerele $(x^n + 1)$, $(y^n + 1)$, etc.... să fie prime, trebuie ca n să fie de forma 2^r și nici numerele x , y , etc.... să fie puteri impare, căci altfel avem:

$$\lambda^{2^t+1} + 1 = \mathcal{M} (\lambda + 1),$$

oricare ar fi λ . Apoi x , y , etc.... trebuiesc să fie pare, sau cel mult unul singur să fie egal cu 1.

Numărul n poate fi oarecare, numai atunci când A are un singur factor 2, adică $n = 1$, și nu mai are alt factor prim.

În aceste condițiuni, putem avea soluțiunile:

I. Pentru $n = 2^r$,

$$A^m = 2^{2^r \cdot k_1 + 1} \cdot [(2 p_1)^{2^r} + 1]^{2^r \cdot k_2 + 1} \dots$$

unde:

$$2^r \cdot k_1 + 1 = m \alpha$$

$$2^r \cdot k_2 + 1 = m \beta$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

II. Pentru n oarecare, avem

$$A^m = 2^{n \cdot k_1 + 1},$$

unde

$$n \cdot k_1 + 1 = m \alpha.$$

Deci, putem deduce că: *problema are soluțiuni.*

Dar mai putem adăoga că:

O putere oarecare a unui număr dat poate avea ca indicator o altă putere a unui alt număr, numai când numărul dat este o putere a lui 2; contrar, numărul dat nu va avea ca indicator decât o putere de forma 2^{n-a} a unui alt număr.

Exemple :

$$A = 2^3 \cdot 17 ; \varphi(A^3) = (12^6 \cdot 17)^2$$

$$A = 2^2, \varphi(A^5) = 2^9 = (2^3)^3$$

CĂPITAN I. LINTEȘ.

8. Asupra sumei puterilor asemenea ale termenilor unei progresiuni aritmetice.

Metoda prin care D-l I. IONESCU calculează în Nota 20 suma patratelor primelor n numere și pe care eu am aplicat-o în nota 95 pentru o putere oarecare k , se poate întrebuiți și pentru aflarea sumei puterilor asemenea ale primilor n termeni ai unei progresiuni aritmetice, de rație r .

În adevăr, dacă notăm cu u_n termenul general al progresiei, să determinăm polinoamele de grad m , N_i , astfel ca :

$$u_n^k = N_{n+1} - N_n,$$

în care :

$$N_n = a_0 u_n^m + a_1 u_n^{m+1} + \dots$$

Găsim, ținând seama de relația :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$m = k + 1$ și apoi :

$$u_n^k = \sum_0^n a_i [C_{k+1-i}^1 u_n^{k-i} r + C_{k+1-i}^2 u_n^{k-i-1} r^2 + \dots].$$

Egalând coeficienții puterilor asemenea, vom obține pentru determinarea coeficienților $a_0, a_1, \dots$ următorul sistem de ecuații :

$$a_0 r C_{k+1}^1 = 1,$$

$$a_0 r C_{k+1}^2 + a_1 C_k^1 = 0,$$

$$a_0 r^2 C_{k+1}^3 + a_1 r C_k^2 + a_2 C_{k-1}^1 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

Insemnând apoi prin S_k suma puterilor k ale termenilor progresiei, vom avea :

$$S_k = \sum_1^n u_i^k = N_{n+1} - N_1 = [a_0 u_{n+1}^{k+1} + a_1 u_{n+1}^k + a_2 u_{n+1}^{k-1} + \dots] - [a_0 u_1^{k+1} + a_1 u_1^k + \dots].$$

Aplicații. 1) $k=1$. Găsim $a_0 = \frac{1}{2}r$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, deci:

$$N_{n+1} = \frac{1}{2r} [u_{n+1} - r] u_{n+1} = \frac{1}{2r} u_n u_{n+1}$$

$$N_1 = \frac{1}{2r} [u_1 - r] u_1$$

$$S_1 = \frac{1}{2r} [u_{n+1}^2 - u_1^2 - r(u_{n+1} - u_1)] = \frac{1}{2r} (u_{n+1} - u_1) [u_{n+1} + u_1 - r]$$

și de oarece:

$$u_{n+1} = u_1 + nr,$$

rezultă:

$$S_1 = \frac{1}{2r} nr [2u_1 + (n-1)r] = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)r].$$

M. GHERMĂNESCU.

9. *Asupra problemei 2595*. Această problemă se poate extinde și în spațiu, în modul următor:

În vârfurile unui *tetraedru* ABCD punem greutatea $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ în toate modurile posibile. Cele 24 de *baricentre* astfel obținute sunt pe o aceeași *cuadrică*.

În adevăr, să considerăm familia de quadrice:

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + \lambda(xy + xz + xt + yz + yt + zt) = 0$$

și să determinăm pe λ astfel încât quadrica, a cărei ecuație e obținută, să treacă prin punctul $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Avem:

$$(2) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \lambda(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) = 0.$$

Eliminând pe λ între (1) și (2), ecuațiunea quadricii devine:

$$(3) \quad (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) - (xy + xz + xt + yz + yt + zt)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = 0,$$

care este, evident, verificată de coordonatele celor 24 de baricentre (căci $P_4 = 1.2.3.4 = 24$).

E de observat că dacă greutatea (massa) α o păstrăm într'un același vârf A, iar pe celelalte greutăți β, γ, δ le punem în vârfurile B, C și D, în toate modurile posibile, cele 6 baricentre sunt în același plan paralel cu planul BCD și situate pe aceeași conică.

În adevăr, tăind cuadrica (3) cu planul $x = \alpha$ (baricentrice absolute) obținem conica:

$$(a^2 + y^2 + z^2 + t^2) (\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) - [\alpha(y+z+t) + yz + yt + zt] (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = 0,$$

unde $y + z + t = S - \alpha = Ct.$

Ecuatiunea acestei conice este, evident, verificată de coordonatele celor 6 baricentre.

IOAN M. ȘERBĂNESCU.

10. *Asupra condițiilor de compatibilitate ale unui sistem liniar de ecuații:*

Să considerăm următorul sistem liniar de n ecuații cu n necunoscute:

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

și să presupunem că determinantul principal este de ordinul p , pe care totdeauna îl putem scrie:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Se știe că, în aceste condițiuni, pentru ca sistemul (1) să fie posibil, este necesar și suficient ca toți determinanții caracteristici să fie nuli, adică

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} & b_p \\ a_{p+\alpha,1} & \dots & a_{p+\alpha,p} & b_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-p.$$

Aceste condițiuni pot fi grupate sub o formă analitică, care poate fi utilă în aplicațiuni teoretice și mai ales că așa se întâlnește când se consideră un sistem liniar cu o infinitate de necunoscute, corespunzător de exemplu ecuației integrale a lui FREDHOLM.

Să considerăm, pentru aceasta, sistemul *asociat* și omogen sistemului (1), adică sistemul următor:

$$(3) \quad a_{1i} y_1 + a_{2i} y_2 + \dots + a_{ni} y_n = 0. \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Fie $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$

soluția acestui sistem, al cărui determinant principal este evident tot δ .

Rezolvind sistemul (2), avem,

$$\delta y_i^0 = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{p+c+1} \alpha = n-p} \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{i-1,1} & a_{i+1,1} \dots & a_{p1} & a_{p+a,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1p} \dots a_{i-1,p} & a_{i+1,p} \dots & a_{pp} & a_{p+a,p} \end{vmatrix}$$

Pe de altă parte, dacă se dezvoltă determinantul (2) după ultima coloană, se obține :

$$\delta b_{p+\alpha} + \sum_{i=1}^{i=p} (-1)^{p+i+1} b_i \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{i-1,1} & a_{i+1,1} \dots & a_{p1} & a_{p+a,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1p} \dots a_{i-1,p} & a_{i+1,p} \dots & a_{pp} & a_{p+\alpha,p} \end{vmatrix} = 0$$

Inmulțind acesta prin $y_{p+\alpha}^0$ și făcând suma tuturor acestor relațiuni, pentru care α ia toate valorile dela 1 la $(n-p)$, avem :

$$\sum_1^{n-p} b_{p+\alpha} y_{p+\alpha}^0 + \sum_{i=p}^p b_i y_{p+\alpha}^0 = 0.$$

Sau încă

$$(4) \quad \sum_1^n b_i y_i^0 = 0.$$

Invers, dela (3) se ajunge la (2).

Deci (3) exprimă condiția necesară și suficientă pentru ca sistemul (1) să fie compatibil. Sub această formă, în loc de determinanții caracteristici, intervine soluția generală a sistemului omogen și asociat sistemului dat. Regula poate fi ușor exprimată și reținută.

Dacă acum, am avea mai multe necunoscute decât ecuații, condiția (3) rămâne sub aceeași formă, căci se pot introduce cantități b_i nule atâtea cât este nevoie ca să egalăm numărul necunoscutelor cu al cantităților b_i .

Dacă din contra, numărul ecuațiilor întrece pe al necunoscutelor, (3) păstrează mereu aceeași formă introducând necunoscute arbitrare, pentru a avea atâtea necunoscute câte ecuații.

Cu aceste observațiuni, condiția (3) este absolut generală.

Când se consideră o ecuație integrală cu un nucleu *Goursat*, trebuie scrisă condiția de compatibilitate a sistemului liniar sub forma (3), pentru a exprima condiția de compatibilitate a ecuației integrale¹⁾.

TH. ANGHELUȚĂ.

1) TR. LALESCU. Théorie des équations intégrales pag. 49.
G. VIVANTI. Equazioni integrali lineari pag. 176.

11. *Asupra problemei 2871 G. M., XXVII.* Acestei probleme i se poate da o mai mare extindere.

Fie suma

$$S_n = A_1 x_1 + 2A_2 x_1 x_2 + 3A_3 x_1 x_2 x_3 + \dots + n A_n x_1 x_2 x_3 \dots x_n,$$

al cărei minim voim să-l aflăm, știind că variabilele $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sunt pozitive, $A_1, 2A_2, 3A_3, \dots, nA_n$ cantități numerice cunoscute și ținând seama de valoarea produsului

$$x_1^\alpha x_2^{\alpha-1} x_3^{\alpha-2} \dots x_n^{\alpha-n+1} = a = Ct, \quad (1)$$

unde

$$\alpha = n(n+1)/2.$$

Putem descompune suma astfel:

$$\begin{aligned} S_n = & A_1 x_1 + A_2 x_1 x_2 + A_3 x_1 x_2 x_3 + \dots + A_n x_1 x_2 x_3 \dots x_n \\ & + A_2 x_1 x_2 + A_3 x_1 x_2 x_3 + \dots + A_n x_1 x_2 x_3 \dots x_n \\ & + A_3 x_1 x_2 x_3 + \dots + A_n x_1 x_2 x_3 \dots x_n \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Produsul acestor termeni fiind

$$A_1 A_2^2 A_3^3 \dots A_n^n x_1^\alpha x_2^{\alpha-1} x_3^{\alpha-2} \dots x_n^{\alpha-n+1} = A_1 A_2^2 A_3^3 \dots A_n^n a,$$

deci constant, minimul sumei va avea loc, când termenii ei vor fi egali, adică

$$A_1 x_1 = A_2 x_1 x_2 = A_3 x_1 x_2 x_3 = \dots = A_n x_1 x_2 x_3 \dots x_n.$$

De unde:

$$x_2 = A_1/A_2, \quad x_3 = A_2/A_3, \dots, x_n = A_{n-1}/A_n.$$

Inlocuind aceste valori în (1) și făcând simplificări, obținem

$$x_1^\alpha = a A_1 A_2^2 A_3^3 \dots A_n^n / A_1^\alpha,$$

$$x_1 = \sqrt[\alpha]{a A_1 A_2^2 A_3^3 \dots A_n^n / A_1}.$$

Având în vedere că numărul termenilor sumei descompuse este

$$n(n+1)/2 = \alpha,$$

minimul va fi

$$S_n = \alpha \sqrt[\alpha]{a A_1 A_2^2 A_3^3 \dots A_n^n}.$$

I. AL. STOENESCU.

12. Generalizarea unor serii. Să considerăm seria

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \{ \alpha + [\beta + (a-1)h]r \}^n}{(\alpha + \beta r) [\alpha + (\beta + h)r] \dots [\alpha + [\beta + (n+a-1)h]r]}$$

unde α, β, h, r sunt pozitivi, iar a întreg și pozitiv.

Pentru convergență, aplicăm teorema lui D'ALEMBERT și obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = 0.$$

Pentru însumare, observăm că putem scrie :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{hr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{ \alpha + [\beta + (n+a-1)h]r - [\alpha + \beta + (a-1)h]r \} \{ \alpha + [\beta + (a-1)h]r \}^n}{(\alpha + \beta r) [\alpha + (\beta + h)r] \dots [\alpha + [\beta + (n+a-1)h]r]} \\ &= \frac{1}{hr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{ \alpha + [\beta + (a-1)h]r \}^n}{(\alpha + \beta r) [\alpha + (\beta + h)r] \dots [\alpha + [\beta + (n+a-2)h]r]} \\ &\quad - \frac{1}{hr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{ \alpha + [\beta + (a-1)h]r \}^{n+1}}{(\alpha + \beta r) [\alpha + (\beta + h)r] \dots [\alpha + [\beta + (n+a-1)h]r]} \\ &= \frac{1}{hr} \cdot \frac{1}{(\alpha + \beta r) [\alpha + (\beta + h)r] \dots [\alpha + [\beta + (a-2)h]r]}, \end{aligned}$$

căci seriile din membrul al doilea sunt convergente, iar termenii se reduc doi câte doi, începând cu al doilea din prima serie și cu întâiul dintr'a doua.

Se pot obține diferite serii dând valori numerice lui α, β, h, r și a .

În particular, pentru $\alpha = 0, \beta = h = r = 1$, regăsim seria care face obiectul Notei No. 31 din «Gazeta Matematică» vol. XVIII și care generalizează în parte problema 25 cap. XXXI din «Culegere de Probleme, Algebra ed. II».

2) Fie seriile :

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(a + ir) [a + (i + h)r] \dots [a + (i + mh)r]},$$

$$S = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{(a+ir)[a+(i+h)r] \dots [a+[i+(m-1)h]r]},$$

unde a, r sunt pozitivi, iar h și m întregi și pozitivi.

Avem :

$$\begin{aligned} S' - S &= \sum_{i=0}^{i=\infty} \left[\frac{1}{a(+ir) \dots [a+[i+(m-1)h]r]} - \frac{1}{(a+ir) \dots [a+(i+mh)r]} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{a+(i+mh)r-1}{(a+ir)[a+(i+h)r] \dots [a+(i+mh)r]} \\ &= \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{[a+(i+h)r][a+(i+2h)r] \dots [a+(i+mh)r]} + (mhr-1)S \\ &= S' - \sum_{i=0}^{i=h-1} \frac{1}{(a+ir)[a+(i+h)r] \dots [a+[i+(m-1)h]r]} + (mhr-1)S, \\ S &= \frac{1}{mhr} \sum_{i=0}^{i=h-1} \frac{1}{(a+ir)[a+(i+h)r] \dots [a+[i+(m-1)h]r]}. \end{aligned}$$

Făcând $h=1$, obținem formula dată în Nota No. 3 din «Gazeta Matematică» vol. XXIII, formulă care la rândul-i generalizează seriile din Nota No. 32 din «Gazeta Matematică» vol. XVIII.

În fine, pentru $a=0, r=1$, obținem seria studiată în Nota No. 7 din «Gazeta Matematică» vol. XVIII, care și ea generalizează o altă familie de serii din «Culegere de Probleme».

G. D. POPESCU.

Elev Școala Politehnică.

13. Asupra generalizării unei chestiuni dela Concursul G. M.

La concursul G. M. din acest an, printre chestiunile de Algebră era și următoarea :

Să se găsiască limita expresiunii

$$y = \left[\frac{1 - \sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}} \right]^n,$$

pentru n infinit.

Să considerăm expresiunea mai generală :

$$y = \left[\frac{F(n) + F_1(n) \sin \frac{m}{F_2(n)}}{F(n) - F_1(n) \sin \frac{m}{F_2(n)}} \right]^{F_3(n)}$$

și să-i găsim limita pentru n infinit. $F(n)$, $F_1(n)$, $F_2(n)$ și $F_3(n)$ sunt polinoame de acelaș grad p , prin raport cu n și coeficienții termenului în n^p sunt respectiv, A , A_1 , A_2 , A_3 , iar m este constant.

Putem scrie

$$y = \left[1 + \frac{2 \sin \frac{m}{F_2(n)}}{\frac{F(n)}{F_1(n)} - \sin \frac{m}{F_2(n)}} \right]^{F_3(n)},$$

expresiune care, pentru n infinit, se prezintă sub forma 1^∞ .

Totul revine a găsi limita expresiunii :

$$\frac{2 \sin \frac{m}{F_2(n)}}{\frac{F(n)}{F_1(n)} - \sin \frac{m}{F_2(n)}} \cdot F_3(n),$$

sau a expresiunii $2 \frac{A_1}{A} F_3(n) \sin \frac{m}{F_2(n)}$,

cece revine la a calculă limita cantității $2m \frac{A_1}{A} \frac{F_3(n)}{F_2(n)}$.

Limita aceasta este $2mA_1A_3/AA_2$.

Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} y = e$.

I. STOENESCU.

BIBLIOGRAFIE.

Facultatea de Științe a Universității Masaryk din Brno ne-a trimis următoarele broșuri scrise în limba cehă, cu rezumat în limba franceză:

a) Dr. VACLAV HLAVATY. Varietăți cu două dimensiuni în spațiul cu patru dimensiuni.

b) OTACAR BORUVKA. Asupra rădăcinilor imaginare ale ecuației $\Gamma(z)=a$.

c) Dr. J. KAUCKY. Contribuțiuni la teoria ecuațiilor cu diferențe finite.

d) T. FREJKA & F. BALAS. Contribuțiuni la studiul constituirii acidului abietic.

Broșurile următoare în limba franceză:

a) EDUARD CECI. *Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine*.

b) B. HOSTINSKY. *L'équilibre de l'électricité sur une surface cylindrique*.

Anales de la Sociedad científica Argentina. Volumul XCV. No. 1—6 Ianuarie—Iunie 1923. Buenos-Aires. Îndeșirea infinitesimală de JAIME MULHALL.

Revista matematică din Timișoara. Anul III No. 7 Septembrie 1923. Timișoara. Zona sferică, de FILIP POP. Insumări trigonometrice, de I. STOENESCU.

Revista de matematicas y fisicas elementales. Anul V No. 4. August 1923. Buenos Aires. Ecuațiile punctului, drepte și planului de B. IG. BAIDAFF. „*Multiplcatorul Perfettus*” de J. BABINI.

AD. MINEUR. *Cubiques anallagmatiques*. Bruxelles 1923.

C E R E R I.

105. Dr. C. ISTRATI afirmă că BACALOGLU a fost primul român care a scris articole de matematică, în reviste străine. Nu se cunosc alte publicațiuni anterioare?

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2340. *Să se găsiască cuburile perfecte a căror rădăcină cubică să fie numărul format de ultimele lor două cifre.*

O. ORĂNESCU.

PROBLEMA 3022. *Care sunt numerele de două cifre al căror cub se termină cu acele numere.*

S. KATZ.

Soluție dată de D-l M. ADAM (Elev Liceul Constanța). Problemele au fost rezolvate cu ocazia rezolvării problemei 1609 (G. M. vol. XVI pag. 192).

În definitiv, soluțiile sunt :

a) Pentru numerele de două cifre :

24, 25, 49, 51, 75, 76, 99.

b) Pentru numerele de trei cifre :

125, 249, 251, 375, 376, 499, 501, 624, 625, 749, 751, 875, 999.

c) Pentru numerele de patru cifre :

1249, 3751, 4375, 4999, 5001, 5625, 6249, 8751, 9375, 9376, 9999.

Notă. 1. Au trimis soluții la ambele probleme odată, D-nii : N. ARCADIAN, M. BOGDAN, A. BUȘILĂ, Tr. DORDEA, C. I. GEORGESCU, D. și W. SOLOMON.

2. Au trimis soluții la problema 3022 : D-ra E. LĂZĂRESCU și D-nii : M. ADAM, A. ABRAMOVICI, E. BALLAN, B. M. BARBĂLATT, E. BERCOVICI, V. CAZACINCUI, I. COȘEREANU, DOBRESCU-BĂBICI, I. DRAGOMIR M. DUMITRESCU, SAVU NAE DUMITRESCU, ȘT. GEORGESCU-GORJAN, S. GOROVEI, V. GHIȚESCU, D. ILIESCU, EM. ILIESCU, I. P. ILIESCU, P. KATZ, I. LĂZĂRESCU, ȘT. MĂCRINEANU, D. MĂRU, G. MATESCU, F. MĂRCUS, C. MENCIU, A. PANAITESCU, H. PETREANU, F. RABINOVICI, E. ȘTEFĂNESCU, S. SOLACOLU, GH. STROESCU, D. SOLOMON, A. TAUBER, I. TEODORESCU, O. VLAD, L. și S. WEISS și A. ZAMFIRESCU.

3. A dat indicațiile din soluția D-lui M. ADAM, trimițând și problema 2776, D-l D. BLUMENFELD.

4. Nu vrem să punem la îndoială buna credință a autorului problemei 3022. Sfătuim însă pe corespondenții noștri de a fi mai atenți la propunerea problemelor.

5. Comparând între ele câteva din soluțiile indicate, se găsesc pentru numerele căutate câteva formule generale, dintre care menționez :

$$5 \cdot 10^n \pm 1 ; 10^n - 1.$$

Ar fi interesant de stabilit formule generale pentru toate cazurile posibile.

G. M.

PROBLEMA 2366. Se dau coordonatele carteziane ale vârfurilor unui patrulater ABCD. Să se găsiască condiția pe care trebuie să o îndeplinească coordonatele, pentru ca patrulaterul ABCD să fie convex.

I. IONESCU.

Soluție dată de D-nii: P. IONESCU și J. SILBERMAN.

Fie A (x_1, y_1); B (x_2, y_2); C (x_3, y_3); D (x_4, y_4) cele patru vârfuri cu coordonatele lor. Ecuatiile diagonalelor AC, BD sunt:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Patrulaterul ABCD este convex dacă A și C sunt de o parte și de alta a diagonalei BD și dacă B și D sunt de o parte și de alta a diagonalei AC. Deci înlocuind în ecuația a doua x și y pe rând cu x_1, y_1 și x_3, y_3 , va trebui să avem rezultate de semne contrare, iar înlocuind în prima pe x, y cu x_2, y_2 și x_3, y_3 , să avem iarăși rezultate de semne contrare. Produsul acelor rezultate va trebui dar să fie negativ. De aci condițiunile:

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_4 & y_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} < 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} < 0.$$

sau schimbând liniile între ele, spre a pune indicii în ordine, avem:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

D-nii M. HANGAN, A. TRIANDAF, N. TUHAI au scris că două vârfuri consecutive sunt de aceeași parte a unei laturi a patrulaterului.

PROBLEMA 2453. Se consideră n cărți $a_1, a_2, \dots, a_n$. Se împart în $(2k+1)$ grupe de câte r și se alege una din cărți. Se strâng grupele unul peste altul așa încât cartea aleasă să fie în grupul din mijloc. Această operație se face de trei ori. Cartea aleasă va fi $a \left(\frac{n}{2} + 1\right)^a$ sau $a \left(\frac{n+1}{2}\right)^a$ în pachetul final. (Enunț generalizat).

M. GHERMĂNESCU și GH. NICULESCU.

Pentru rezolvare, vom deosebi două cazuri, după cum n este par sau impar.

$n = \text{par}$. În acest caz:

$$n = 2p(2k+1).$$

Fie a_x cartea aleasă și m rangul său în grupul respectiv, socotit de dedesupt. Strângând grupurile, deasupra cărții a_x vor fi:

$$2pk + 2p - m = (2k+1)p + p - m$$

cărți. Este locul acum, să facem alte două ipoteze:

1) $m < p$. În acest caz, așezând din nou cărțile, în grupul respectiv, cartea a_x va ocupa rangul $(p+1)$. Deci, strângându-le, deasupra sa vor fi:

$$2kp + 2p - p - 1 = (2k+1)p - 1$$

cărți. Împărțindu-le din nou, cartea a_x va fi a p^a în ultimul grup. Strângându-le din nou, deasupra cărții a_x vor fi:

$$2kp + 2p - p = (2k+1)p = \frac{1}{2}n.$$

Cartea a_x va fi deci a $\left(\frac{1}{2}n + 1\right)^a$ în pachetul final.

2) Dacă $p < m$, atunci după a doua așezare cartea a_x va fi

a p^a în grupul respectiv și deci, după strângerea lor, va avea deasupra :

$$2kp + 2p - p = (2k + 1)p$$

cărți.

La a treia așezare, ea va fi a $(p + 1)^a$ în grupul său, iar în pachetul final va avea deasupra :

$$2kp + 2p - p - 1 = (2k + 1)p - 1 = \frac{1}{2}n - 1$$

cărți. Cartea a_x va fi deci a $(\frac{1}{2}n)^a$ în pachetul final.

$n = \text{impar}$. În acest caz :

$$n = (2k + 1)(2p + 1).$$

După prima operație, în pachetul obținut, sunt deasupra cărții a_x :

$$k(2p + 1) + 2p + 1 - m = (2k + 1)p + p + k + 1 - m.$$

1) Dacă : $p + k + 1 - m < 2k + 1$,

la a doua așezare, cartea a_x va ocupa locul $(p + 1)$ în grupul său, iar în pachet va avea deasupra :

$$k(2p + 1) + 2p + 1 - p - 1 = (2k + 1)p + k$$

cărți.

La a treia așezare, a_x va ocupa în grupul respectiv locul $(p + 1)$, iar deasupra va avea în pachetul final :

$$k(2p + 1) + 2p + 1 - p - 1 = (2k + 1)p + k = (n - 1)/2.$$

Cartea a_x va fi deci a $\left(\frac{n + 1}{2}\right)^a$ în pachetul final.

2) Dacă $p + k + 1 - m > 2k + 1$,

atunci la a doua așezare, cartea a_x va ocupa locul $(p + 2)$ în grupul său, iar în pachet, va avea deasupra :

$$k(2p + 1) + 2p + 1 - p - 2 = (2k + 1)p + k - 1$$

cărți. La a treia așezare, va ocupa locul $(p + 1)$ în grupul său, iar în pachetul final, va avea deasupra :

$$k(2p + 1) + p = (2k + 1)p + k$$

cărți, deci va fi iarăși a $\left(\frac{k + 1}{2}\right)^a$ în pachetul final,

Notă. La această problemă, propusă încă din 1916, nu s'a primit decât în ultimul timp, o soluție incompletă și care se referă la cazul n par, dela D-ra E. LĂZĂRESCU.

Problema este o generalizare a unui cunoscut joc de cărți, de pe urma căruia mulți își atrag renumele de *ghicitori*. Cum se vede, această *scamatorie* are un substrat matematic, pe care cei ce au practicat-o, cu siguranță că nu l'au bănuț.

M. G.

PROBLEMA 2747. *Un tun trage în vid două proiectile cu înclinările α_1 și α_2 . Să se studieze variațiunea suprafeței cuprinsă între cele două traectorii, știind că:*

$$\alpha_1 + \alpha_2 = k. \quad (k, \text{ constant}).$$

Aplicație pentru $k = 90^\circ$.

CAPITAN I. LINTES.

Ecuatiile, în vid, a două proiectile trase cu unghiurile α_1 și $k - \alpha_1$ sunt:

$$1) \quad y_1 = x \operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1)$$

$$2) \quad y_2 = x \operatorname{tg} (k - \alpha_1) - \frac{gx^2}{2v_0^2} [1 + \operatorname{tg}^2 (k - \alpha_1)].$$

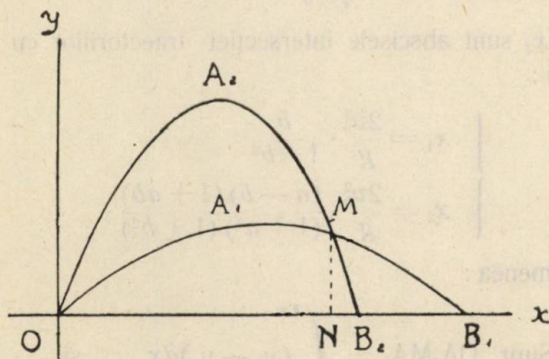
Dar, notând pentru simplificare:

$$\operatorname{tg} k = a \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = b,$$

avem:

$$3) \quad y_1 = xb - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + b^2),$$

$$4) \quad y_2 = x \cdot \frac{a-b}{1+ab} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \left[1 + \left(\frac{a-b}{1+ab} \right)^2 \right].$$



Suprafața cuprinsă între aceste două traectorii va fi numai aceea din cadranul xOy , altfel problema devine nedeterminată.

Dar traectoriile intersectându-se într'un punct oarecare M (vezi figura), ale cărui coordonate se deduc din ecuațiile 3) și 4), privite ca un sistem de două ecuații cu două necunoscute și care, rezolvate, ne dau pentru coordonatele lui M, valorile :

$$5) \quad \begin{cases} m = \frac{rv_0^2}{g} \cdot \frac{1+ab}{a(1+b^2)} \\ x = -\frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{1+ab}{a^2(1+b^2)} \end{cases}$$

De aici, vedem că dacă $x > 0$, atunci M este sub axa Ox, iar dacă $x < 0$, M este deasupra axei Ox (cazul figurei). Însă, $x > 0$, când $k > 90^\circ$, căci în acest caz, $\operatorname{tg} k < 0$; iar $x < 0$, când $k < 90^\circ$, adică $\operatorname{tg} k > 0$.

Dacă M este sub axa Ox, atunci aria suprafeței cuprinsă între cele două traectorii va fi :

$$6) \quad A = \text{Supr. } OA_2B_2 - \text{Supr. } OA_1B_1, \text{ când } \alpha_2 > \alpha_1.$$

Dacă M este deasupra axei Ox (cazul figurei), atunci :

$$7) \quad A = \text{Supr. } OA_2MA_1 + \text{Supr. } MB_1B_2.$$

Dar :

$$\text{Supr. } OA_2B_2 = \int_0^{x_2} y_2 dx \quad \text{și}$$

$$\text{Supr. } OA_1B_1 = \int_0^{x_1} y_1 dx,$$

unde x_1 și x_2 sunt abscisele intersecției traectoriilor cu axa Ox și au ca valori :

$$8) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{b}{1+b^2} \\ x_2 = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{(a-b)(1+ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \end{cases}$$

Deasemenea :

$$\text{Supr. } OA_2MA_1 = \int_0^m (y_2 - y_1) dx \quad \text{și}$$

$$\text{Supr. MB}_1\text{B}_2 = \int_m^{x_1} y_1 dx - \int_m^{x_2} y_2 dx.$$

Pentru o mai ușoară integrare însă, observăm că :

$$\int_m^{x_1} y_1 dx = \int_0^{x_1} y_1 dx - \int_0^m y_1 dx \quad \text{și}$$

$$\int_m^{x_2} y_2 dx = \int_0^{x_2} y_2 dx - \int_0^m y_2 dx.$$

Cu acestea, expresiunea 6) se mai poate scrie :

$$9) \quad A = \int_0^{x_2} y_2 dx - \int_0^{x_1} y_1 dx,$$

iar expresiunea 7) :

$$10) \quad A = 2 \int_0^m (y_2 - y_1) dx + \int_0^{x_1} y_1 dx - \int_0^{x_2} y_2 dx.$$

Se observă lesne că din 10) se poate deduce 9), deoarece $m=0$ și deci prima integrală se anulează, iar celelalte două schimbă de semn.

Calculând integralele, găsim :

$$\int_0^{x_1} y_1 dx = \frac{2v_0^4}{3g^2} \cdot \frac{b^3}{(1+b^2)^2},$$

$$\int_0^{x_2} y_2 dx = \frac{2v_0^4}{3g^2} \cdot \frac{(a-b)^3(1+ab)}{(1+a^2)^2(1+b^2)^2},$$

$$\int_0^m (y_2 - y_1) dx = \frac{2v_0^4}{3g^2} \cdot \frac{(1+ab)(a-2b-ab^2)}{a^2(1+b^2)^2}.$$

Pentru cazul când $k < 90^\circ$, avem :

$$11) \quad A = \frac{2v_0^4}{3g^2} \cdot \frac{1}{(1+b^2)^2} \left[\frac{(a-b)^3(1+ab)}{(1+a^2)^2} - b^3 \right].$$

Maximum lui A din 11) depinde de maximum integralei :

$$\int_0^{x_2} y_2 dx$$

și de minimum integralei :

$$\int_0^{x_1} y_1 dx,$$

ceea ce există pentru :

$$a = 1, \text{ adică } k = 45^\circ$$

$$\text{și } b = 0, \quad \alpha_1 = 0^\circ.$$

Valoarea lui va fi $v_0^4/6g^2$.

Minimum lui A este zero, deoarece putem avea la un moment dat $\alpha_1 = \alpha_2$, deci traectoriile să se confunde.

Pentru cazul $k > 90^\circ$, avem :

$$12) \quad A = \frac{2v_0^4}{3g^2} \cdot \frac{1}{(1+b^2)^2} \left[\frac{(1+ab)(a-2b-ab^2)}{a^2} + b^3 - \frac{(a-b)^3(1+ab)}{(1+a^2)^2} \right].$$

Maximum lui A din 12) este pentru $a = -1$ și $b = 1$, adică $k = 135^\circ$ și $\alpha_1 = 45^\circ$ și are ca valoare $v_0^4/6g^2$.

Observație. Maximele lui A din 11) și A din 12) le-am aflat scriindu-le sub forma :

$$A = \frac{2v_0^4}{3g^2} \cdot \frac{f(a, b)}{F(a, b)}$$

și apoi exprimând condiția ca $f(a, b)$ să fie cât mai mare și $F(a, b)$ cât mai mic.

* * *

Să vedem acum cazul când $k = 90^\circ$, adică $a = \infty$.

Se observă lesne că $x=0$, deci punctul M se va plimbă pe axa Ox, iar :

$$x_1 = x_2 = m = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{b}{1+b^2}.$$

Expresiunea ariei A va fi deci :

$$A = \int_0^{x_1} (y_2 - y_1) dx,$$

sau :

$$13) \quad A = \frac{2v_0^4}{4g^2} \cdot \frac{b(1-b^2)}{(1+b^2)^2}.$$

Pentru a studia mai în amănunt acest caz, fiind tocmai cazul aplicațiunei din problemă, ținem seamă că :

$$b = \operatorname{tg} \alpha_1 \text{ și } \begin{cases} \sin^2 \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} \\ \cos^2 \alpha_1 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}, \end{cases}$$

deci expresia 13) se mai poate scrie :

$$14) \quad A = \frac{v_0^4 \sin 4\alpha_1}{6g^2}.$$

Avem, prin urmare, o funcție *sinusoidală* și va fi deajuns să studiem variația lui A în intervalul 0 până la $\pi/4$, căci între $\pi/4$ și $\pi/2$ ia aceleași valori ca și între $\pi/4$ și 0.

Avem deci tabloul :

α_1	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin 4\alpha_1$	0	1	0
A	0	$\nearrow \frac{v_0^4}{6g^2} \searrow$	0

Valoarea maximă a lui A fiind și în acest caz tot $v_0^4/6g^2$.

Concluzie:

Suprafața cuprinsă între două traectorii trase cu unghiurile α_1 și α_2 , astfel în cât:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = k,$$

variază *sinusoidal* între 0 și $v_0^4/6g^3$, valoarea maximă a lui $v_0^4/6g^3$ atingând-o numai pentru $k = 45^\circ, 90^\circ$ și 135° .

Cu aceasta, problema este complet rezolvată.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

D-l D. PANAITESCU, elev al Școalei Politehnice din București, a studiat problema pentru cazul $k = 90^\circ$, punând pe A sub forma 14) și dând tabelul de variațiune menționat mai sus.

PROBLEMA 2945. *Să se stabilizească natura seriei*

$$u_{2n} = \frac{2n!}{(2+k_1)(3+k_2)\dots(2n-1+k_2)(2n+k_1)}$$

$$u_{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{(2+k_1)(3+k_2)\dots(2n+k_1)(2n+1+k_2)}$$

k_1 și k_2 fiind constante.

TH. ANGHELUȚĂ.

Din expresiunile lui u_{2n} și u_{2n+1} , se deduce:

$$\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = \frac{2n}{2n+k_1} = \frac{1}{1+k_1/2n}$$

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+1+k_2} = \frac{1}{1+k_2/(2n+1)}$$

și dacă punem

$$\frac{k_1}{2n} = \alpha_{2n-1} \quad , \quad \frac{k_2}{2n+1} = \alpha_{2n} \quad ,$$

se găsește:

$$\lim (2n-1) \alpha_{2n-1} = k_1 \quad , \quad \lim 2n \alpha_{2n} = k_2 \quad ,$$

pentru n infinit.

Deci criteriul RAABE-DUHAMEL nu este aplicabil, neavând o singură limită.

Să aplicăm acestei serii criteriul logaritmnic a lui CAUCHY.

Se găsește totdeauna un întreg pozitiv p așa în cât să avem :

$$\frac{|k_1|}{2p} < 1 \quad , \quad \frac{|k_2|}{2p} < 1 \quad ,$$

limitându-ne, în ce privește cantitățile k_1 și k_2 , la valori reale.

Și acum, avem :

$$\frac{\log \frac{1}{u_{2n}}}{\log 2n} = e_1 + e_2 + e_3 ,$$

unde am pus :

$$e_1 = \frac{\log \left[\left(1 + \frac{k_1}{2} \right) \left(1 + \frac{k_2}{3} \right) \cdots \left(1 + \frac{k_2}{2p-1} \right) \right]}{\log 2n}$$

$$e_2 = \frac{\log \left[\left(1 + \frac{k_1}{2p} \right) \left(1 + \frac{k_1}{2p+2} \right) \cdots \left(1 + \frac{k_1}{2n} \right) \right]}{\log 2n}$$

$$e_3 = \frac{\log \left[\left(1 + \frac{k_2}{2p+1} \right) \left(1 + \frac{k_2}{2p+3} \right) \cdots \left(1 + \frac{k_2}{2n-1} \right) \right]}{\log 2n}$$

Pentru n infinit, se observă imediat că e_1 are ca limită zero, căci p odată ales, rămâne fix.

Expresiunea e_2 , poate fi scrisă după cum urmează:

$$e_2 = \frac{\log \left(1 + \frac{k_1}{2p} \right) + \log \left(1 + \frac{k_1}{2p+2} \right) + \cdots + \log \left(1 + \frac{k_1}{2n} \right)}{\log 2n}$$

$$\therefore e = \frac{\frac{k_1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{n} \right)}{\log 2n} + \frac{\frac{k_1}{4} \left[\frac{\theta_p}{p^2} + \frac{\theta_{p+1}}{(p+1)} + \cdots + \frac{\theta_n}{n^2} \right]}{\log 2n}$$

unde $\theta_p, \theta_{p+1}, \dots, \theta_n$ rămân finiți și inferiori unei cantități, fixă pentru n infinit.

Aşa fiind, se observă că expresiunea

$$\frac{k_1^2 \left[\frac{\theta p}{p^2} + \dots + \frac{\theta n}{n^2} \right]}{\log 2n}$$

tinde către zero pentru n infinit, căci expresia

$$\frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

este finită, fiind o parte din o serie convergentă.

Pe de altă parte, din inegalitatea

$$0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{n} - \int_p^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{p} - \frac{1}{n+1},$$

se deduce:

$$\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{n}}{\log 2n} = \frac{\int_p^{n+1} \frac{dx}{x} + \theta \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n+1} \right)}{\log 2n},$$

θ fiind cuprins între zero şi unitate.

Prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_2 = \frac{k_1}{2}.$$

Pentru expresia e_3 procedând la fel, deci punând:

$$e_3 = \frac{k_2 \left(\frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right)}{\log 2n} + \frac{k_2 \left[\frac{\varepsilon_p}{(p+1)^2} + \dots + \frac{\varepsilon_{n-2}}{(2n-1)^2} \right]}{\log 2n},$$

$\varepsilon_p, \dots, \varepsilon_{n-2}$ jucând rolul cantităţilor θ dela e_2 ; şi ținând seamă şi de neegalitatea:

$$0 < \frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \int_{2p+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2n+1},$$

se găseşte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_3 = \frac{k_2}{2}.$$

Deci, după criteriul logaritmîc, avem :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{u_{2n}}}{\log 2n} = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Se găsește și pentru

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{u_{2n+1}}}{\log (2n+1)} = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Se vede deci că pe cînd criteriul RAABE-DUHAMEL nu se aplică acestei serii, criteriul logaritmîc ne spune că seria este convergentă dacă

$$\frac{k_1 + k_2}{2} > 1,$$

este divergentă dacă

$$\frac{k_1 + k_2}{2} < 1$$

și nu putem trage nici o concluzie pentru cazul particular

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = 1.$$

Dacă se recurge la criteriul logaritmîc următor :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{n u_n}}{\log (\log n)},$$

se găsește ușor că seria este divergentă în acest caz.

Ceeace se urmărește prin această aplicațiune, eră de a se pune în evidență că dacă criteriile, în care intră raportul a doi termeni, dau mai multe limite, trebuie să se recurgă la criteriile logaritmice.

TH. ANGHELUȚĂ.

PROBLEMA 3035. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$(1) \quad a(a+x)(a+y)(a+x+y) = b(b+x)(b+y)(b+x+y),$$

$$(2) \quad x(x+\alpha)(x+\beta)(x+\alpha+\beta) = y(y+\alpha)(y+\beta)(y+\alpha+\beta).$$

GH. D. POPESCU.

Soluție dată de D-nii: MIRCEA I. ADAM, ION COȘEREANU și
CONSTANTIN I. GEORGESCU.

Observăm că prima ecuație (1) se scrie succesiv:

$$a^2(a+x+y)^2 + a(a+x+y)xy = b^2(b+x+y)^2 + b(b+x+y)xy,$$

sau:

$$[a(a+x+y) - b(b+x+y)][a(a+x+y) + b(b+x+y) + xy] = 0,$$

sau, în definitiv:

$$(1') \quad (a-b)(a+b+x+y)[a^2+b^2+(a+b)(x+y)+xy] = 0.$$

În acelaș fel, vedem că ecuația (2) se scrie sub forma:

$$(2') \quad (x-y)(x+y+\alpha+\beta)[x^2+y^2+(x+y)(\alpha+\beta)+\alpha\beta] = 0.$$

Sistemul de ecuații (1) și (2) este echivalent cu sistemul (1'),
(2') care se descompune în următoarele:

$$(I) \quad \begin{cases} x-y=0 \\ x+y+a+b=0 \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} x-y=0 \\ xy+(x+y)(a+b)+a^2+b^2=0 \end{cases}$$

$$(III) \quad \begin{cases} x+y+\alpha+\beta=0 \\ x+y+a+b=0 \end{cases}$$

$$(IV) \quad \begin{cases} x+y+\alpha+\beta=0 \\ xy+(x+y)(a+b)+a^2+b^2=0 \end{cases}$$

$$(V) \quad \begin{cases} x^2+y^2+(x+y)(\alpha+\beta)+\alpha\beta=0 \\ x+y+a+b=0 \end{cases}$$

$$(VI) \quad \begin{cases} x^2+y^2+(x+y)(\alpha+\beta)+\alpha\beta=0 \\ xy+(x+y)(a+b)+a^2+b^2=0. \end{cases}$$

Sistemul (I). Se vede ușor că soluția este

$$x=y=-\frac{a+b}{2}.$$

Sistemul (II). Din prima ecuație, avem $x=y$; a doua ecuație devine :

$$\begin{aligned} x^2 + 2(a+b)x + (a^2+b^2) &= 0, \\ \therefore x=y &= -(a+b) \pm \sqrt{2ab}. \end{aligned}$$

Sistemul (III). Dacă :

$$\alpha + \beta \neq a + b,$$

acest sistem e incompatibil.

Dacă :

$$\alpha + \beta = a + b,$$

acest sistem e compatibil, dar nedeterminat.

Sistemul (IV). Scoatem :

$$\begin{aligned} x+y &= -(\alpha + \beta), \\ xy &= (a+b)(\alpha + \beta) - (a^2 + b^2); \end{aligned}$$

x și y sunt date de ecuația :

$$z^2 + (\alpha + \beta)z + (a+b)(\alpha + \beta) - (a^2 + b^2) = 0.$$

Sistemul (V). Vom avea :

$$x+y = -(a+b)$$

și

$$2xy = (x+y)^2 - (x^2 + y^2) = (a+b)^2 - (a+b)(\alpha + \beta) + \alpha\beta,$$

x și y sunt date de ecuația :

$$z^2 + (a+b)z + \frac{1}{2}[(a+b)^2 - (a+b)(\alpha + \beta) + \alpha\beta] = 0.$$

Sistemul (VI). Dacă notăm :

$$x+y=u, \quad xy=v,$$

sistemul (VI) se mai scrie :

$$\begin{cases} u^2 - 2v + (\alpha + \beta)u + \alpha\beta = 0. \\ v + (a+b)u + a^2 + b^2 = 0. \end{cases}$$

Eliminând pe v , avem :

$$u^2 + [\alpha + \beta + 2(a+b)]u + 2(a^2 + b^2) + \alpha\beta = 0.$$

u și v odată găsiți, x și y vor fi dați de ecuația

$$z^2 - uz + v = 0.$$

PROBLEMA 3050. *Pe o foaie de hârtie se desemnează un triunghi ABC. Se îndoaie hârtia în toate modurile posibile așa ca A să vină pe BC. Care este înfășurata liniei de îndoitură?*

I. IONESCU.

Soluție geometrică dată de D-l C. E. GEORGESCU.

Să considerăm problema mai generală. *Să dă un punct F fix pe o hârtie și o dreaptă D pe ea. Se îndoaie hârtia așa că F să vină pe D. Care este înfășurata liniei de îndoitură?*

Indoim hârtia așa că F să vină în un punct F_1 de pe D și fie Δ linia de îndoitură, și I intersecția ei cu dreapta FF_1 , care este perpendiculară pe Δ .

Este evident că $FI = F_1I$.

Fie F' proiecția lui F pe D, și N intersecția lui FF' cu Δ , iar M pe Δ , simetric cu N față de I. Figura FMF_1N este un romb, căci are diagonalele perpendiculare în mijlocul lor. De aci, reese de o parte că $MF = MF_1$, și că MF_1 , paralelă cu FNF' , este perpendiculară pe D. Cu alte cuvinte, M este un punct al parabolei având focarul F și directoara D.

Parabola nu mai are alt punct pe dreapta Δ , afară de M. Să presupunem că ar mai fi punctul R. Unim R cu F și F_1 și ducem RR perpendicular pe D. Se vede că $FR = F_1R > RR'$. Egalitatea nu poate avea loc decât atunci când oblica RF_1 și perpendiculare RR' se vor confunda, adică numai pentru punctul M. De aci reese că Δ este tangentă la parabolă în M, și prin urmare parabola este înfășurătoarea dreptelor Δ .

În cazul problemei propuse, nu toată parabola este acceptabilă, ci numai porțiunea dintre punctele de contact ale parabolei cu mediatorele laturilor AB și AC. Parabola mai este tangentă și bisec-

toarelor unghiurilor B și C, căci indoiturile în jurul acestora aduc A pe BC la distanțele BA și CA.

Soluțiune analitică dată de D-nii: C. GOROVEI, A. SCODRANO, M. FOCȘĂNEANU, I. COȘEREANU, I. TEODORESCU, A. ABLOV, A. NICULESCU, C. E. GEORGESCU și T. I. UDRISKY.

Luăm ca axe coordonate pe BC și perpendiculara din A pe BC. Fie $(0, a)$ coordonatele lui A și $(x, 0)$ ale aceluiaș punct, când vine pe BC în A_1 . Linia de indoitură trecând prin mijlocul lui AA_1 va avea ecuația:

$$y - \frac{a}{2} = \frac{x}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right),$$

$$\therefore \quad x(2x - a) = a(2y - a).$$

Derivata, în raport cu x , a acestei ecuații este:

$$2x - a - a = 0, \quad \therefore \quad x = a.$$

Înlocuind în ecuația precedentă, găsim:

$$x^2 = 2ay - a^2.$$

Ecuația reprezintă o parabolă a cărei axă este după înălțimea dusă din A în triunghiul ABC, iar tangenta la vârf perpendiculara pe mijlocul acestei înălțimi.

Au dat soluțiuni bazate pe proprietăți cunoscute ale parabolei și D-nii A. NICULESCU, B. BARBĂLATT, E. BĂLAN, A. MIRCEA, I. ȘERBĂNESCU, E. RUSU, C. I. GEORGESCU.

D-l I. ȘERBĂNESCU a arătat că, dacă în loc de tringhiul ABC, se consideră un sector ABC, cu arcul BC circular, atunci în condițiunile problemei înfășurata este o *elipsă* sau o *îperbolă* după cum arcul BC are concavitatea sau convexitatea spre A.

EXERCITII.

8. Să se descompună numărul 777777, în două numere cu cifre consecutive într-o ordine crescătoare sau descrescătoare, știind că unul este răsturnatul celuilalt.

E. ȘTEFĂNESCU.

R. Fie N și N' numerele căutate:

$$N = (a - 3)(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$$

$$N' = (a + 2)(a + 1)a(a - 1)(a - 2)(a - 3).$$

$N + N' = 777777 = (2a - 1) \times (111111)$ și $2a - 1 = 7$, $a = 4$ și avem numerele 123456 și 654321.

9. Se cere suma :

$$\frac{1}{3.7} + \frac{1}{7.11} + \dots + \frac{1}{99.103}.$$

E. ȘTEFĂNESCU.

R. Avem :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} = 4 \cdot \frac{1}{3.7}; \frac{1}{7} - \frac{1}{11} = 4 \cdot \frac{1}{7.11}; \dots$$

Suma este deci :

$$4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{103} \right) = \frac{400}{309},$$

iar un sfert din aceasta este suma căutată :

$$0,3236245954692556634304207119741100 \dots,$$

restul repetându-se.

10. Se cer numerele de patru cifre la care prima dela stânga este media aritmetică a cifrelor mijlocii ; cifra sutelor media geometrică a ultimelor două și cifra zecilor media armonică a celor externe.

A. MICLESCU.

R. Dacă $mszu$ este numărul, avem :

$$m = \frac{1}{2}(s + z) ; s^2 = zu ; z = 2mu/(m + u).$$

Scoatem z din a doua și îl ducem în celelalte ; găsim :

$$m = s(s + u)/2u ; m = s^2u/(2u^2 - s^2) ;$$

și eliminând m :

$$s^4 + us^3 - 2u^3s = 0,$$

$$s(s - u)(s^2 + 2us + 2u^2) = 0.$$

Dar $s = 0$, cere $z = 0$ sau $u = 0$. În primul caz, și $m = 0$; în al doilea, la fel. Apoi $s = u$, cere $s = z$, $m = s$; de aci, soluțiile cu cifre egale : 1111 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999. Resturile ultimului factor sunt,

$$s = -u \pm ui = u(-1 \pm i),$$

care nu convine.

11. Să se verifice egalitățile :

$$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

M. ADAM

R. Se vor transforma radicalii dubli. Se va ține seamă și de egalitatea :

$$2(4+\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}}) = (\sqrt{5}\mp\sqrt{5}+\sqrt{3\pm\sqrt{5}})^2.$$

Relațiile se reduc toate la $1/\sqrt{2}$.

12. Să se rezolve geometricește problema : Dintre toate triunghiurile cu o latură BC fixă și perimetru constant, care are aria maximă ?

M. ADAM.

R. Vârful A descrie o elipsă, deci înălțimea din vârful A va fi maximă când devine axa mică a elipsei. Latura BC fiind fixă, rezultă că aria maximă este când triunghiul este isoscel, adică :

$$AB = AC.$$

13. Fie M, punctul unde cercul adjunct (BC) al triunghiului ABC, taie latura AC. Dacă DE este o paralelă oarecare la latura BC a triunghiului, punctele D, E, M, B, sunt conciclice.

MIRON NICULESCU.

R. Fie E' punctul unde cercul DMA taie latura AC.

Avem : $\overline{AB}^2 = AC \cdot AM$

și : $AB \cdot AD = AE' \cdot AM,$

de unde : $AB/AD = AC/AE',$

relație care ne probează că E' se confundă cu E.

14. Să se rezolve ecuația :

$$A_x'' = x + y.$$

B. M. BARBĂLATT.

R. Vom avea: $x \geq y$; apoi

$$A_4^y > 4 + y, \text{ deci } x \leq 3 \quad (y > 1).$$

Găsim singura soluție $x = y = 3$.

15. Să se afle limita expresiunii :

$$\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x}}, \text{ când } x \text{ tinde către zero.}$$

LONGIN IONESCU.

R. Aplicând logaritmi, se obține nedeterminarea $\infty \cdot 0$. Scriind-o sub forma $L(\cos x)/\sin^2 x$ și aplicând regula lui HOPITAL, ne conduce la $\frac{1}{2}$, de unde :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x}} = \sqrt{e}.$$

16. Să se găsiască limita expresiei :

$$E = \frac{x \operatorname{tg}(x-a)}{(x-a) \operatorname{tg} x}, \text{ pentru } x = a.$$

DILI SCHILERU.

R. Se prezintă sub forma $0/0$.

Avem :

$$\lim_{x \rightarrow a} E = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg}(x-a) + \frac{x}{\cos^2(x-a)}}{\operatorname{tg} x + \frac{x-a}{\cos^2 x}} = \frac{a}{\operatorname{tg} a}, \text{ deci } \lim_{x \rightarrow a} E = \frac{a}{\operatorname{tg} a}.$$

17. Notațiile între elementele unui triunghi fiind cele obișnuite, să se demonstreze relațiunea :

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} A}{r_a} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} B}{r_b} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C}{r_c} = \frac{1}{2R}.$$

D. SAMOILĂ.

$$S. \text{ Inlocuim pe } \sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{(p-b)(p-c)}{b_c} \dots, r_a = \frac{s}{(p-a)} \text{ etc.}$$

18. Ce devine expresiunea :

$$E = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{(\cotg^4 \alpha - 1) \cotg^4 \alpha}}, \text{ pentru } \alpha = 0?$$

FL. GEORGESCU.

R. Expresiunea propusă se mai poate scrie :

$$E = \left(\frac{\cotg^4 z - 1}{\cotg^4 z} \right)^{\cotg z} = \left(1 + \frac{1}{\cotg^2 z} \right)^{\cotg z} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cotg z} \right)^{\cotg z} \cdot \left(1 - \frac{1}{\cotg z} \right)^{\cotg z}$$

și trecând la limită :

$$\lim_{\alpha=0} E = 1 \cdot e \cdot \frac{1}{e} = 1.$$

PROBLEME PROPUSE.

3101. Să se găsiască 3 numere întregi pozitive în progresie armonică, știind că suma lor este 39.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

3102. Produsul a două numere consecutive este un număr de trei cifre consecutive. Care sunt acele numere ?

E. ȘTEFĂNESCU.

3103. Să se demonstreze că numărul divizorilor lui $1.2.3....n$ este cel mult 2^{n-1} .

A. TAUBER.

3104. Se cere patratul de trei cifre a cărui rădăcină este numărul format de ultimele două cifre ale lui.

F. E. GEORGESCU.

3105. Se dă un cerc fix cu centrul O și altul variabil cu centrul pe cercul O și trecând printr'un punct fix P. Care este locul geometric al intersecției liniei centrelor cu coarda comună ?

I. IONESCU.

3106. Dintre toate triunghiurile înscrise în acelaș cerc, care este cel în care suma patratelor distanțelor, dela ortocentru la mijloacele laturilor, e minimă ?

ST. NICOLESCU.

3107. Să se construiască triunghiul ABC, cunoscându-se unghiul A, latura BC și lungimea bisectoarei ce pleacă din A.

MAIOR GH. I. LITEANU.

3108. Intr'un plan, se dau patru drepte și se cere să se găsiască curba pe care o înfășoară una din drepte, știind că dreapta lui «GAUSS», a patrulaterului complet format de dreptele date, trece printr'un vârf al triunghiului format cu celelalte trei drepte.

ERNEST ABASOHN.

3109. Să se rezolve ecuația :

$$u_{2x} + u_{x+2}^2 = 2u_{2(x+1)} + (x+1)^2$$

u , însemnând al r -lea termen din șirul lui FIBONACCI.

GH. ZAPAN.

3110. Să se discute ecuațiunea :

$$x^3 - 3x^2 + (2 - \alpha - \beta)x + 2\alpha + \beta = 0$$

unde α, β sunt reale. Se va da în particular condițiunea pentru ca toate rădăcinile să fie reale.

Dacă α, β sunt coordonatele unui punct din plan, să se construiască curba de despărțire a planului după natura rădăcinilor ecuației date. Să se arate semnificarea geometrică a ecuației date, față de această curbă.

Să se rezolve complet ecuația în cazul rădăcinilor multiple și pentru $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$.

TH. ANGHELUȚĂ.

Dela apariția ultimului număr s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Antoniou I. (E); Arcadian N. (3043, 79, 83); Ballan E. (2274, 347, 512, 913, 93, 3034, 46, 68, 94, 97, E. N. P.); Barbălatt M. B. (2669, 758, 3076, 99, E. N. R.); Bogdan Martinian (2923, 3076, 87, 94); Bușilă A. (R); Coșoreanu I. (2635); Coșniță V. (3039, 68); Dobrescu-Băbici F. (3063, 79); Dumitrescu Marin (3099); Dumitrescu M. B. (R.); Epure St. (3064, 79); Gradiu G. (3079); Ionescu-Brezuica Ilie (3076, 79); Ionescu Longin (3072, 76); Katz S. (3094); Lăzărescu St. (P); Lazarovici Isidor (3074); Mateescu G. (3037, 39, 68, 76, E. N.); Sub.-Lt. Miculescu A. (E. P.); Mihăilescu Romeo (3079); Mirescu P. (3099); Niculescu Al. (3007, 30, P.); Popea O. (3032, 76, 79, E. N.); Solomon W. (A. N.); Ștefănescu Emil (P.); Tauber A. (N); Teodorescu St. Ion (2918, 3032, 68); Udrisky Traian (3074, 94); Urzică A. (3068); Weiss Leon (3076, 82, 94, 99, E.); Weiss Solomon (2994, 3064, E.); Zuckerman M. Bernard (3043, 74).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

La redacția revistei „Gazeta Matematică” se primesc abonamente pentru „Revista de matematicas y fisicas elementales” din Buenos-Aires, Anul V (Mai 1923 — Aprilie 1924). Costul unui abonament anual este de 70 lei.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1948, 2035, 63, 108, 16, 30, 278, 98, 329, 54, 72, 77, 428, 58, 586, 610, 40, 43, 51, 61, 69, 75, 82, 89, 773, 803, 18, 27, 35, 51, 60, 61, 72, 79, 88, 95, 906, 10, 20, 29, 31, 32, 45, 55, 59, 71, 72, 80, 91, 93, 3007, 14, 17, 19, 32, 36, 40, 45, 51, 53, 71, 80, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 91 și 93 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

28 VOLUME

Colecțiunea întreagă Lei 1500,—
Se vând și volume izolate, cu prețul de 70 lei, afară de
volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI și XXV, care se vând
numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie*. (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).
2. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).
3. N. Abramescu, *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăogită*, 1921. (Epuizată).
4. A. G. Ioachimescu și G. Țițeica, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).
5. Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* Lei 15,—
6. Tr. Lalescu, *Tratat de Geometrie analitică*,
Fascicola I (Epuizată).
Idem, Fascicola II Conice Lei 20,—
Idem, Fascicola III Cuadrice Lei 20,—
7. Gh. Lazăr, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) Lei 5,—
8. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme Lei 60,—
9. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, *Vocabular Matematic* Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăoga taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul*. Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale-fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septembrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimite D-lui: I. D. Teodor, Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la casierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București.

*Asociațiunea pentru cultură și
literatură poporului Român*

Libru

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXIX.

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1923



SUMARUL

1. O chestiune de geometrie analitică. *Ernest Abason.*
2. Proprietăți ale unui triunghi important *Constantin I. Georgescu.*
3. Concursul „Gazetei Matematice“.
4. Note Matematice: 14—22.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 106.
8. Probleme rezolvate: 2582, 2752, 2825, 2875, 2952, 3037, 3057,
3058, 3068, 3079, 3094.
9. Exerciții: 19 — 33.
10. Probleme propuse: 3088, 3111 — 3120.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET

1923

SPRE ȘTIINȚA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică”** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXIX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politehnică din București, **Tr. Lalescu**, Doctor în Matematici, Profesor Universitar și **I. D. Teodor**, Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Școala Politehnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice” se vor trimite D-lui **GEORGE BORNEANU**, Inginer, Directorul Fabricilor de chibrituri și timbre, București.

Se pot trimite și pe același nume în Str. Sf. Constantin 31, București.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor redița în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela D-l Cassier *I. D. Teodor*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimisă prin poștă.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evita confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

În vederea sporirii taxelor poștale, corespondenții pot trimite de ac înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsa spații albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecință.

Nu se admite însă a se trata pe aceeași foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, creațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ”, trebuie să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 56, 59, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 94, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 43, 45, 58, 59, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 53, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 15, 16, 26, 36, 47, 53, 56, 61, 83, 95, 3000, 05, 08, 10, 13, 19, 25, 40, 42, 45, 55, 60, 69, 70, 75, 84, 88, 89, 90, 92, 95, 96, 98, 100, 03, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

O CHESTIUNE DE GEOMETRIE ANALITICA.

La concursul «Gazetei Matematice» din acest an, Domnul Profesor THEODOR ANGHELUȚĂ a propus la lucrarea scrisă de Geometrie Analitică următoarea chestiune: *«prin focarul unei parabole se duc două drepte perpendiculare FM, FM' ; tangentele în M' și M'' la parabolă se taie în punctul M , al cărui loc geometric se cere a se găsi»*.

O parte din candidați au dat soluțiuni analitice foarte bune, în special Domnul GEORGESCU-ROEGEN dela Liceul Mănăstirea Dealului; niciunul însă nu a încercat să dea o soluțiune geometrică.

Imi propun să fac acest lucru în cele ce urmează, utilizând câteva noțiuni de omografie.

În acest scop, să cercetăm câte puncte, aparținând locului căutat, se găsesc pe o dreaptă oarecare Δ , din planul parabolei. Dacă un punct P descrie dreapta Δ , polara lui trece printr'un acelaș punct δ , polul lui Δ în raport cu parabola. Chestiunea revine la a găsi numărul punctelor P , pentru care polara corespunzătoare se vede sub un unghi drept, din focar.

Reprezentând parabola sub forma parametrică

$$x = 2pt^2, \quad y = 2pt,$$

la o valoare t_1 a parametrului, corespunde o singură *semidreaptă* FQ_1 (Q_1 este punctul de pe parabolă); dreapta δQ_1 taie parabola a doua oară în Q_2 , care corespunde unei valori t_2 a parametrului.

Prin urmare, între *semidreptele* FQ_1 și FQ_2 ($Q_1 Q_2$ trece prin δ) se stabilește o corespondență omografică și se știe că în două fascicule, care se corespund omografic, există două perechi de raze omoloage perpendiculare; acestora le corespund două drepte $Q_1 Q_2$, prin urmare pe dreapta Δ , două puncte P , ale căror polare se văd din focare sub un unghi drept.

Locul căutat este deci o conică.

Pentru a stabili natura conicei, rămâne să cercetăm pozițiunea ei în raport cu dreapta dela infinit a planului. În acest scop, să luăm ca dreaptă Δ , chiar dreapta dela infinit și să căutăm punctele ei de intersecție cu *conica-loc*.

Polul dreptei dela infinit, în raport cu parabola, este punctul δ dela infinit al acesteia, (sau ceea ce e echivalent: punctul dela infinit al axei parabolei). Orice dreaptă $Q_1 Q_2$ este în acest caz un

diametru, iar una din extremitățile ei, Q_1 spre exemplu, este confundată cu δ ; rezultă că unghiul δFQ_2 , trebuind să fie drept, FQ_2 va fi perpendiculară pe axa parabolei. Să însemnăm cu R_1 și R_2 punctele unde această dreaptă taie parabola; tangentele în aceste puncte la parabolă taie dreapta dela infinit în punctele căutate. Cele două tangente de mai sus fiind perpendiculare, deoarece intersecția lor este pe directoare, care este și *ortoptica**) parabolei, urmează că punctele dela infinit ale *conicei-loc* sunt în două direcțiuni perpendiculare una pe alta, deci locul este o *iperbolă echilaterală*.

Domnul profesor G. ȚIȚICA ne-a arătat, cu ocaziunea concursului amintit mai sus, o soluțiune geometrică elegantă, în care printr'o transformare de figură, parabola deveniă un cerc, iar locul geometric căutat apărea mult mai simplu.

ERNEST ABASON.

PROPRIETAȚI ALE UNUI TRIUNGHIU IMPORTANT.

Fie ABC un triunghi înscris în cercul O și circumscris cercului I; H și G ortocentrul și centrul său de greutate; A_2, B_2, C_2 picioarele medianelor; A_1, B_1, C_1 intersecțiile bisectoarelor AI, BI, CI cu cercul O; A', B', C' respectiv intersecțiile perechilor de drepte $(B_1C_1, AI), (C_1A_1, BI), (A_1B_1, CI)$; $S_a S_b S_c$ triunghiul format de dreptele lui SIMSON ale punctelor A, B, C în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$; $S_{a_1} S_{b_1} S_{c_1}$ triunghiul format de dreptele lui SIMSON ale punctelor A_1, B_1, C_1 în raport cu triunghiul ABC.

Intr'un articol publicat în «Gazeta Matematică», Vol. XXV, pag. 65-68, domnul C. H. NICOLAU găsește 13 proprietăți ale figurei ce se formează în condițiile de mai sus**).

În cele ce urmează, mă voiu încerca să completez unele proprietăți găsite de domnul C. H. NICOLAU, stabilind în acelaș timp și alte proprietăți noi.

*) Ortoptica unei curbe este locul geometric al punctelor de unde aceea curbă se vede sub un unghi drept.

**) Primele patru din aceste proprietăți se găsesc și în E. CATALAN, *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, sixième édition, 1879, Livre II, Théorème XXI, p. 46.

(N. R.)

Se știe, din articolul citat, că :

Punctul I este ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$, deci :

$$IA' = A'A, IB' = B'B, IC' = C'C.$$

Triunghiurile ABC , $S_aS_bS_c$ sunt omotetice și egale.

Triunghiurile $A_1B_1C_1$, $S_{a_1}S_{b_1}S_{c_1}$ sunt omotetice și egale.

În legătură cu acestea, sunt proprietățile ce urmează :

1) S_a, S_b, S_c sunt *ortopolurile* laturilor triunghiului ABC , în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$.

În adevăr, se știe *) că ortopolul unei drepte în raport cu un triunghi, este la intersecția dreptelor lui SIMSON ale punctelor în care dreapta taie cercul circumscris acestui triunghi.

2) $S_{a_1}, S_{b_1}, S_{c_1}$ sunt *ortopolurile* laturilor triunghiului $A_1B_1C_1$, în raport cu triunghiul ABC .

Demonstrație analoagă cu a punctului (1).

3) Triunghiul ortic $A'B'C'$ al lui $A_1B_1C_1$ este *triunghiul complementar* al lui $S_aS_bS_c$.

Triunghiurile ABC , $A'B'C'$ sunt omotetice, raportul de omotetie fiind 2 : 1 ; triunghiurile ABC , $S_aS_bS_c$ fiind omotetice și egale, rezultă că dreptele S_bS_c , S_cS_a , S_aS_b sunt respectiv paralele cu $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, adică $A'B'C'$ este complementarul lui $S_aS_bS_c$.

4) Triunghiul complementar $A_2B_2C_2$ al lui ABC , este *triunghiul ortic* al lui $S_{a_1}S_{b_1}S_{c_1}$.

În adevăr :

$$\sphericalangle S_{a_1} = \frac{1}{2}(B + C).$$

Apoi, dacă M și N sunt proiecțiile lui A_1 pe AB și AC , se observă că avem :

$$\sphericalangle BA_2S_{b_1} = 180^\circ - \sphericalangle MBA_2 - \sphericalangle BMA_2$$

$$\dots \sphericalangle BA_2S_{b_1} = 180^\circ - (180^\circ - B) - (90^\circ - A/2) = \frac{1}{2}(B - C).$$

$$\dots \sphericalangle S_{b_1}A_2C_2 = \frac{1}{2}(B - C) + C = \frac{1}{2}(B + C) = \sphericalangle S_{a_1}.$$

Laturile triunghiului $A_2B_2C_2$ sunt astfel antiparalele cu laturile corespunzătoare ale triunghiului $S_{a_1}S_{b_1}S_{c_1}$, proprietate de care se bucură numai triunghiul ortic.

5) Triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $S_aS_bS_c$ au acelaș cerc al lui EULER. Centrul ω_1 este situat la jumătatea dreptei OI , iar raza $\rho_1 = R/2$.

6) Dreptele $A'A_2$, $B'B_2$, $C'C_2$ sunt concurente.

*) J. NEUBERG, *Sur les projections et les contreprojections d'un triangle fixe*, p. 75.

Concurența lor rezultă din proprietatea ce urmează.

7) Triunghiurile $A'B'C'$, $A_2B_2C_2$ sunt omotetice și egale.

Proprietatea rezultă din omotetia triunghiurilor ABC și $A'B'C'$, ABC și $A_2B_2C_2$. Centrul P de omotetie este punctul comun al dreptelor $A'A_2$, $B'B_2$, $C'C_2$, situat la jumătatea dreptei GI .

8) Triunghiurile ABC , $S_{a_1}S_{b_1}S_{c_1}$ au acelaș cerc al lui EULER. Centrul ω al acestui cerc este situat la jumătatea dreptei OH .

9) Cercurile ω și ω_1 sunt egale, căci sunt circumscrise triunghiurilor egale $A'B'C'$ și $A_2B_2C_2$.

10) Dreapta $\omega\omega_1$ este paralelă cu HI și egală cu jumătatea ei. În adevăr, în triunghiul HOI există relația:

$$O\omega/OH = O\omega_1/OI = \omega\omega_1/HI = \frac{1}{2}.$$

11) Perpendicularele duse din vârfurile triunghiului $S_{a_1}S_{b_1}S_{c_1}$, pe laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC concură în centrul circumscris triunghiului $S_{a_1}S_{b_1}S_{c_1}$.

Aceste perpendiculare vor fi perpendiculare și pe laturile lui $A_2B_2C_2$, care este omotetic cu ABC . Dreptele B_2C_2 , C_2A_2 , A_2B_2 fiind antiparalele dreptelor $S_{b_1}S_{c_1}$, $S_{c_1}S_{a_1}$, $S_{a_1}S_{b_1}$, perpendicularele duse pe ele din S_{a_1} , S_{b_1} , S_{c_1} , vor fi isogonalele înălțimilor triunghiului $S_{a_1}S_{b_1}S_{c_1}$, concurând în isogonalul ortocentrului, adică în centrul cercului circumscris.

12) Perpendicularele duse din vârfurile triunghiului $S_aS_bS_c$ pe laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC , concură în centrul cercului circumscris triunghiului $S_aS_bS_c$. Demonstrația este aceeași.

Proprietăți noi vor pune desigur triunghiurile $S_aS_bS_c$, $S_{a_1}S_{b_1}S_{c_1}$ într-o nouă lumină.

CONSTANTIN I. GEORGESCU.

Absolvent al liceului „Mihai Viteazul”,
București.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE”.

În vacanța Paștelui viitor, și anume în zilele de 1, 2 și 3 Mai 1924, va avea loc un concurs general de matematici în București, între corespondenții «Gazetei Matematice», elevi ai claselor V, VI, VII și VIII ale liceelor din țară.

Cererile de înscriere se vor trimite *direct de către candidați*, iar nu de profesori, părinți, corespondenți sau intermediari, D-lui ION IONESCU, Inginer, Strada Călușei 23, în plicuri recomandate sau înmânate direct D-sale. Cererile se primesc *numai* până la 1 Februarie 1924 și vor arăta:

1. Numele și pronumele elevului, scrise lizibil.
2. Liceul și clasa în care urmează candidatul. Pentru cei ce se pregătesc în particular, școlile la care au urmat anul precedent, sau au dat examenul de fine de an.
3. Adresa în timpul școalei și în timpul vacanței Paștelui.
4. Dacă dispune de mijloace de a veni în București, dacă are unde fi găzduit și întreținut în timpul concursului, sau dacă unele din aceste mijloace vor trebui să-i fie procurate de Societatea «*Gazeta Matematică*».
5. Materia din matematici, din clasa în care urmează, la care voește să treacă proba practică în scris și alta la care voește să dea proba teoretică în scris, probele orale trecându-se la amândouă din ele.

La prima probă se vor cere calcule numerice și logaritmice, construcțiuni grafice și epure și prin urmare elevii vor aduce cu dâșii tabele, compasuri, instrumente de desemn și vor putea consulta cărți, pe când la proba teoretică vor avea numai tocurile de scris.

Numărul celor admiși la concurs va depinde de mijloacele de transport, de găzduire și de întreținere de care vom putea dispune; alegerea se va face dintre corespondenții cari au dovedit o activitate și o pricepere mai mare de matematici, prin lucrările ce ne-au trimes, căutând a lua elevi din toate clasele și din toate liceele din țară. Candidații înscriși, admiși la concurs, vor primi o înștiințare în care li se va arăta locul unde se va ține concursul, programul lui, precum și locul unde vor fi găzduiți și vor lua masa cei lipsiți de mijloace, iar în vacanța Paștelui, vor primi biletele de drum.

Se atrage atențiunea că toate condițiunile pentru înscriere și ținerea concursului trebuiesc respectate cu toată atențiunea și exactitatea inerentă științelor matematice. Sunt cu totul interzise comunicările între candidați la probele scrise și examenele orale, părăsirea sălilor în care se dau probele practice și teoretice, înainte de predarea lucrărilor.

Comisiunea examinatoare se compune din membri ai Societății «*Gazeta Matematică*», ce nu au rude printre candidații admiși la concurs.

În seara zilei de 3 Mai, va avea loc o masă comună a membrilor Societății, cu candidații admiși la concurs.

Rezultatul concursului se va publica în No. 10 Anul XXIX al «*Gazetei Matematice*», iar candidații cari vor reuși, vor primi ulterior diplome, recompense, premii sau mențiuni.

Delegația Societății

A. SALIGNY, T. LALESCU
și I. D. TEODOR.

NOTE MATEMATICE.

14. Zece Astronomii diverse. (A se vede *Gazeta Matematică*, Anul XXVII, pag. 150).

1. Adevărată. *J. Keill*. — Introduction to the true astronomy. Oxford 1739.
2. Anglicană. *N. Greenwood*. — Astronomia anglicană. 1639.
3. Descriptivă. *C. F. Chambers*. — Handbook of descriptive astronomy. Oxford 1877.
4. Fizică. *E. Biot*. — Traité élémentaire d'astronomie physique. Paris 1841.
5. Indiană. *W. Brennard*. — Hindu astronomy. 1896.
6. Nautică. *O. Byrne*. — A treatise on navigation and nautical astronomy.
7. Plană. *Brinkley*. — Elements of plane astronomy. Dublin 1845.
8. Populară. *C. Flammarion*. — Astronomie populaire. Paris 1880.
9. Sferică. *R. Ball*. — Spherical astronomy. 1908.
10. Stelară. *Gh. André*. — Traité d'astronomie stellaire. Paris 1900.

(Va urmă)

I. IONESCU.

15. *Numerafia sanscrită*. Spre a se compara numirile numerelor din limba sanscrită cu cele românești, reproduc aci numele a 11 numere :

Unus (1); *doi* (2); *tri* (3); *ciatur* (4); *panciun* (5); *șas* (6); *șaptan* (7); *aștan* (8); *navan* (9); *ducan* (10); *satan* (100).

I. I.

16. *Asupra problemei 1128*. In volumul XVII al Gazetei Matematice pag. 161, D-1 GH. ZAPAN încearcă să dea o soluțiune acestei probleme propusă de mine.

Iată enunțul ei :

Se presupune că există niște insecte, așa că fiecare începând cu vârsta de o oră, dă naștere din oră în oră la câte o insectă la fel cu ea. Se va presupune că prima apare la începutul unei zile și că fiecare nu trăește decât trei ore. Se cere să se calculeze în a câtea zi numărul acelor insecte este cuprins între 6×10^{998} și 10^{999} .

Se vede imediat, din enunț, că insectele care mor într'o anumită oră, sunt toate acelea născute cu trei ore mai înainte. D-1 ZAPAN reduce acest număr de insecte la una singură, ceea ce este inexact, după cum de altfel s'ar fi putut D-sa ușor convinge dacă cercetă câte s'au născut de pildă în ora a treia. Grație acestei greșeli, se ajunge la o soluțiune foarte simplă care, bine înțeles, este eronată ca și rezultatul obținut.

V. V.

17. *Asupra problemei 3107¹⁾*. Această problemă propusă de subsemnatul în numărul trecut al G. M., nu este decât unul din cazurile posibile ale problemei 1991, propusă de subsemnatul în anul 1913, G. M. vol. XIX, și enunțată astfel :

«Să se construiască un triunghi cunoscând o latură, un unghi și lungimea uneia din bisectoarele interioare sau exterioare».

LOCOT. GH. LITEANU.

1) In enunțul problemei 3107 trebuiește a se citi astfel : lungimea uneia din bisectoarele ce pleacă din B.

Correspondenții noștri sunt invitați ca odată cu rezolvirea problemei 3107, să se ocupe și de problema 1991, rămasă nepublicată, dat fiind că soluțiile la ambele se vor publica în acelaș timp, iar la problema 1991, până în prezent nu s'au primit decât soluții parțiale și necomplet discutate.

MAIOR GH. LITEANU.

18. *Asupra notei 88.* (Vezi *Gazeta Matematică*, Vol. XXVIII, pag. 411). În această notă, s'a stabilit maximul expresiunii $E=4Rr/p^2$, în care R, r, p sunt elementele cunoscute ale unui triunghi.

Iată o soluțiune mult mai simplă și mai elegantă ca cea dată acolo.

Ținând seamă că $4R=abc/pr$, expresia considerată se mai poate scrie:

$$E = abc/p^3 = \frac{a}{p} \times \frac{b}{p} \times \frac{c}{p}.$$

Suma factorilor este

$$a/p + b/p + c/p = (a + b + c)/p = 2.$$

Suma factorilor fiind constantă, produsul este maximum când factorii sunt egali:

$$a/p = b/p = c/p \quad \therefore \quad a = b = c,$$

adică când triunghiul este echilateral, iar valoarea maximă a expresiei este $8/27$.

MARIN GH. DUMITRESCU.

FLORIAN ER. GEORGESCU.

Elev Cl. VIII, Liceul Craiova.

Elev în Cl. VIII, Liceul Cantemir-Vodă.

Chestiunea se poate trata ceva mai general și ne propunem a afla maximul expresiunii;

$$E_1 = 4^m R^m r^{m+n} / p^{2m+n},$$

unde m și n sunt numere pozitive.

Dacă ținem seamă că avem

$$pr = S, \quad 4RS = abc, \quad r/p = \operatorname{tg} \frac{1}{2}A \operatorname{tg} \frac{1}{2}B \operatorname{tg} \frac{1}{2}C,$$

expresia considerată se poate scrie

$$E_1 = (abc/p^3)^m (\operatorname{tg} \frac{1}{2}A \operatorname{tg} \frac{1}{2}B \operatorname{tg} \frac{1}{2}C)^n.$$

Dar observăm că expresia abc/p^3 este maximă în triunghiul echilateral, căci:

$$a/p + b/p + c/p = (a + b + c)/p = 2.$$

Deci și expresia $(abc/p^3)^m$ va fi maximă tot în triunghiul echilateral. Apoi expresia

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}A \operatorname{tg} \frac{1}{2}B \operatorname{tg} \frac{1}{2}C$$

este și ea maximă tot în triunghiul echilateral, chestiune întâlnită adeseori în *Gazeta Matematică*. Deci și expresia

$$(\operatorname{tg} \frac{1}{2}A \operatorname{tg} \frac{1}{2}B \operatorname{tg} \frac{1}{2}C)^n$$

este maximă tot în triunghiul echilateral. Rezultă că expresia considerată E_1 este maximă în triunghiul echilateral și are ca valoare maximă:

$$(8/27)^m \cdot (1/\sqrt{3})^n$$

B. M. BARBĂLATT.

Elev în Cl. VII, Liceul Codreanu, Bârlad.

19. *Asupra problemei 3018.* (*Gazeta Matematică*, Vol. XXVIII, pag. 429). Proprietatea din această problemă se poate enunța mai general astfel:

Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri omologice înscrise într'un acelaș cerc. Fie A, B_1, C_1 proiecțiile de unghiul α și în acelaș sens ale vârfurilor A, B, C respectiv pe laturile $B'C', C'A', A'B'$ ale triunghiului $A'B'C'$. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt isologice.

Demonstrația este analoagă cu cea dată la problema 3018 dela pag. 429; se va ține numai seamă de proprietățile *triunghiurilor isologice* și ale *isopolului**), precum și de proprietatea cunoscută că dreapta lui SIMSON de un unghi α a unui punct X_1 de pe cercul XYZ și isogonala dreptei XX_1 fac între ele un unghi egal cu α .

TIBERIU POPOVICIU.

Elev în Cl. VIII, Liceul Moise Nicoară, Arad.

20. *Asupra unei probleme de algebră.* Se cunoaște**) problema: *Să se determine un polinom de gradul al VII-lea $f(x)$, astfel ca $f(x)+1$ să se dividă cu $(x-1)^4$ și $f(x)-1$ cu $(x+1)^4$.*

Aceasta se poate generaliza astfel:

Să se determine un polinom $f(x)$ de gradul $(p+1)$, știind

*) I. A. THIRD și J. NEUBERG, *Mathesis* 1922, pag. 263.

**) N. ABRAMESCU, *Algebră Superioară*.

21. *Asupra formulei lui Cardan.* În R. M. T., No. 9, an. II, D-1 Profesor E. CARAMAN, într'un interesant articol, discută și rezolvă ecuația de gradul al treilea, obținând printr'un procedeu nou, formula lui CARDAN. Dau mai jos un alt metod prin care ajungem la stabilirea aceleași formule.

Pentru aceasta, să considerăm :

$$(1) \quad x^3 + px + q = (x - 2\alpha)(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + 3\beta^2),$$

în care α și β reprezintă două cătimi reale, pe care urmează să le determinăm. Rădăcinele ecuațiunii :

$$x^3 + px + q = 0$$

sunt

$$x_1 = 2\alpha, \quad x_{2,3} = -\alpha \pm \beta\sqrt{3}i.$$

În (1), desfăcând parantezele în membrul al doilea și indentificând obținem :

$$(2) \quad \alpha^2 - \beta^2 = -p/3, \quad (3) \quad \alpha^3 + 3\alpha\beta^2 = -q/2.$$

Să rezolvim acest sistem în raport cu α și β . Având în vedere cunoscuta relațiune :

$$(4) \quad \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta)^3,$$

$$\text{deducem : } (\alpha^3 + 3\alpha\beta^2)^2 - (3\alpha^2\beta + \beta^3)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^3.$$

Sau, ținând seama de (2) și (3),

$$(5) \quad 3\alpha^2\beta + \beta^3 = \pm \sqrt{(\alpha^3 + 3\alpha\beta^2)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^3} = \pm \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}.$$

Adunând (5) cu (3) și apoi scăzând (5) din (3), obținem, luând în considerare (4) și extrăgând rădăcina cubică în ambii membri,

$$\alpha + \beta = \sqrt[3]{-q/2 \pm \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}},$$

$$\alpha - \beta = \sqrt[3]{-q/2 \mp \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}.$$

De unde

$$2\alpha = x_1 = \sqrt[3]{-q/2 \pm \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} + \sqrt[3]{-q/2 \mp \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}.$$

În această formulă, este ușor de observat că, indiferent dacă

se iau semnele superioare sau inferioare, valoarea lui x_1 rămâne aceeași.

Formula lui CARDAN este astfel stabilită. Punând:

$$u = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}},$$

avem

$$\alpha = \frac{1}{2}(u + v), \quad \beta = \frac{1}{2}(u - v),$$

$$x_{2,3} = \frac{1}{2}(u + v) \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i(u - v) = u\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) + v\left(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right);$$

$$x_2 = ur + vr^2, \quad x_3 = ur^2 + vr,$$

r, r^2 fiind rădăcinile cubice complexe ale unității, date de ecuația

$$r^2 + r + 1 = 0.$$

STOENESCU AL. I.

Cl. VII-a R, Lic. „Cantemir-Vodă”, Buc.

22. Asupra curbelor triunghiulare simetrice.

În «Spezielle Ebene Kurven» de H. WIEBITNER, se arată, după J. DE LA GOURNERIE *) că curba Γ , de care m'am ocupat în articolul «Asupra unei curbe remarcabile» **) din «G. M.» XXVIII, No. 2 și pe care am găsit-o în articolul «Asupra unei transformări geometrice», idem No. 8, este un caz limită al curbelor triunghiulare simetrice, a căror ecuație generală, în coordonate baricentrice, este:

$$(1) \quad F \equiv m\alpha^t + n\beta^t + p\gamma^t = 0,$$

unde:

$$(2) \quad m + n + p = 0.$$

Trecerea la limită indicată, mi se pare prea artificială și cam forțată; îmi propun să arăt mai jos, că între aceste două curbe există un mod de corespondență finit, trecerea dela una la alta, obținându-se prin efectuarea a două transformări.

*) Rec. des sav. étr. 1865/66.

**) Datoresc amabilității D-lui Prof. T. LALESCU, înlesnirea obținerii informațiilor bibliografice.

Curbele Γ sunt cunoscute în știință sub numele de curbele „W” și au fost descoperite de F. KLEIN și SOPHUS-LIE, cu ocazia aplicațiilor geometrice ale unui grup continuu de transformări (Transformarea potențială). În aceste condițiuni, declin originalitatea primului articol, publicat asupra acestor curbe.

M. G.

În adevăr, aplicând transformarea potențială cunoscută :

$$(3) \quad \alpha^t = \alpha_1 \quad ; \quad \beta^t = \beta_1 \quad ; \quad \gamma^t = \gamma_1$$

curba (1), se transformă în dreapta :

$$(4) \quad m\alpha_1 + n\beta_1 + p\gamma_1 = 0$$

și având în vedere condiția (2), putem efectua, în virtutea primei teoreme din articolul «Asupra unei transformări geometrice», citat mai sus, transformarea *logaritmică* :

$$(5) \quad \alpha_1 = \log \alpha_2 \quad ; \quad \beta_1 = \log \beta_2 \quad ; \quad \gamma_1 = \log \gamma_2.$$

Dreapta (4) se transformă atunci în curba «I», alias «W» :

$$(6) \quad \alpha^m \beta^n \gamma^p = 1.$$

Dacă definesc *transformarea logaritmică cea mai generală*, prin relațiunile :

$$(7) \quad \alpha^t = \xi_1 \log \alpha_1 \quad ; \quad \beta^t = \xi_2 \log \beta_1 \quad ; \quad \gamma^t = \xi_3 \log \gamma_1$$

atunci, aplicând-o curbei (1) în cazul particular :

$$t = u = v, \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1,$$

regăsesc deadreptul curba «W».

Pot deci anunța următoarea :

Teoremă: «Curbele «W» sunt transformatele generale logaritmice ale curbelor triunghiulare simetrice».

M. GHERMĂNESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

FACULTATEA DE ȘTIINȚE DIN BUCUREȘTI

(Sesiunea octomvrie 1923)

ALGEBRA SUPERIOARĂ.

I. Dându-se ecuația

$$x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 10x + a = 0,$$

să se determine a astfel ca ea să aibă două rădăcini inverse una alteia și în acest caz, să se rezolve.

Să se calculeze pentru această ecuație, funcția simetrică $\sum x_1^2 x_2^2 x_3$, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile.

II. Să se reducă forma quadratică

$$F = 2x^2 + y^2 + 19z^2 - 6yz + 8xz - 4xy - 4yt - 8zt + 3t^2$$

la forma canonică.

Să se deducă de aci :

1°. Natura suprafeței $F = 0$.

2°. Valoarea discriminantului formei F .

III. Să se discute ecuația

$$x^{2m} + px^{2n+1} + q = 0,$$

p, q fiind reali și să se dea condiția ca ecuația să aibă maximum de rădăcini reale.

EXAMEN DE ANALIZĂ.

ANUL I.

I. Știind că $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, să se calculeze valoarea integralei

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx.$$

II. Să se calculeze pentru curba înfășurătoare a dreptelor

$$\alpha x + y + z^3 = 0,$$

unde α este un parametru, lungimea arcului cuprins între punctele $x = 0$ și $x = -3$. Să se calculeze deasemenea și volumul născut de acest arc prin învârtire în jurul axei ax .

III. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_{(A)} \frac{\sqrt{x} dx dy}{\sqrt{y(1-y)} (x-1)},$$

A fiind aria dreptunghiului definit de dreptele

$$y = 0, y = 1, x = 1, x = 2.$$

IV. Să se calculeze funcția $F(x)$, știind că derivata a doua este :

$$F''(x) = \frac{2}{\alpha(x^2 + 4)}$$

și având în plus

$$F(+\infty) = F'(+\infty) = 0.$$

BIBLIOGRAFIE.

Societatea română de Științe. Buletinul de științe matematice pure și aplicate. No. 1—3. Anul XXVI. Ianuarie—Iunie 1923. București. Centenarul lui HERMITE, de G. ȚIȚICA. Scalari, vectori, tensori, de T. LALESCU. Probleme relative la monogeneitate, de D. POMPEIU. Procesele verbale ale ședințelor Societății române de Științe, secțiunea matematică. Bibliografia matematică românească.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Vol. XCVI. No. 1—2. Iulie—August 1923. Buenos-Aires.

Buletinul de matematică pură și aplicată. Anul III. No. 1. Septembrie 1923. București. Invățământul mecanicii în licee și școli medii, de D. POMPEIU și O. ONICESCU. Asupra teoriei lui WEYL, de P. NICOLAS.

Revista de matematicas y fisicas elementales. Anul IV. No. 5. Septembrie 1923. Buenos-Aires. Divizibilitatea relațiilor geometrice de T. A. DORDEA. Construcția conicelor, de J. S. CORTI.

Journal de mathématiques élémentaire publié par H. VUIBERT. Anul 48. No. 1. Octombrie 1923. Paris.

Revista matematică din Timișoara. Anul III. No. 8. Octombrie 1923. Timișoara. Proprietăți ale seriilor recurente, de M. GHERMĂNESCU.

Vocabular matematic întocmit de G. EM. FILIPESCU, A. G. IOACHIMESCU, I. IONESCU, T. LALESCU și G. ȚIȚICA. Apărut în Biblioteca *Gazetei Matematice* No. 9. București 1923. Preț 20 lei.

Scopul acestui vocabular reese din prefața scrisă de D-l G. ȚIȚICA, pe care o reproducem aci:

„Chestiunea vocabularului matematic are însemnătate din două puncte de vedere: din punct de vedere științific și din punct de vedere cultural-național. Din punct de vedere științific, se impune alegerea cea mai potrivită a cuvântului, care trebuie să înfățișeze o anumită noțiune științifică. Din punct de vedere cultural-național, e neapărat necesar ca vocabularul științific să fie același peste toată întinderea Țării, pentru ca oamenii de știință teoretică și practică să se înțeleagă ușor între ei și mai ales pentru ca nu cumva același cuvânt să aibă, în diferite părți ale Țării, înțelesuri deosebite.

Nevoia specială de vocabular matematic s'a simțit de multă vreme la noi, căci deseori dela o școală la alta, chiar în aceeași școală dela o clasă la alta, elevii erau siliți să schimbe după profesor, termenii întrebunțați și unșori și notațiunile. De aceea, s'a căutat în mai multe rânduri, să se alcătuiască un astfel de vocabular.

Acum vreo 20 de ani, sub președinția D-lui C. CLIMESCU, s'a discutat la Congresul Asociației Române pentru înaintarea științelor din București (1903), proiectul unui vocabular matematic. Chestiunea a rămas atunci la începutul ei.

S'a mai făcut o a doua încercare înainte de război. O comisiune compusă din D-nii I. IONESCU, TR. LALESCU, D. POMPEI și subsemnatul, a reînceput sistematic lucrarea. Împrejurările n'au permis ca ea să fie dusă până la capăt.

După război, în urma alipirii la Vechiul Regat a Ținuturilor românești, care au fost atâta vreme sub stăpânire străină, problema a căpătat caracter de actualitate și se impunea rezolvarea ei fără întârziere.

Această împrejurare hotărîtoare ne-a îndemnat la lucru și o comisiune compusă din D-nii G. EM. FILIPESCU, A. G. IOACHIMESCU, I. IONESCU, profesori la școala politehnică, T. LALESCU și subsemnatul, profesori la Facultatea de științe, după numeroase și lungi ședințe, cu discuții amănunțite, a alcătuit vocabularul alăturat și l'a supus discuției Societății Române de științe.

S'a căutat să se aleagă cuvinte cât mai românești. Acolo însă unde aceeași rădăcină se găsea în nomenclatura științifică a câtor mai multe țări ca Franța, Italia, Anglia și Germania, s'a adoptat și la noi rădăcina respectivă.

Totuși lucrarea nu poate fi socotită perfectă. Ne-am dat de foarte multe ori seama că e de greu să găsești cuvântul românesc potrivit pentru o idee științifică, pentru care avem acum un cuvânt străin deabîi românizat, și nu rareori am fost siliți să ne oprim la alegerea unui cuvânt, fiindcă n'am reușit să găsim altul mai bun.

Suntem convinși, că pentru unele cuvinte se pot găsi alegeri mai nimerite. Vom primi cu plăcere propuneri de îndreptare, căci dorim să avem cât mai curând o nomenclatură comună“.

* * *

„Vocabularul propriu zis cuprinde două părți, al cuvintelor adoptate și al cuvintelor întrebuințate până acum și care trebuiesc înlăturate. La sfârșit am adăugat și notațiile adoptate.

D-nii profesori, către cari se adresează cu deosebire acest vocabular, vor fi nevoiți să citească lucrarea în întregime, pentru ca să constate cuvintele adoptate. Desigur că ar fi fost mai practic un dicționar multiplu, așa încât la fiecare cuvânt francez sau german să se vadă cuvântul românesc corespunzător, dar atunci lucrarea devenea aproape cu neputință de realizat. Pentru scopul înalt pe care-l urmărim, munca D-lor profesori nu va fi prea mare, căci e bine să se știe că atât la Universitatea și Școala politehnică din București, se va întrebuința nomenclatura vocabularului de față și elevii cari o vor cunoaște, vor avea mai puține greutăți.

Pe această cale, sperăm să ajungem la o nomenclatură comună definitivă“.

C E R E R I.

106. În *«Le lys rouge»* de ANATOLE FRANCE, găsim următoarele rânduri:

«DANTE croyait à la vertu des nombres. Ce géomètre enflammé rêvait sur des chiffres, et sa BÉATRICE est une fleur d'arithmétique».

Ce se știe asupra «geometrului» DANTE ?

GH. D. POPESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2582. Să se integreze ecuația diferențială:

$$2y'^3 - y y' y'' - y^2 y''' = 0.$$

M. GHERMĂNESCU.

1. Soluție dată de D-I MIRON NICULESCU:

Ecuația fiind omogenă în y, y', y'', y''' , vom pune:

$$(1) \quad y = e^{\int u dx}$$

u fiind noua funcțiune, de unde:

$$y' = u e^{\int u dx}; \quad y'' = (u' + u^2) e^{\int u dx}; \quad y''' = (u'' + 3u u' + u^3) e^{\int u dx}.$$

Substituind aceste valori în ecuația propusă, obținem ecuația:

$$u'' + 4u u' = 0,$$

care se integrează odată, dând o ecuație a lui RICCATI:

$$u' + 2u^2 = c = 2c_1^2.$$

Această ecuație admite o integrală particulară: $u = c_1$.

Vom face deci substituția:

$$(2) \quad u = c_1 - 1/v$$

v fiind noua funcțiune. Obținem:

$$v'/v^2 + 2c_1^2 - 4c_1/v + 2/v^2 = 2c_1^2, \quad \text{sau} \quad v' - 4c_1 v + 2 = 0,$$

de unde:

$$v = e^{4c_1 x} (c^2 - 2 \int e^{-4c_1 x}),$$

sau:

$$v = c_2 e^{4c_1 x} + 1/2c_2.$$

$$\text{Din (2), scoatem: } u = c_1 - \frac{2c_1}{2c_1 c_2 e^{4c_1 x} + 1}.$$

Introducând această valoare în (1), obținem:

$$y = e^{c_1 x} \cdot e^{-\int \frac{2c_1 dx}{2c_1 c_2 e^{4c_1 x} + 1}}.$$

Cum însă :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2c_1c_2e^{4c_1x}+1} &= x - \int \frac{2c_1c_2e^{4c_1x}}{2c_1c_2e^{4c_1x}+1} \\ &= x - \frac{1}{4c_1} \log(2c_1c_2e^{4c_1x}+1) + c,\end{aligned}$$

rezultă : $y = e^{c_1x} \cdot e^{-2c_1x} \cdot e^{\frac{1}{2} \log(2c_1c_2e^{4c_1x}+1) + c}$

sau :

$$y = c_3 \frac{\sqrt{2c_1c_2e^{4c_1x}+1}}{e^{c_1x}}.$$

MIRON NICULESCU.

2. *Soluția autorului.* Ecuația diferențială dată, neconținând în mod explicit variabila independentă, să luăm y ca variabilă și $dy/dx = p$ ca funcțiune necunoscută. Vom avea :

$$\begin{aligned}y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{px} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy} = pp', \\ y''' &= \frac{d^3y}{dx^3} = p^2 \frac{d^2p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 = p^2 p'' + p p'^2.\end{aligned}$$

Introducem aceste expresiuni în ecuația dată și obținem :

$$p(2p^2 - ypp' - y^2pp'' - y^2p'^2) = 0.$$

Căpătăm integrala particulară :

$$p = 0 \quad \therefore \quad y = C.$$

Rămâne de integrat ecuația :

$$2p^2 - ypp' - y^2(pp'' + p'^2) = 0.$$

Facem o nouă schimbare de funcțiune : $p^2 = z$ și obținem ecuația lineară :

$$y^2 z'' + y z' - 4z = 0,$$

ecuație tip EULER, care se reduce la o ecuație lineară cu coeficienți constanți, prin schimbarea de variabilă $y = e^t$; găsim ecuația :

$$\frac{d^2z}{dt^2} - 4z = 0$$

cu integrala generală:

$$z = Ae^{2t} + Be^{-2t}$$

$$\therefore z = Ay^2 + \frac{B}{y^2} = \frac{1}{y^2} (Ay^4 + B)$$

$$\therefore p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \sqrt{Ay^4 + B}.$$

Deducem:

$$2 dx = \frac{2y dy}{\sqrt{Ay^4 + B}}$$

$$\therefore 2\sqrt{A}x = \lg C (\sqrt{A}y^2 + \sqrt{A}y^4 + B),$$

$$\sqrt{A}y^2 + \sqrt{A}y^4 + B = \frac{1}{C} l^2 \sqrt{A}x,$$

$$\sqrt{A}y^2 - \sqrt{A}y^4 + B = -BC l^{-2} \sqrt{A}x,$$

$$\therefore y^2 = \frac{1}{2\sqrt{AC}} (l^2 \sqrt{A}x - BC^3 l^{-2} \sqrt{A}x),$$

$$y = \frac{\pm e^{-\sqrt{A}x}}{\sqrt{2C\sqrt{A}}} \sqrt{l^4 \sqrt{A}x - BC^2}.$$

Integrala generală depinde de trei constante arbitrare A, B, C, ceea ce eră de prevăzut.

3. *Notă.* Soluția D-lui MIRON NICULESCU se mai poate simplifica. În adevăr, ecuația lui RICCATI, la care ajunge D-sa, se poate scrie:

$$du/(c_1^2 - u^2) = 2 dx$$

$$\therefore \lg B_1 (c_1^2 - u^2) = 4 c_1 x$$

$$\therefore u = \sqrt{c_1^2 - \frac{1}{B} e^{4c_1 x}}$$

$$\therefore y = e^{A_1 x} \cdot \int \sqrt{c_1^2 - \frac{1}{B_1} e^{4c_1 x}} dx.$$

M. G.

PROBLEMA 2752. *Se scriu două numere consecutive unul după altul cu un zero între ele. În ce caz numărul de cinci cifre astfel format este patrat perfect?*

I. IONESCU.

Soluțiune dată de D-I NICU P. ARCADIAN (Liceul Caracal).

Patratele perfecte se termină cu 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96. Cu ele putem forma următoarele numere în condițiunile problemei:

15016; 20021; 23024; 24025; 28029; 35036; 40041; 43044; 48049; 55056; 60061; 63064; 68069; 75076; 80081; 83084; 88089; 95096. Extrăgând rădăcina patrată, se constată că avem numai:

$$24025 = 155^2; \quad 75076 = 274^2.$$

O cercetare analoagă, cu numerele consecutive scrise în sens invers, nu conduce la nicio soluțiune. Problema are dar numai cele două soluțiuni de mai sus.

D-I D. M. BLUMENFELD a dat numai soluția 24025, la care observă că:

a) Suma părților 24 și 25 este patrat (7^2).

b) Scriind alături pe 25 de 24 și scăzând, pe cel mic, găsim patrate:

$$2425 - 24 = 49^2; \quad 2524 - 24 = 50^2.$$

Observare. Incercările mai trebuiau reduse prin diferite criterii. Astfel 20021; 23024; 35036; 68069; 80081; 83084; 95096 sunt $\mathcal{M} 3 + 2$ și nu pot fi patrate perfecte. Numerele 28029; 43044; 55056; 88089 nu pot fi patrate, căci sunt $\mathcal{M} 3$, dar nu $\mathcal{M} 9$. Numai aceste criterii ușor de aplicat reduc 11 extrageri de rădăcini patrate.

I. I.

PROBLEMA 2825. *N este un număr întreg prim cu 2 și 5 și a având ca indicator pe I. Perioada fracției a/N are p cifre. Să se demonstreze că $I = \mathcal{M} p$.*

V. ȘERBĂNESCU.

În *Culegere de probleme, Aritmetica*, de I. IONESCU pag. 57 problema 12 găsim aceeași teoremă sub enunțul:

«Dacă numitorul unei fracții nu conține factorii 2 și 5, perioada fracției zecimale corespunzătoare, are un număr de cifre care e un divizor al numărului ce arată câte numere sunt prime cu numitorul și mai mici decât el».

E. ȘTEFĂNESCU.

PROBLEMA 2875. *Găsim într'o descriere: «Acest gorun uriaș, cunoscut și respectat în tot plaiul Buzăului pentru vechimea sa tradițională, are o periferie cam de 5 m. și un diametru de 2 m.»*

Pot există asemenea copaci?

I. IONESCU.

Soluțiune dată de D-l F. E. GEORGESCU.

Secțiunea gorunului nu poate să fie circulară, căci raportul $5:2=2,5$ corespunde cu valoarea lui $\pi=3,14\dots$. Dar copacii cresc în păduri sau izolați și cu alte forme decât cu secțiunea circulară. Aceste forme sunt datorite naturii arborelui sau unor cauze exterioare mecanice sau fizice. Așa, în regiunile unde domnește o anumită regiune a vântului, copacii au o secțiune care se apropie de elipsă. Gerurile mari fac de crapă lemnul, iar aceste crăpături se umple în timpul de vegetație prin creșteri mai mari. Alți copaci au trunchiuri reunite, ondulațiuni la suprafață, caneluri, etc.

Gorunul din Buzău având o periferie mai mare ca dublul diametrului și mai mică ca a cercului, ar putea avea forma unei elipse turtite, sau o altă formă turtită neregulată. Asemenea copaci pot dar să existe. Dacă însă gorunul din Buzău are o secțiune cam circulară, autorul descrierii ar fi făcut mai bine dacă scria «cam 6 m.» în loc de «cam 5 m.» pentru periferia lui.

Au arătat că gorunul nu poate avea secțiunea circulară D-ra E. LĂZĂRESCU și D-nii: E. ȘTEFĂNESCU, I. COȘEREANU, R. FAJON, G. ZAMFIRESCU, A. TAUBER. D-l C. MANOILESCU admite ipoteza a doi copaci alipiți.

PROBLEMA 2952. *Să se calculeze determinantul:*

$$\begin{vmatrix} \Delta_{a,n} & \Delta_{b,n} & \dots & \Delta_{k,n} \\ \Delta_{a,n-1} & \Delta_{b,n-1} & \dots & \Delta_{k,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{a,1} & \Delta_{b,1} & \dots & \Delta_{k,1} \end{vmatrix}$$

în care

$$\Delta_{k,n} = \begin{vmatrix} (x+k)^n & x & 1 \\ 0 & x+k & 1 \\ x^n & x & 1 \end{vmatrix}$$

VAL. PINTILESCU.

I. Soluție dată de D-nii: L. WEISS (Galați), FL. NEGRETZU (Pitești), A. TAUBER (Botoșani), C. E. GEORGESCU și FL. GEORGESCU (Lic. Cantemir), I. A. FLORESCU.

Calculând valoarea lui $\Delta_{k,n}$, găsim:

$$\Delta_{k,n} = k[(x+k)^n - x^n].$$

Înlocuind în determinantul dat și scoțând pe $a, b, c, \dots, k$ factori comuni, avem:

$$D = a.b.c...k \begin{vmatrix} (x+a)^n - x^n & (x+b)^n - x^n & \dots & (x+k)^n - x^n \\ (x+a)^{n-1} - x^{n-1} & (x+b)^{n-1} - x^{n-1} & \dots & (x+k)^{n-1} - x^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x+a) - x & (x+b) - x & \dots & (x+k) - x \end{vmatrix} = abc...k.D'. \quad (1)$$

Observăm că determinantul D' se anulează pentru $x+a=x$, $x+b=x \dots x+k=x$; deci se divide prin produsul:

$$P_1 = a.b.c \dots k, \text{ de gradul } n.$$

Deasemenea, se anulează pentru $a=b=c=\dots=k$ și prin urmare se împarte prin produsul:

$$P_2 = (a-b)(a-c) \dots (a-k) \\ (b-c) \dots (b-k) \\ \vdots \\ (j-k),$$

de gradul $1+2+\dots+(n-i) = n(n-i)/2$.

Observăm deasemenea că gradul lui D' este $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$; iar gradul produsului $P_1 P_2$ este $n(n-i)/2 + n = n(n+1)/2$.

Prin urmare, rezultă

$$D' = P_1 P_2 \times A.$$

Pentru a determina pe A , observăm că în dezvoltarea termenului principal al lui D' , avem termenul $a^n b^{n-1} c^{n-2} \dots k$, care e pozitiv.

În produsul $P_1 P_2$, găsim: pe a , odată din P_1 și de $(n-i)$ ori din factorii $(a-b)(a-c)(a-d) \dots (a-k)$, pe b , odată din P_1 și de $(n-2)$ ori din $(b-c)(b-d) \dots (b-k)$ și așa mai departe.

Deci în $P_1 P_2$, găsim pe $a^n b^{n-1} \dots k$, cu acelaș semn ca în termenul principal; atunci $A = 1$; iar $D' = P_1 P_2$.

Prin urmare, determinantul din enunț este:

$$D = abc \dots k P_1 P_2 = a^2 b^2 c^2 \dots k^2 (a-b)(a-c) \dots (a-k) \cdot (b-c) \dots (b-k) \cdot \dots \cdot (j-k).$$

După cum se vede, D este independent de x , iar pentru $x=0$ se obțin determinanții lui WANDERMONDE.

II. Soluție dată de D-l B. M. BARBĂLATT (Lic. Codreanu, Bârlad).*

Se stabilește relația (1) ca la soluția precedentă.

Observ că D' se mai poate scrie sub forma:

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x^n & (x+a)^n - x^n & (x+b)^n - x^n & \dots & (x+k)^n - x^n \\ x^{n-1}(x+a)^{n-1} - x^{n-1} & (x+b)^{n-1} - x^{n-1} & \dots & (x+k)^{n-1} - x^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & (x+a) - x & (x+b) - x & \dots & (x+k) - x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x^n & (x+a)^n & (x+b)^n & \dots & (x+k)^n \\ x^{n-1} & (x+a)^{n-1} & (x+b)^{n-1} & \dots & (x+k)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & (x+a) & (x+b) & \dots & (x+k) \end{vmatrix}.$$

Se vede că D' nu este decât determinantul lui WANDERMONDE, care se calculează ușor după metoda obișnuită. Avem :

$$D' = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x^n & (x+a)^n & \dots & (x+k)^n \\ x^{n-1} & (x+a)^{n-1} & \dots & (x+k)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix}.$$

Când facem însă dezvoltarea după regula obișnuită a determinantului WANDERMONDE, se observă că x se elimină, adică Δ' este independent de x . Făcând pe $x=0$ și ținând seamă de proprietățile minorului unui termen din linia $(n+1)$ și coloana 1, avem :

$$D' = \begin{vmatrix} a^n & b^n & \dots & k^n \\ a^{n-1} & b^{n-1} & \dots & k^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & b & & k \end{vmatrix}$$

În definitiv, rezultă :

$$D = a^2 b^2 c^2 \dots k^2 \begin{vmatrix} a^{n-1} & b^{n-1} & \dots & k^{n-1} \\ a^{n-2} & b^{n-2} & \dots & k^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix}.$$

Se vede că sub această formă, problema propusă s'ar fi putut enunța :

Să se demonstreze că D este independent de x , iar valoarea lui este produsul $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \dots k^2$ prin determinantul lui WANDERMONDE de ordinul n format cu aceleași cantități.

Soluții anologice au dat D-nii : EUG. I. BALLAN și LEON ROSENFIELD.

III. Soluție dată de D-l B. M. BARBĂLATT (Bârlad).

Se stabilește ca la soluția întâia, relația (1).

Se știe că derivata unui determinant este formată din suma determinanților în care se înlocuiesc elementele unei linii sau coloane prin derivatele lor, iar celelalte rămân neschimbate. Derivând pe D în raport cu x , se vede că ultimul determinant din sumă e nul,

pentru că are ultima linie nulă (derivatele constantelor), iar ceilalți sunt de asemenea nuli, ca având liniile proporționale.

Deci derivata lui D , în raport cu x , e identic nulă și deci D e independent de x .

Făcând pe $x=0$, se regăsește formula din soluția precedentă.

Alte soluții s'au primit dela D -nii: T. POPOVICIU, N. GEORGESCU-ROEGEN, I. B. FLORESCU, MARTINIAN BOGDAN, I. S. ANTONIU E. ILIESCU, M. ADAM și OV. POPEA.

Observație. D-l C. E. GEORGESCU observă că dacă se lua :

$$\Delta_{k,n} = \begin{vmatrix} (x+k)^n & x^p & 1 \\ 0 & (x+k)^p & 1 \\ x^n & x^p & 1 \end{vmatrix},$$

atunci s'ar fi putut scoate ca factor, următorul produs :

$$\Pi[(x+k)^p - x^p] = [(x+a)^p - x^p][(x+b)^p - x^p] \dots [(x+k)^p - x^p],$$

pe lângă valoarea determinantului D , găsit în soluțiile de mai sus.

MAIOR G. I. L.

PROBLEMA. 3037. *Să se construiască un triunghiul ABC cunoscând centrele α, β, γ ale cercurilor adjuncțe (CA), (AB), (BC) sau centrele α', β', γ' ale cercurilor adjuncțe (BA), (CB), (AC).*

N. GEORGESCU-ROEGEN.

I. Soluție dată de D-nii: ADRIAN A. BUȘILĂ, CONST. I. GEORGESCU, EUGEN BALAN, ALEX. ȘCODRANO și IOAN M. ȘERBĂNESCU, (Absolvenți de Liceu), IOAN COȘEREANU (Elev Școala Politehnică, Timișoara), B. M. BARBĂLATT (Elev cl. VII Liceul Codreanu, Bârlad), VIRGIL GHITĂSCU (Elev cl. VIII Liceul Mihai Viteazul), TIBERIU POPOVICIU (Elev cl. VIII Liceul Moise Nicoară, Arad), TRAIAN I. UDRISKY (Elev cl. VI Liceul Moise Nicoară, Arad).

Cercurile adjuncțe (CA), (AB), (BC) se taie în Ω , primul punct al lui BROCARD (punctul retrograd) din triunghiul ABC, iar liniile centrelor $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ sunt respectiv perpendiculare pe corzile comune $A\Omega, B\Omega, C\Omega$ în mijloacele lor a, b, c . Patrulaterul $\Omega a\beta b$ este deci inscriptibil, iar dreapta ab este paralelă cu AB. De aici, rezultă imediat că avem:

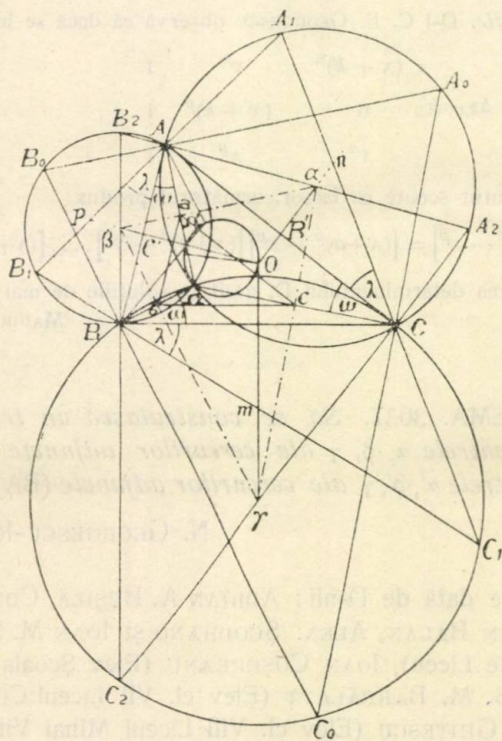
$$\sphericalangle \Omega \beta \gamma = \sphericalangle \Omega ab = \sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \omega,$$

ω fiind unghiul lui BROCARD al triunghiului ABC.

În mod analog, demonstrăm că avem :

$$\sphericalangle \Omega \gamma \alpha = \sphericalangle \Omega \alpha \beta = \sphericalangle \omega ;$$

Ω este deci punct al lui BROCARD și în triunghiul $\alpha\beta\gamma$ și anume tot punct *retrograd*.



Dacă ținem seamă că punctele A, B, C sunt simetricele lui Ω față de laturile $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, rezultă următoarea construcție :

Cu ajutorul cercurilor adjuncte $(\gamma\alpha)$, $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$ din triunghiul $\alpha\beta\gamma$, construim punctul retrograd al lui BROCARD din acest triunghi. Luăm apoi simetricele punctului Ω față de laturile $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ și obținem vârfurile A, B, C ale triunghiului ABC.

Construcția este analoagă când se dau centrele α' , β' , γ' , ale

cercurilor adjuncte (BA), (CB), (AC): cu ajutorul cercurilor adjuncte ($\beta'\alpha'$), ($\gamma'\beta'$), ($\alpha'\gamma'$) din triunghiul $\alpha'\beta'\gamma'$ se obține punctul direct Ω_1 al lui BROCARD din acest triunghi, care e și punct direct al lui BROCARD din triunghiul ABC, iar vârfurile A, B, C, sunt simetricele lui Ω_1 față de laturile $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$. Demonstrația este analoagă cu cea de mai sus.

II. Soluție dată de D-nii: MIHAIL I. FOCȘENEANU, G. MATEESCU (Elev cl. VII Liceul V. Alexandri, Galați) și WILHELM I. SOLOMON (Elev cl. VII Liceul Mateiu Basarab), SOLOMON WEISS (Elev cl. VI Liceul V. Alexandri, Galați).

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Se știe *) că O este punctul direct al lui BROCARD din triunghiul $\alpha\beta\gamma$, iar razele γC , αA , βB care sunt respectiv perpendiculare pe laturile CA, AB, BC și deci respectiv paralele cu $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, formează prin intersecțiile lor un triunghi $A_2B_2C_2$, care are vârfurile A_2, B_2, C_2 respectiv pe cercurile adjuncte (CA), (AB), (BC), iar αA_2 , βB_2 , γC_2 sunt razele acestor cercuri.

De aici, urmează următoarea construcție: Vom determina mai întâi punctul O, intersecția comună a cercurilor adjuncte ($\beta\alpha$), ($\gamma\beta$), ($\alpha\gamma$) din triunghiul $\alpha\beta\gamma$. Prin γ , α , β ducem paralele respectiv cu $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, care, prin intersecțiile lor, determină triunghiul $A_2B_2C_2$. Din α , β , γ ca centre, cu raze respectiv egale cu αA_2 , βB_2 , γC_2 , descriem cercurile adjuncte (CA), (AB), (BC), care, prin intersecția lor, determină vârfurile A, B, C.

Construcția este analoagă, când cunoaștem triunghiul $\alpha'\beta'\gamma'$.

PROBLEMA 3057. Să se rezolve ecuația:

$$x^y - y^x = 1,$$

x și y fiind numere prime.

A. NICULESCU.

1. Ecuația dată se poate scrie sub una din formele:

$$(1) \quad x^y = y^x + 1 \quad (2) \quad y^x = x^y - 1.$$

*) A se vedea: ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie, Géométrie plane*, édition 1922, § 54, 1^o, p. 486.

Însă x și y fiind numere prime, conform teoremei lui FERMAT, putem scrie :

$$(3) \quad x^y = My + x, \quad (4) \quad y^x = Nx + y.$$

Comparând (1) cu (3) și (2) cu (4), deducem :

$$(5) \quad x = My + 1, \quad (6) \quad y = Nx - 1.$$

Însă, prin însăși forma ecuației date, x și y sunt de paritate diferită. Ele fiind și numere prime, unul din ele este 2.

Dacă $x = 2$, (5) arată că $y = 1$.

Dacă $y = 2$, (6) arată că $x = 3$.

Singurele soluții ale ecuației propuse sunt deci :

$$(I) \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \quad (II) \quad \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Ecuația mai adinite, în numere întregi, soluția :

$$x = \text{întreg}, \quad y = 0.$$

2 Soluție dată de D-I I. IONESCU-BREZUICA (Elev la Liceul din Caracal). Ecuația dată se poate scrie succesiv :

$$x(x^{y-1} - 1) = y(y^{x-1} - 1) + 1 - x + y,$$

$$\frac{x^{y-1} - 1}{y} = \frac{y^{x-1} - 1}{x} + \frac{1 - x + y}{xy}.$$

Primele două fracții se reduc la întregi, după teorema lui FERMAT. Trebuie dar ca și ultima fracție să se reducă la un întreg, sau să se anuleze.

Prima ipoteză conduce la soluțiile $x = 1, y = \text{întreg}$, care nu verifică ecuația decât pentru $y = 0$.

A doua ipoteză conduce, în condițiunile enunțului, la soluțiile găsite în prima soluție dată acestei probleme.

Notă. Au găsit cele două soluții, prin considerațiuni analoage celor din prima soluție, D-nii : G. AMĂRĂSCU, N. ARCADIAN, M. BOGDAN, DOBRESCU-BĂBICI, A. GUȚU, I. LĂZĂRESCU, F. NEGRETZU, O. POPEA, F. RABINOVICI, L. și S. WEISS.

2. Au găsit numai soluția $x = 3, y = 2$, D-nii : R. MIHĂILESCU și W. SOLOMON.

M. G.

PROBLEMA 3058. *Să se demonstreze identitatea:*

$$\sum \cos^2 a \sin(b-c) \sin b \sin c + \sin(a-b) \sin(b-c) \sin(c-a) = 0.$$

EMIL ȘTEFĂNESCU.

I. Soluție dată de D-nii: ADRIAN A. BUȘILĂ, VIRGIL GHÎTESCU, N. P. ARCADIAN și RADU I. OPREA.

În *Culegere de Probleme*, Trigonometria, VII. 31, se demonstrează identitatea:

$$\sum \cos a \sin(b-c) \cotga = - \frac{\sin(a-b) \sin(b-c) \sin(c-a)}{\sin a \sin b \sin c},$$

din care obținem identitatea propusă, înmulțind ambii membri cu produsul: $\sin a \sin b \sin c$.

II. Soluție dată de D-nii: I. TEODORESCU, B. M. BARBĂLATT și ȘTEFAN FL. LĂZĂRESCU.

În identitatea propusă, înlocuim $\cos^2 a$ prin $(1 - \sin^2 a)$, etc. Obținem atunci:

$$\sum \sin(b-c) \sin b \sin c - \sin a \sin b \sin c \sum \sin a \sin(b-c) + \sin(a-b) \sin(b-c) \sin(c-a) = 0.$$

În *Culegere de Probleme*, Trigonometria, IX.10, se demonstrează identitatea:

$$\sum \sin a \sin(b-c) = 0,$$

astfel că relația precedentă devine:

$$\sum \sin(b-c) \sin b \sin c + \sin(a-b) \sin(b-c) \sin(c-a) = 0,$$

demonstrată asemenea în *Culegere de Probleme*, Trigonometria, IX, 15.

Alte soluții de D-nii: CONST. I. GEORGESCU, ILIE IONESCU-BREZUICA, BOGDAN MARTINIAN, ȘTEFAN T. EPURE, G. MATEESCU, VASILE R. DIMITRIU, DUMITRU SAMOILĂ, WILHELM SOLOMON, MIRCEA I. ADAM, F. DOBRESKU-BĂBICI, ERNEST SCHLIFCA, AL. TAUBER, I. P. ILIESCU, STERIAN MĂCRINEANU, LEON WEISS, EM. D. ILIESCU, RADU CĂDERE, EMIL BERCOVICI, AL. I. PANAITESCU, D. M. TEODORESCU, GAVRIL O. AMĂRĂSCU, MARCEL S. SANE, I. COȘEREANU, DAVID M. BLUMENFELD, O. POPEA.

Notă. Avem de asemenea identitatea analogă:

$$\sum \sin^2 a \sin(b-c) \cos b \cos c + \sin(a-b) \sin(b-c) \sin(c-a) = 0.$$

I. COȘEREANU, I. TEODORESCU,

VIRGIL GHÎTESCU, ȘT. FL. LĂZĂRESCU,

I. IONESCU-BREZUICA, O. POPEA.

PROBLEMA 3068. Dându-se ecuația:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 , să se arate că avem relația:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x_1 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x_2 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x_3 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x_4 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a-c}{b-d-1}.$$

E. ȘTEFĂNESCU.

1. Soluție și generalizare dată de D-nii: A. NICULESCU, și I. ST. TEODORESCU (Studenti București), A. GUȚU (Student Iași), T. POPOVICIU (Arad), I. GOLDȘTEIN și L. WEISS.

Să considerăm ecuația de gradul m :

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m = 0,$$

cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, precum și relația cunoscută:

$$(1) \quad \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \frac{T_1 - T_3 + T_5 - \dots}{1 - T_2 + T_4 - \dots},$$

în care: $T_i = \sum \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \dots \operatorname{tg} \alpha_i.$

Dacă punem:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x_i = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

relațiunea (1) ne dă imediat:

$$\sum_1^m \operatorname{arc} \operatorname{tg} x_i = \pm \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a_1 - a_3 + a_5 - \dots}{1 - a_2 + a_4 - \dots},$$

în virtutea relațiunilor între rădăcinile și coeficienții unei ecuații.

2. A doua generalizare dată de D-l AL. NICULESCU (Student, București).

Să considerăm produsul:

$$P = (i + x_1)(i + x_2) \dots (i + x_m),$$

unde $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ sunt rădăcinile ecuației date.

Desvoltând acest produs, se obține:

$$P = 1 - i \sum x_1 - \sum x_1 x_2 + i \sum x_1 x_2 x_3 + \dots$$

sau ținând seamă de relațiile între rădăcinile și coeficienții ecuației:

$$P = [1 - a_2 + a_4 - \dots] + i[a_1 - a_3 + a_5 - \dots].$$

Având însă în vedere Ex. 9. (Cap. XXXIII. Culegere Algebră de A. G. IOACHIMESCU) putem scrie imediat :

$$\operatorname{arctg} \frac{a_1 - a_3 + a_5 - \dots}{1 - a_2 + a_4 - \dots} = \sum \operatorname{arctg} x_i .$$

Notă. 1. Au rezolvat problema, fără a o generaliza, urmând calea arătată în prima generalizare, D-nii : M. ADAM, I. ANTONIU, E. BALLAN, D. BLUMENFELD, I. BONEA, M. BRĂTESCU, I. COȘEREANU, V. COȘNIȚĂ, M. DUMITRESCU, V. DIMITRIU, C. I. GEORGESCU, CR. GOILAV, ȘT. LĂZĂRESCU, G. MATESCU, C. MIHĂESCU, F. NEGRETZU, S. NICOLESCU, O. POPEA, AL. ȘCODRANO, W. SOLOMON, A. TAUBER și A. URZICĂ.

2. D-l I. ANTONIU mai semnalează relațiunile.

$$\sum_1^n \operatorname{arg} \operatorname{th} x_1 = \operatorname{arg} \operatorname{th} \frac{a+c}{b+d+1}$$

$$\sum_1^n \operatorname{arg} \operatorname{coth} x_1 = \operatorname{arg} \operatorname{coth} \frac{b+d+1}{a+c} .$$

PPOBLEMA 3079. Să se demonstreze relațiunea :

$$\frac{a^2}{r_a} + \frac{b^2}{r_b} + \frac{c^2}{r_c} = 4(R+r),$$

în care $a, b, c, R, r, r_a, r_b, r_c$ sunt laturile, raza cercului circumscris și razele cercurilor tritangente unui triunghi oarecare.

CONST. I. GEORGESCU.

I. Soluție dată de D-nii : MIHAIL I. FOȘENEANU și FLORIAN ER. GEORGESCU.

Plecăm dela relația cunoscută :

$$\sum a^2 \cotg \frac{1}{2} A = 4p(R+r),$$

pe care împărțind-o cu p și ținând seamă că :

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} A, \quad r_b = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} B, \quad r_c = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} C,$$

obținem tocmai relația propusă.

II. Soluție dată de D-nul B. M. BARBĂLATT. Plecăm dela relațiile cunoscute:

$$(a + b + c)(r_a + r_b + r_c) = 2p(4R + r) \quad (1)$$

$$a r_a + b r_b + c r_c = 2p(2R - r) \quad (2)$$

din care prima se deduce dintr'o relație prea cunoscută, iar ultima este stabilită de D-nul V. CRISTESCU în *Gazeta Matematică*, Vol. XXVI, p. 156, problema 2762. Dacă le scădem membru cu membru, avem:

$$\sum a(r_b + r_c) = 4p(R + r). \quad (3)$$

Dacă ținem seamă apoi de relațiile:

$$(r_b + r_c)/p = a/r_a, (r_c + r_a)/p = b/r_b, \text{ etc.,}$$

relația (3) se reduce la problema propusă.

III. Soluție dată de D-nii: CRISTEA P. GOILAV, EMIL A. BERCOVICI, N. P. ARCADIAN, EMIL ȘTEFĂNESCU, LEON WEISS, A. URZICA (Elev Cl. VIII Liceul Decebal, Deva), GH. HUZUNEANU, ION C. VASILIU și PAUL I. IONESCU (Elevi Liceul Mănăstirea Dealului), EDGAR C. RUSSU.

Cu ajutorul formulelor:

$$S = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c = pr,$$

primul membru al relației propuse devine:

$$\frac{a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c)}{S} = \frac{p(a^2 + b^2 + c^2) - (a^3 + b^3 + c^3)}{pr}.$$

$$\text{Dar:} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)$$

și înlocuind în relația de mai sus, ea devine $4(R + r)$.

Au rezolvat bine problema și D-nii: EMILIAN ILIESCU, I. COȘEREANU, OVIDIU G. POPEA, ȘTEFAN MARIN, MIRCEA I. ADAM, GHEORGHE GRADIU, ILIE IONESCU-BREZUICA, LONGIN I. IONESCU, DUMITRU M. TEODORESCU, ȘTEFAN T. EPURE, MARIN GH. DUMITRESCU, G. MATEESCU, TRAIAN I. UDRISKY, DUMITRU SAMOILĂ, DAVID BLUMENFELD, FROIM I. MARCUS, AL. I. PANAITESCU, ROMEO MIHĂILESCU, PETRE A. MIRESCU, F. DOBRESCU-BĂBICI, NICOLAE N. POPESCU, ȘERBAN SOLACOLU.

Notă. Avem relațiunile analoage :

$$\frac{a^2}{r_b + r_c} + \frac{b^2}{r_c + r_a} + \frac{c^2}{r_a + r_b} = 2(2R - r).$$

N. P. ARCADIAN, B. M. BARBĂLATT.

$$\frac{a^2}{r_a - r} + \frac{b^2}{r_b - r} + \frac{c^2}{r_c - r} = 2(4R + r).$$

B. M. BARBĂLATT.

$$a^2 r_a + b^2 r_b + c^2 r_c = 4p^2(R - r).$$

M. I. FOȘȘENEANU, MIRCEA I. ADAM.

$$\frac{(b-c)^2}{r_a} + \frac{(c-a)^2}{r_b} + \frac{(a-b)^2}{r_c} = 4(R - 2r).$$

FL. ER. GEORGESCU.

$$\frac{a^2 - b^2}{r_a - r_b} + \frac{b^2 - c^2}{r_b - r_c} + \frac{c^2 - a^2}{r_c - r_a} = 4(R + r).$$

I. COȘȘEREANU.

$$\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} = \frac{2}{p}(4R + r).$$

MIRCEA I. ADAM.

Observație. Mai mulți corespondenți ne-au atras atențiunea că chestiunea propusă se află stabilită și de D-nul GR. ZAPAN în *Revista Matematică* din *Timișoara*, Anul II, Nr. 6, August 1922, la pag. 83, ceea ce este o simplă coincidență, căci chestiunea propusă a fost trimisă de D-nul C. I. GEORGESCU redacției noastre înainte de această dată.

(N. R.)

PROBLEMA 3094. *Să se demonstreze că toate triunghiurile dreptunghice, care au laturile în progresiune aritmetică, sunt asemenea.*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-nii: E. BALLAN, T. UDRISKY (Cl. VI Lc. Arad), R. MIHĂILESCU, I. M. ȘERBĂNESCU, M. I. FROM, A. TAUBER, D.

M. TEODORESCU, A. BUȘILĂ, S. C. SOLACOLU, C. I. GEORGESCU, D. C. SCHILERU, E. PĂLĂRIERU și ZAGHER, T. N. ANGELESCU.

Fie $(a + r)$, a , $(a - r)$ cele trei laturi ale unui triunghi dreptunghic cu laturile în progresiune aritmetică. Teorema lui PITAGORA ne dă :

$$(a + r)^2 = a^2 + (a - r)^2,$$

$$\therefore 4ar = a^2$$

$$r = \frac{1}{4} a.$$

Laturile sunt deci $\frac{5}{4}a$, a , $\frac{3}{4}a$. Ele sunt proporționale cu ale triunghiului cu laturile 5, 4, 3. Deci toate sunt asemenea cu acest triunghi și asemenea între ele,

Au dat soluțiuni trigonometrice D-nii : L. WEISS, M. P. BOGDAN, I. BONEA, N. ARCADIAN, I. GOLDSTEIN, E. ȘTEFĂNESCU.

D-nii : E. ȘTEFĂNESCU și A. TAUBER au arătat același lucru pentru progresele geometrice.

EXERCITII.

19. Să se găsiască patratul de patru cifre, care fiind despărțit în grupe de câte două cifre, prezintă două numere consecutive, ultimul grup fiind un patrat perfect.

S. WEISS.

R. Patratele perfecte care pot termina un patrat perfect sunt 25, 81, 64. Formăm numere de patru cifre, punând numărul consecutiv înainte : 2625, 8281, 6564. Condițiile enunțului le îndeplinește numai $8281 = 91^2$.

20. Se cer patratele de trei cifre în care suma cifrelor este egală cu suma cifrelor rădăcinii lor. Chestiune analoagă pentru cub.

S. KATZ.

R. Numărul este mai mic ca 31^2 ; suma cifrelor rădăcinii cel mult $2 + 9 = 11$. Se cunosc ultimele două cifre ale patratelor. Punem înainte o cifră și vedem că suma lor să nu intreacă 11; cercetăm care este patrat și găsim :

$$324 = 18^2,$$

$$361 = 19^2.$$

Pentru cuburi, soluția unică este :

$$512 = 8^3.$$

21. Se cer numerele consecutive așa ca suma puterilor 295 ale lor să se dividă cu 343.

E. ȘTEFĂNESCU.

R. Avem $294 = 7^3 \cdot (7-1) = 1 \cdot (7^3)$. Deci :

$$x^{294} - 1 = M \cdot 7^3 \quad ; \quad (x+1)^{294} - 1 = M \cdot 7^3.$$

$$x^{295} + (x+1)^{295} = M \cdot 343 + x + x + 1.$$

E de ajuns a lua :

$$2x + 1 = 343(2n + 1),$$

$$x = 343n + 171.$$

22. Când $(a+b)^2$ se divide cu $(a-b)$?

E. ȘTEFĂNESCU.

R. Avem :

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab = (a-b)^2 - 4a(a-b) + 4a^2.$$

Trebue ca $(a-b)$ să dividă pe $4a^2$. Deci $(a-b)$ este un divizor mai mic ca a , al lui $4a^2$.

Exemple: $a=5$ deci $a-b=1, 2, 4$ deci $b=4, 3, 1$

$a=9$ „ $a-b=1, 2, 3, 4, 6$ „ $b=8, 7, 6, 5, 3$

23. Să se arate că expresiunea

$$a^{2n} - (a+1)a^n + a,$$

se divide cu $(a^3 - a)$.

M. G. DUMITRESCU.

R. Se poate scrie $a(a^n - 1)(a^{n-1} - 1)$ care se divide cu $a(a-1)$ și $(a+1)$. Acesta generalizează exercițiul 48, anul XXVIII.

24. Să se arate că numerele :

$$361 ; 39601 ; 3996001 ; 399960001,$$

sunt patrurate perfecte.

S. LĂZĂRESCU.

R. Fie $n=1111 \dots 1$. Numerele sunt de forma :

$$3(9n+1)^2 + (9n+1)(9n-3) + 1 = (18n+1)^2.$$

25. Potențialele de orice ordin ale punctului lui STEINER în triunghiul automedian, sunt coliniare pe o dreaptă Δ , ce trece și prin vârful opus laturii mijlocii.

B. M. BARBĂLATT.

R. Fie $2a^2 = b^2 + c^2$, deci avem :

$$b^2 - a^2 = a^2 - c^2 \text{ sau } 1/(b^2 - a^2) = 1/(a^2 - c^2),$$

deci punctul lui STEINER se găsește pe mediana AG și potențialele lui se vor găsi pe aceeași mediană. De aceeași proprietate se bucură și punctele permutante ale lui S, față de vârfurile corespunzătoare ale triunghiului ABC.

26. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_6$ sunt segmentele determinate de bisectoarele unghiurilor unui triunghi ABC, pe laturile opuse a, b, c , să se demonstreze relația :

$$b/a_1 a_2 + a/a_3 a_4 + c/a_5 a_6 = \frac{1}{R} [\sum \cotg A + \sum \cotg \frac{1}{2}A].$$

MARIN GH. DUMITRESCU.

R. Se ține seamă de relațiile :

$$a_1/a_2 = c/a \text{ unde } a_1 + a_2 = b_1 \dots \text{ etc.}$$

$$\text{sau } a_1 = \frac{bc}{a+c}, a_2 = \frac{ab}{a+c}, \dots \text{ etc.}$$

27. Să se găsiască locul geometric al vârfului A al unui triunghi ABC, BC fiind fixă și având relația :

$$2/r_b r_c + (2n+1)/r_a^2 + 1/r_b^2 + 1/r_c^2 = 1/r^2. \quad n > 1.$$

M. ADAM.

R. Punând $1/r^2 = [(1/r_b + 1/r_c) + 1/r_a]^2$ obținem $n/r_a = 1/r_b + 1/r_c$, de unde $b+c = na = k$ (constant).

Locul deci este o elipsă, cu focarele în B și C.

28. Dacă punctele A și B, C și D, de pe o axă reală, sunt imaginar conjugate, raportul anarmonic (ABCD) e real.

GR. C. MOISIL.

R. Intr'adevăr, imaginile reale ale celor patru puncte imaginare formează un trapez isoscel $abcd$, deci sunt conciclice.

29. Ce devine expresia :

$$\frac{\sqrt[n]{1+x^m} + \sqrt[n]{1-x^m}}{\sqrt[n]{1+x^m} - \sqrt[n]{1-x^m}}, \text{ pentru } x = \sqrt[m]{\frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{(a+b)^n + (a-b)^n}}.$$

(Generalizarea prob. 35 Cul. de probleme, Algebră V).

M. Adam.

R. Aplicând proprietățile proporțiilor, relației :

$$x^m = \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{(a+b)^n + (a-b)^n},$$

găsim valoarea a/b .

30. Să se afle suma al cărei termen general este :

$$u_n = \arctg \frac{(x-1)x^{n-1}}{x^{2n-1} + 1}.$$

E. ȘTEFĂNESCU.

R. Termenul general se poate scrie :

$$u_n = \arctg \frac{1}{x^{n-1}} - \arctg \frac{1}{x^n},$$

deci :

$$S = \arctg 1 = \pi/4.$$

31. Dacă funcțiunea $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, pentru $x_1 = t^{a_1}x$, $x_2 = t^{a_2}y$, $x_3 = t^{a_3}z, \dots, x_n = t^{a_n}u$ devine omogenă în raport cu t , avem relațiunea :

$$a_1 f'_x + a_2 f'_y + \dots + a_n f'_u = m f(x, y, z, \dots, u),$$

m fiind gradul de omogenitate.

T. POPOVICIU.

R. Se va proceda ca și pentru demonstrarea teoremei lui EULER, adică luând derivatele membrilor relației

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = t^m f(x, y, \dots, u)$$

și făcând apoi $t = 1$.

32. Să se găsiască arcul, astfel ca suma patratelor liniilor sale trigonometrice să fie egală cu un patrat m^2 .

D. C. SCHILERU.

R. Enunțul conduce la următoarea ecuație în $\operatorname{tg}^2 x = z$:

$$z^2 - (m^2 - 5)z + 5 = 0.$$

33. Să se demonstreze că între elementele unui triunghi oarecare avem relația:

$$a^2 \cotg \frac{1}{2} A + b^2 \cotg \frac{1}{2} B + c^2 \cotg \frac{1}{2} C = 4p(R + r)$$

EMIL ȘTEFĂNESCU.

R. Înmulțim ambii membri ai relației care face obiectul Problemei 3079 cu p și observăm apoi că $p/ra = \cotg \frac{1}{2} A$, etc.

PROBLEME PROPUSE.

3088 ¹⁾. Fie R raza cercului circumscris și d distanța OH dintre centrul cercului circumscris și ortocentrul unui triunghi ABC . Să se demonstreze că dacă avem

$$2R \cos A = R \pm d,$$

triunghiul e isoscel sau dreptunghic.

AL. ȘCODRANG.

3111. Să se determine numărul prim a , astfel încât:

$$\varphi_{a+2}(a^x) = 1,$$

unde $\varphi_1(I) = \varphi(I)$, indicatorul lui I , $\varphi_2(I) = \varphi[\varphi_1(I)]$, etc.... adică $\varphi_i(I)$ fiind indicatorul de ordinul i al lui I .

CĂPITAN I. LINTEȘ.

1) În enunțul acestei probleme, dela pag. 480, *G. M.* Vol. XXVIII, strecurându-se o eroare de tipar, se publică din nou.

(N. R.)

3112. Fiind dat numărul $A = n!$, să se arate că:

$$N(A) \leq 2^{n-1},$$

$N(\alpha)$ reprezentând numărul divizorilor numărului α . Să se studieze chestiunile analoage pentru suma divizorilor și pentru produsul lor.

AL. TAUBER.

3113. Să se găsiască un număr de patru cifre, știind că numărul format de ultimele sale două cifre este rădăcina patrată a numărului format de ultimele sale trei cifre, iar suma cifrelor știind că este multiplu de 6.

FLORIAN ER. GEORGESCU.

3114. Care este patrulaterul de arie minimă, care se poate face cu patru laturi, de mărime dată?

I. IONESCU.

3115. Se consideră două cercuri cu centrele O și O' , care se taie în A și B . Tangenta în A la cercul O' taie cercul O în C , iar tangenta în A la cercul O taie cercul O' în D . Dreapta CD taie a doua oară cercurile O și O' respectiv în E și F , iar dreptele BE și BF întâlnesc tangentele AD și AC respectiv în G și H . Să se demonstreze: 1) că cercul BGH trece prin A ; 2) că e tangent cercurilor BEF și ACD ; 3) să se afle raporturile dintre razele acestor trei cercuri.

OCTAV ORĂNESCU.

3116. Fie r, r_a, r_b, r_c raza cercului înscris și a cercurilor exînscrise, p semi-perimetrul unui triunghi oarecare, d_a, d_b, d_c , distanțele dela vârfurile A, B, C la centrele cercurilor exînscrise, r' raza cercului înscris în triunghiul ortic. Să se demonstreze relațiunea:

$$\frac{r'}{p^2} = \frac{r_a - r}{d_a^2} + \frac{r_b - r}{d_b^2} + \frac{r_c - r}{d_c^2}.$$

N. P. ARCADIAN.

3117. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{a(x-1)^2 + x(a-1)^2 - 2(1-x+ax-a)\sqrt{ax}}{a(x+1)^2 + x(a+1)^2 - 2(1+x+ax+a)\sqrt{ax}} = ax.$$

MAIOR GH. I. LITEANU.

3118. I. Se consideră eliminantul, prin metoda lui SYLVESTER, al polinomului :

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

și al derivatei sale $f'(x)$.

Se cere relația ce există între acest eliminant și eliminantul obținut prin aceeași metodă, dar între polinoamele $f'(x)$ și $nf(x) - xf'(x)$.

Să se deducă de aici calculul discriminantului ecuației de gradul al treilea.

TH. ANGHELUȚĂ.

3119. Să se demonstreze relațiunea :

$$\cos^3 \frac{1}{2}\pi + \cos^3 \frac{2}{3}\pi + \cos^3 \frac{3}{4}\pi + \cos^3 \frac{4}{5}\pi = 0,$$

și să se arate că ea subsistă pentru orice exponent întreg impar și pozitiv.

CONST. I. GEORGESCU.

3120. Să se demonstreze că în orice triunghi avem relațiunile :

$$-a \cotg A + b \cotg B + c \cotg C = 2(r_a - R),$$

$$a \cotg A - b \cotg B + c \cotg C = 2(r_b - R),$$

$$a \cotg A + b \cotg B - c \cotg C = 2(r_c - R).$$

Adunând parte cu parte aceste trei relațiuni, obținem o relațiune cunoscută.

GH. D. POPESCU.

Dela apariția ultimului număr s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (3047, 77, 104, 06); Andrieșescu Gh. (3097); Angelescu Tr. (3017, 21, 31, 57, 82, 83, 93); Antoniu I. (E.); Arcadian N. (2610, 891, 978, 3051, 68, 74, 93, 102, E.); Ballan E. (2898, 3053, 97, N. P.); Berdan C. (2861, 87, 3093); Blumenfeld D. (3059, 74, 91, 93, 97, 99, E.); Bogdan M. (2887, 88, 3052); Brătescu D. (3076, 104, E. P.); Bușilă A. (3066, 67, 76, E.); Coșereanu I. (2613, E.); Coșniță V. (E.); Dobrescu-Băbici F. (2799, 887, 3064, 67, 68, 72, 74, 76, 77, 82, 83, 93, 97, 102, 04, 06, E.); Dumitrescu M. A. (3105); Dumitrescu G. M. (3093, 102, 04); Focșeneanu M. (E. N. P.); Georgescu Chiriac (3097); Georgescu E. C. (E.); Georgescu I. C. (3052, 53); Ghițescu V. (2887, 3068, 104); Goldstein I. (3059, 85, 97, 99); Grabowsky E. (3102, 04, 05); Grofșoreanu Gh. (3082, 93, 104); Guțu Al. (3053); Ionescu-Brezuica I. (3064, 67, 68, 76, 97, E.); Ionescu-Corneliu C. (3032, 67, 74, 104, E.); Ionescu I. L. (2610); Ionescu Paul (3104); Katz S. (3091, 93, 104, E.); Lăzărescu Șt. (2887, 3017, 21, 53, 80, 82, E.); Marcus Fr. (3067, 72); Marin Șt. (3059, 68, 97, 99, E. P.); Mihăilescu R. (3093); Mitescu D. (2838); Negretzu Fl. (3073, C. P. R.); Niculescu Al. (2974, 94, 3086); Orănescu O. (E. P.); Pălărieru E. (3099, 104); Popăa O. (2887, 946, 50, 78, 3048, 51, 52, 67, 71, 106, E. N. R.); Popescu N. (E.); Popovici Dan (3093, 102); Popoviciu Tib. (3099, N.); Samoilă D. (3099, E.); Schileru C. D. (3099, 104, E.); Șerbănescu I. (3097, 99); Solacolu Ș. (3057, 76, 83, 93, 97, 102, 04, 05); Solomon W. (3052, 67, 73, 77, N.); Stănculescu C. (3097, E.); Stavrut Gh. (3102); Ștefan M. (3077); Ștefănescu E. (3072, 73, 74, 82, 83, 93, 97, 99, 101, 04, E. P.); Tauber Al. (2918, 3077, 97, 99, 101, 04); Țânțăreanu P. (3017); Teodorescu D. (3097); Urzică A. (E.); Udrisky Tr. (3053); Vasilache S. (3064, 104, E.); Vasiliu I. (3093, 99, 104, E.); Zuckerman B. (3053); Weiss L. (2887, 972, 94, 3034, 51, 53, 77, 91, 93, 97, 101, 04, E.); Weiss S. (2978, 3043, 67, 73, 74, 93, E.).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

La redacția revistei „Gazeta Matematică” se primesc abonamente pentru „Revista de matematicas y fisicas elementales” din Buenos-Aires, Anul V (Mai 1923 — Aprilie 1924). Costul unui abonament anual este de 70 lei.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1948, 2035, 63, 91, 108, 16, 30, 274, 95, 329, 47, 49, 54, 72, 77, 86, 428, 31, 58, 512, 53, 75, 86, 98, 640, 51, 61, 69, 75, 82, 89, 773, 818, 35, 51, 60, 72, 79, 95, 906, 10, 13, 20, 29, 31, 32, 45, 55, 91, 93, 3007, 14, 19, 45, 56, 75, 87, 89, 90 și 92 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

28 VOLUME

Colecțiunea întreagă Lei 1500,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 70 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI și XXV, care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie*. (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

2. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. N. Abramescu, *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăogită*, 1921. (Epuizată).

4. A. G. Ioachimescu și G. Țițeica, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* Lei 15,—

6. Tr. Lalescu, *Tratat de Geometrie analitică*,
Fascicola I (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice Lei 20,—

7. Gh. Lazăr, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) Lei 5,—

8. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme Lei 60,—

9. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, *Vocabular Matematic* Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăoga taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul*. Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septembrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimite D-lui: I. D. Teodor, Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la casierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București.

*pro- asociativă pt. cultura
și literatură poporului român*

*din
Librie*

AZETA MATEMATICĂ

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXIX.

NUMĂRUL 4. — DECEMBRIE 1923

SUMARUL

1. Câteva date asupra lui Simion Marcu,
zis apoi Marcovici, ca profesor de
matematică *Tr. Lalescu.*
2. Rezolvarea unui sistem de ecuații . . . *Ing. N. Kaufmann.*
3. Note Matematice: 23—28.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 107.
7. Probleme rezolvate: 3036, 3039, 3074, 3099.
8. Exerciții: 34—44.
9. Probleme propuse: 3116, 3121—3130.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET

1923



SPRE ȘTIINȚA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică”** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXIX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politehnică din București, **Tr. Lalescu**, Doctor în Matematici, Profesor Universitar și **I. D. Teodor**, Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Școala Politehnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice” se vor trimite D-lui GEORGE BORNEANU, Inginer, Directorul Fabricilor de chibrituri și timbre, București.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor rediă în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela D-l Cassier *I. D. Teodor*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poștă.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evita confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

În vederea sporirii taxelor poștale, corespondenții pot trimite de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsa spații albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecință.

Nu se admite însă a se trata pe aceeași foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, creațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ”, trebuie să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 56, 59, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 94, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 59, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 53, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 16, 26, 36, 47, 53, 56, 61, 95, 3005, 08, 13, 19, 42, 45, 55, 60, 69, 75, 89, 90, 95, 96, 98, 100, 07, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

G A Z E T A M A T E M A T I C A

ANUL XXIX

SUPLIMENT

No. 4

RECREAȚIUNI

1. **Numere rimate.** (Urmare). (Vezi Suplimentul dela No. 1 Anul XXIX).
12. Sus pe turnul fără cruce Duhul rău zbierând se duce Și tot turnul s'a clătît, Și lovind arama rece Ore negre 12 Bate'n clopotul dogit. (ALEXANDRI).
15. Până ce am petrecut, 5 perechi de cizme-am rupt Și până oi mai petrece, Oi mai rupe 15. (EMINESCU).
100. Prin foc, prin sânge, prin gloanțe, prin fum Prin mii de baionete Urcăm, luptăm, iată-ne acum Sus, sus la parapete. Alah! Alah! Turcii răcnesc Sărind pe noi 100 Noi punem steagul românesc Pe crâncena redută. (ALEXANDRI).
1000. Sultanul din Maroc Are în împărăție, 100 și 1000 De armăsari cu foc. (ALEXANDRI).
1001. Să mi se pare acum că crești De când răsare luna În umbra dulcilor povești Din nopți 1001. (EMINESCU).
2000. Arborii sunt țepe, 2000, Turci 'n tot atâtea țepe, Morți și vii. (BOLINTINEANU).
- ∞ . Cerul lin neconținut Și amorul ∞ . (BOLINTINEANU).
- $\frac{1}{2}$. Un orologiu sună noaptea $\frac{1}{2}$ (jumătate) La castel în poartă oare cine bate? (BOLINTINEANU).
- $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. Căci eu ție îți voi da Împărăția $\frac{1}{2}$ (jumătate) Și averea $\frac{1}{3}$ (a treia parte). (Cântec popular).

I. I.

* * *

2. **Alte jumătăți neegale!** În Suplimentul dela No. 5 anul trecut, s'a dat un exemplu de jumătăți neegale. Iată altul, extras din *Elemente de geologie*, de I. SIMIONESCU și T. A. BĂDĂRĂU, pag. 134:

„Pe când azi însă, majoritatea acestor locuitori ai apelor au vase, iar coada despicată în două jumătăți simetrice, peștii paleozoici ereau sgârcoși, iar innotătoarea codală formată din două jumătăți neegale“.

A. A. BUȘILĂ.

* * *

3. **Domino magice.** Se cere a se așeza n^2 domino pe n linii și n coloane, așa ca suma punctelor de pe linii, coloane și diagonale să fie aceeași. Iată exemplu pentru $n = 3, 4, 5$:

01	26	03
06	04	02
05	00	16

03	13	12	26
11	36	02	14
06	01	15	05
16	04	25	00

05	02	34	41	44
33	63	52	31	01
24	21	00	46	62
40	45	61	32	11
51	22	06	03	35

Sumele conținute sunt respectiv 12; 18; 27. Se mai pot găsi și alte soluții.

* * *

4. **Constituția și matematica.** În ziarul „Adevărul“, D-1 D. I. S. scrie următoarele :

„Este totuși ceva exact în argumentările D-lui Z.... Dacă, 1) Constituția reprezintă raportul de forțe al claselor sociale; 2) Dacă în România nu avem decât o singură clasă, aceea reprezentată de partidul liberal, atunci raportul de forțe, adică Constituția, va fi egală cu unu pe zero, $1/0 = 0$, egal zero. Este exact acea nulitate a Constituțiunii, asupra căreia sunt de acord chiar și opozanții“.

Argumentarea de mai sus, demonstrează numai că autorul a fost cam certat cu matematica în liceu !

W. SOLOMON.

* * *

5. **Matematica neaplicată.** MORGAN povestește că LACOMME, în 1836, făcuse un rezervor mare de apă și voia să-i paveze fundul cu piatră. Dorind să știe câtă piatră trebuie să cumpere, s'a adresat unui profesor de matematică, spunându-i care este diametrul interior al rezervorului. Profesorul îi răspunde :

„Imi este cu neputință să-ți spun câtă piatră îți trebuie, căci nimeni până azi nu a putut să găsească valoarea raportului cercului către diametru“.

I. I.

* * *

6. **Drumul cel mai scurt dela un punct la altul.** Geometria ne spune că acest drum este linia dreaptă. Ecōnomiștii nu sunt de această părere totdeauna. În adevăr, în *Economia politică*, de M. DUMITRESCU găsim scris :

„Deși cu modul acesta fac două operațiuni de schimb, în loc de una singură, în realitate cele mai adesea prin mijlocul acesta, ajung mai repede la rezultat decât cu schimbul direct. Dovadă, că și în materie economică, este exact adagiul, că nu totdeauna linia dreaptă este drumul care te duce cel mai repede dela un punct la altul“.

A. BUȘILĂ.

* * *

7. **Impresii dela Concursul „Gazetei Matematice“.**

Ereă o dimineață frumoasă și caldă de primăvară... ; o dungă roșie ca sângele arată la orizont răsăritul soarelui.... ; o liniște profundă cuprindea totul....

Ca niciodată, seninul cerului nu mi-a atras privirea, razele soarelui nu mi-a înveselit fața, măreția firii nu mi-a mișcat sufletul.... Ereă dimineața concursului....

Spiritul imi eră încătușat de mulțimea problemelor ce se perindau iute, tot mai iute, într'un vârtej nesfârșit, care căută par'că să mă cuprindă, să mă întunece ; gândurile, în zbor nebun, năvăliau unele peste altele.

Nu voiu putea niciodată să descriu întreaga gamă a emoției, pe care am simțit-o în fața plicului închis, purtător de taine ; nici nu voiu putea exprima nespusa bucurie pe care am avut-o, când vedeam pe toți aceia, profesori, ingineri, ofițeri, școlari de cari iubirea adevărului și a științei, imi apropiă sufletul.

Frigurile examenului înscris și oral m'au ținut două zile,...

În fine, banchetul; toast după toast se succedau, în entuziasmul cald care ne coprindea întreaga ființă... La evocarea trecutului glorios al *Gazetei Matematice*, cuvintele pline de imagini și învățături ale vorbitorilor, cari și-au sacrificat o parte din viață pe altarele științei, ne dădeau impresiuni necunoscute, nesimțite încă.

Când am plecat.... noaptea se lăsase peste orașul adormit...; stelele trimiteau pe pământ lumina lor senină și liniștită...

Cu sufletul pierdut în acea divină lumină cosmică, viața noastră, a tuturor concurenților, nu era consacrată decât *Matematicii*.

I. AL. STOENESCU.

* * *

8. **Deșertul Parisului!** Într-o scrisoare matematicianul ABEL scria:

„Amice, trimite-mi câteva cuvinte care să mă consoleze și să mă întărească în singurătatea în care mă găsesc, căci deși mă găsesc în orașul cel mai zgomotos după continent, eu mă aflu ca și într'un deșert”.

I. I

* * *

9. **Ce aduce lipsa unei litere.** Lipsa unei litere într-o formulă o distruge; dar acelaș lucru se întâmplă și în vorbire, când lipsa unei litere schimbă chiar sensul ideii. Așa de exemplu în Trigonometria de SPIRU HARET, ediția II, pag. 100, se poate citi:

„Tablele trigonometrice *cele mai uitate*, sunt tablele lui LALANDE”.

M. G. DUMITRESCU.

* * *

10. $4 = 2$. Vom da o demonstrație trigonometrică. În *Gazeta Matematică* Anul XXVII pag. 413, la rezolvarea problemei 2924, se dă relația:

$$h_a + b \sin C = c \sin B,$$

Înmulțim cu a și observăm că:

$$2S = ah_a = ab \sin C = ac \sin B,$$

găsim înlocuind:

$$2S = 4S,$$

$$2 = 4.$$

E. ILIESCU.

* * *

11. **O demonstrație rapidă.** În *Gazeta Matematică* Anul XXVIII pag. 438 la exercițiul 84, se cere a se arăta că:

$$r \sum \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sum (p-a) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A.$$

Dacă împărțim ambii membrii cu $\sum$ și cu $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A$, ne rămâne:

$$r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} A,$$

ceea ce este adevărat.

E. ILIESCU.

* * *

12. **Cugetări ale matematicianilor.**

Orice lemn nu este bun pentru a face din el un Mercur, (PITAGORA).

Iată că am aruncat zarul și că încep să scriu cartea mea; ea va fi citită de cei prezenți sau de posteritate, puțin îmi pasă; ea poate să aștepte pe cititorul ei 100 de ani; Dumnezeu nu a așteptat 6000 de ani pe un contemplant al operilor sale!

(KEPLER).

Filosofia este scrisă în această carte imensă care se ține totdeauna deschisă sub ochii noștri, — Universul, — și care nu poate să se priceapă dacă mai întâi nu i-am învățat limba și nu-i cunoaștem caracterul întrebuit pentru a o scrie. Această carte este scrisă în limba matematică; caracterele ei sunt triunghiurile, cercurile și alte figuri geometrice, fără ajutorul cărora este imposibil omenește ca să-i pricepem un singur cuvânt.

(GALILEO).

Tot șirul de oameni din decursul veacurilor, trebuie privit ca un singur om care există continuu și care învață neîncetat.

(PASCAL).

Științele sunt principalul ornament al păcii, cel mai mare instrument al războaielor și cel mai bun tezaur al geniului uman.

(LEIBNIZ).

I. I.

* * *

13. Realitate imaginară. Din formulele lui EULER.

$$\sin x = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) \cdot \frac{1}{i}, \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),$$

scoatem:

$$\operatorname{tg} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \cdot \frac{1}{i} = \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1} \cdot \frac{1}{i} = \frac{1 - \frac{1}{e^{2ix}}}{1 + \frac{1}{e^{2ix}}} \cdot \frac{1}{i}.$$

Facem $x = \infty$ și avem:

$$\operatorname{tg} \infty = \frac{1}{i}.$$

Dar $\operatorname{tg} \infty$ are aci o valoare reală între $-\infty$ și $+\infty$. Deci toate mări-mile reale sunt imaginare. Bine a zis MIRON COSTIN:

«Deșertăciunea deșertăciunilor, Toate sunt deșertăciuni!»

S. POPESCU.

* * *

14. Cărți necitite, Cărți rătăcite! Se povestește că un medic auzind că MAC LAURIN a publicat un *Tratat de fluxiuni*, l'a cumpărat și l'a aruncat în Bibliotecă, fără să-l citească. De altfel, nici nu-l putea citi, căci era calculul infinitezimal după metoda lui NEWTON. Tratatul analog al lui NEWTON a fost tradus de BUFFON în franțuzește. Librarul editor l'a pus în rafturile cu cărți de medicină!

Pot spune că în o bibliotecă tehnică dela noi, un *tratat de arhitectura-atomelor* l'am găsit în dulapul cu cărți de *Construcțiuni civile*.

I. I.

CATEVA DATE ASUPRA LUI SIMION MARCU, ZIS APOI MARCOVICI, CA PROFESOR DE MATEMATICA.

• În numărul trecut al Gazetei Matematice, am atras atențiunea asupra faptului că SIMION MARCOVICI a fost probabil *cel dintâi profesor de matematici* român, numit oficial după Gheorghe Lazăr.

Acest detaliu nu s'a pus în evidență până acum, fiindcă SIMION MARCOVICI a fost considerat ca profesor de litere, consacrat printr'o îndelungată activitate didactică și prin publicațiuni didactice și traduceri literare, care ocupă dealtfel un loc onorabil în literatura vremii de atunci. Cum se face dar că prima sa îndeletnicire didactică a fost în specialitatea științifică? Cât a durat această activitate?

Explicațiunea este foarte simplă. SIMION MARCU făcea parte din grupul de patru bursieri trimiși de Eforia Școlilor Muntene în 1821 în străinătate, dintre aceștia, numai PANDELE, cu numele complet PANDELE STAMATE, avea însărcinarea de a studia matematicile și Eforia puneă toate speranțele sale în acest tânăr, care izbutise din primul an să atragă atențiunea profesorilor săi din Piza și în 1823 trimesese cel dintâi «atestaturile» sale, luate cu deplin succes. Nenorocirea face însă că, plecat la Paris, PANDELE moare acolo în mod tragic, așa în cât în Iunie 1824, Eforia Școalelor este nevoită să-și caute un alt bursier pentru această «grea știință care este temelul celorlalte științe și fără de care un neam nu poate fi luminat». După o încercare nereușită cu un tânăr GHEORGHE ATANASIU, Eforia se adresează bursierilor săi aflători la Paris și le pretinde acestora să învețe fiecare matematicile. La această adresă, EUFROSIN POTECA, care era secretarul grupului, răspunde în 15 Septembrie 1824 o foarte sugestivă scrisoare cu începutul următor:

«Ne porunțiți să învățăm Matematica curată și aplicată în soroc de doi ani; la aceasta noi răspundem că de s'ar putea învăța din poruncă, Dumneavoastră ați porunci robilor D-stră și așa ați face lesne mulți matematici și filosofi, însă în doi ani nu este prin putință, aceasta nu e pricinuire ci cuvânt adevărat».

Și mai departe, pe un ton înțepat:

«Ne vestiți încă mai nainte că întorcându-ne, numai la cei ce vor ști și vor putea paradosi Matematica, se va da leafă, aceasta

mi-ar plăcea, când s'ar hotări și asupra celor ce pretenderisesc slujbe celor mai mari ale Statului»¹⁾).

Dar apoi, potolit:

«Deci dar, acum noi vom fi următori precum ne porunciți a ne indeletnici la Științele Matematice în toată vremea cât ne veți lăsa aici la Paris, KIR SIMION *se fâgăduiește că după ce va învăța cât va putea le va și paradosi*».

Iată dar situațiunea: Dintre cei trei bursieri rămași după moartea lui PANDELI STAMATE, SIMION MARCU s'a oferit a face studii speciale de matematici pentru a putea ocupa postul de profesor de științe la colegiul național românesc din București, asupra căruia insistă în special Eforia Munteană.

O altă dovadă că în ultimul timp al șederii sale la Paris, SIMION MARCU s'a ocupat cu studiul matematicilor, găsim și în Budgetul Țării Românești pe 1825—26, unde este trecută, ca dată lui SIMION MARCU la Paris, suma de 6290 lei «din care 2000 lei pentru cumpărare de instrumenturi pentru Geometrie».

Evident însărcinarea lui MARCOVICI era provizorie, fiindcă adevăratul urmaș ca bursier al lui PANDELE a fost PETRACHE POENARU, trimis încă din Martie 1824 la Viena pentru specialitatea matematicilor.

În 1830, îl găsim pe MARCOVICI funcționând încă în calitatea de profesor de Aritmetică, la Colegiul Național strămutat provizoriu în hanul lui Șerban-Vodă²⁾. Dar după aceea, în 1832, când se reîncep cursurile, întrerupte în 1831, găsim ca profesor de aritmetică și geometrie pe GHEORGHE POPP, iar SIMION MARCOVICI trecuse la altă catedră. Putem, prin urmare, spune că perioada de profesorat, ca profesor de Matematici a lui SIMION MARCOVICI a fost 1827—1830.

Putem deci restabili lista profesorilor de matematici la Colegiul Sf. Sava până la venirea fraților POPP, astfel:

1818—1821 GHEORGHE LAZĂR.

1821—1827 ION ELIAD și Inginerul RĂDUCAN MĂINESCU.

1827—1830 SIMION MARCU.

1) I. BIANU. Întâii bursieri români în străinătate.—Scrișori ale lui EUFROSIN POTECA 1822—25. Revista nouă, 15 Noembre 1888. pag. 421 și urm.

2) A. D. XENOPOL. Istoria Contemporană a poporului Român pag. 251.

Perioada doua nu este cunoscută cu precizie și ar fi interesant ca să fie precizată. De la 1830, lista profesorilor este mai lesne de stabilit și cred că voi fi în măsură să o public mai târziu.

TR. LALESCU.

REZOLVAREA UNUI SISTEM DE ECUAȚII*)

Fie sistemul de ecuații:

$$\frac{a-x_1}{x_1-x_2} = \frac{a-x_1-x_2}{x_2-x_3} = \frac{a-x_1-x_2-x_3}{x_3-x_4} = \dots = \frac{a-x_1-x_2-\dots-x_{n-1}}{x_{n-1}-x_n} = \alpha$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 2a.$$

Dacă scădem rapoartele consecutive de ordinul i și $(i+1)$, găsim:

$$\frac{x_{i+1}}{x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2}} = \alpha,$$

$$\dots \quad x_i + x_{i+2} = \frac{1+2\alpha}{\alpha} x_{i+1}.$$

Să punem:

$$\frac{1+2\alpha}{\alpha} = k \quad \dots \quad \alpha = \frac{1}{k-2} \quad (1)$$

și atunci găsim

$$x_i + x_{i+2} = k x_{i+1} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n-2) \quad (2)$$

Necunoscutele $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ în număr de n , constituiesc un șir a cărui scară de recurență este (2). Dându-ne primii doi termeni x_1 și x_2 ai șirului, vom găsi pe ceilalți. Ei însă sunt determinați prin condițiunile date:

$$\frac{a-x_1}{x_1-x_2} = \alpha, \quad x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 2a \quad (3)$$

*) Sistemul de ecuații studiat aci face obiectul problemei No. 1490 propusă de D-l I. IONESCU în *Gazeta Matematică*, Anul XV pag. 96.

Cu acest articol, acea problemă devine rezolvată.

Formând termenii consecutivi găsim :

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= k x_2 - x_1 \\ x_4 &= k x_3 - x_2 = (k^2 - 1) x_2 - k x_1 \\ x_5 &= k x_4 - x_3 = (k^2 - 2k) x_2 - (k^2 - 1) x_1 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Se vede că x_i este de forma :

$$x_i = u_i x_2 + v_i x_1.$$

Să găsim expresiunile lui u_i și v_i . Avem :

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= u_{i+1} x_2 + v_{i+1} x_1 = k x_i - x_{i-1} \\ &= k (u_i x_2 + v_i x_1) - (u_{i-1} x_2 + v_{i-1} x_1), \\ x_{i+1} &= (k u_i - u_{i-1}) x_2 + (k v_i - v_{i-1}) x_1. \end{aligned}$$

Identificarea ne dă :

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= k u_i - u_{i-1}, & v_{i+1} &= k v_i - v_{i-1} \\ \therefore u_{i-1} + u_{i+1} &= k u_i, & v_{i-1} + v_{i+1} &= k v_i. \end{aligned}$$

Deci u_i și v_i formează două șiruri de numere având tot scara de recurență (2).

Din compararea cu (4) scoatem :

$$v_3 = -1; \quad v_4 = -u_3; \quad v_5 = -u_4; \dots v_i = -u_{i-1}$$

și prin urmare găsim :

$$x_i = u_i x_2 - u_{i-1} x_1. \quad (5)$$

Pentru un șir de n numere, care au o scară de recurență, putem face un determinant de n^2 termeni a cărui dezvoltare să ne dea termenul de rangul n al șirului. Pentru scara (2) să considerăm determinantul :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & k \end{vmatrix}$$

Dezvoltarea după prima linie ne dă :

$$\begin{aligned} \Delta_n &= k \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}, \\ \therefore \Delta_{n-2} + \Delta_n &= k \Delta_{n-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

adică tot scara de recurență (2). Calculând direct, găsim :

$$\Delta_1 = k = u_3; \Delta_2 = k - 1 = u_3; \Delta_3 = k^2 - 2k = u_5; \dots \Delta_{i-2} = u_i.$$

Așa dar, (5) devine :

$$x_i = \Delta_{i-2} x_2 - \Delta_{i-3} x_1. \quad (7)$$

Expresia lui k_i este găsită dacă am cunoaște pe x_1 și x_2 . A doua din condițiile (3) ne dă :

$$\sum_1^n x_i = 2a,$$

și înlocuind pe x_i cu valoarea dată de (7), găsim :

$$x_2 \sum_1^n \Delta_{i-2} - x_1 \sum_1^n \Delta_{i-3} = 2a. \quad (8)$$

Să găsim expresia celor două sume. Se găsește că avem din (6) :

$$\begin{aligned} \Delta_0 + \Delta_2 &= k \Delta_1 \\ \Delta_1 + \Delta_3 &= k \Delta_2 \\ \Delta_2 + \Delta_4 &= k \Delta_3 \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta_{n-1} + \Delta_{n+1} &= k \Delta_n. \end{aligned}$$

De aci scoatem, punând S_n pentru $\sum_1^n \Delta_i$:

$$(S_n + \Delta_0 - \Delta_n) + (S_n - \Delta_1 + \Delta_{n+2}) = k S_n,$$

$$\therefore S_n = \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n - \Delta_1 + \Delta_0}{k - 2}.$$

Însă avem :

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= k \Delta_1 - \Delta_2 = k^2 - (k^2 - 1) = 1 \\ \Delta_{-1} &= k \Delta_0 - \Delta_1 = k - k = 0 \\ \Delta_{-2} &= k \Delta_{-1} - \Delta_0 = 0 - 1 = -1. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

De aci, reese că avem :

$$S_n = \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n - k + 1}{k - 2}. \quad (9)$$

Prin urmare :

$$\sum_1^n \Delta_{i-2} = S_n + \Delta_{-1} + \Delta_0 - \Delta_{n-1} - \Delta_n = S_n - \Delta_{n-1} - \Delta_{n+1}.$$

$$\sum_1^n \Delta_{i-3} = \sum_1^n \Delta_{i-2} + \Delta_{-2} - \Delta_{n-2} = S_n - \Delta_{n-2} - \Delta_{n-1} - \Delta_n.$$

Cu acestea, egalitatea (8) devine :

$$(S_n - \Delta_{n-1} - \Delta_{n+1}) x_2 - (S_n - \Delta_{n-2} - \Delta_{n-1} - \Delta_n) x_1 = 2a.$$

$$\therefore (1 + S_{n-2})(x_2 - x_1) + (1 + \Delta_{n-2}) x_1 = 2a.$$

Dar, după prima din relațiunile (3), avem :

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{\alpha}(a - x_1),$$

și înlocuind, avem :

$$-\frac{1}{\alpha}(1 + S_{n-2})(a - x_1) + (1 + \Delta_{n-2}) x_1 = 2a.$$

$$\left(\frac{1 + S_{n-2}}{\alpha} + 1 + \Delta_{n-2}\right) x_1 = 2a + \frac{a}{\alpha}(1 + S_{n-2}),$$

și ținând seamă de notațiile dela (1) și de relațiile (9), avem :

$$\frac{1 + S_{n-2}}{\alpha} + 1 + \Delta_{n-2} = k - 2 + \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} - k + 1 + 1 + \Delta_{n-2} = \Delta_{n-1},$$

$$\frac{1 + S_n}{\alpha} + 2 = k - 2 + \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} - k + 1 + 2 = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} + 1.$$

Așa dar :

$$x_1 = a \frac{\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} + 1}{\Delta_{n-1}} = a \frac{\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} + \Delta_0 - \Delta_{-1}}{\Delta_{n-1}}.$$

Din (3), scoatem :

$$x_2 = x_1 - \frac{a - x_1}{\alpha} = x_1 - (k - 2)(a - x_1) = (k - 1)x_1 - (k - 2)a,$$

$$x_2 = k(x_1 - a) - (x_1 - 2a).$$

Dar :

$$x_1 - a = a \frac{-\Delta_{n-2} + 1}{\Delta_{n-1}}, \quad x_1 - 2a = a \frac{\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} + 1 - 2\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-1}}$$

și cum (3) ne dă :

$$k \Delta_{n-2} = \Delta_{n-1} + \Delta_{n-3},$$

găsim :

$$x_2 = k(x_1 - a) - (x_1 + ka) = a \frac{-\Delta_{n-1} - \Delta_{n-3} + k - \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2} - 1 + 2\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-1}},$$

$$\dots \quad x_2 = a \frac{\Delta_{n-2} - \Delta_{n-3} + k - 1}{\Delta_{n-1}} = a \frac{\Delta_{n-2} - \Delta_{n-3} + \Delta_1 - \Delta_0}{\Delta_{n-1}}.$$

Avem apoi :

$$x_3 = kx_2 - x_1 = a \frac{k\Delta_{n-2} - k\Delta_{n-3} + k\Delta_1 - k\Delta_0 - \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2} - \Delta_0 - \Delta_{-1}}{\Delta_{n-1}}$$

și cum :

$$k \Delta_{n-2} = \Delta_{n-1} + \Delta_{n-3}, \quad k \Delta_1 = \Delta_0 + \Delta_2,$$

$$k \Delta_{n-3} = \Delta_{n-2} + \Delta_{n-4}, \quad k \Delta_0 = \Delta_{-1} + \Delta_1,$$

găsim :

$$x_3 = a \frac{\Delta_{n-3} - \Delta_{n-4} + \Delta_2 - \Delta_1}{\Delta_{n-2}}.$$

Analog găsim :

$$x_4 = a \frac{\Delta_{n-4} - \Delta_{n-5} + \Delta_3 - \Delta_2}{\Delta_{n-3}}.$$

Aceasta ne conduce la formula generală :

$$x_i = a \frac{\Delta_{n-1} - \Delta_{n-i+1} + \Delta_{i-1} - \Delta_{i-2}}{\Delta_{n-1}}.$$

Pentru a ne convinge că inducțiunea este bine făcută, vom face verificarea sistemului. Avem :

$$\sum_1^p x_i = a \frac{\Delta_{n-1} + \Delta_{p-1} - \Delta_{n-p-1}}{\Delta_{n-1}}.$$

Dacă $p = n$, găsim :

$$\sum_1^n x_i = a \frac{\Delta_{n-1} + \Delta_{n-1} - \Delta_{-1}}{\Delta_{n-1}} = 2a, \quad (\Delta_{-1} = 0),$$

care este una din relațiunile date. Apoi :

$$\begin{aligned} a - x_1 - x_2 - \dots - x_p &= a - a \frac{\Delta_{n-1} + \Delta_{p-1} - \Delta_{n-p-1}}{\Delta_{n-1}} = a \frac{\Delta_{n-p-1} - \Delta_{p-1}}{\Delta_{n-1}}, \\ x_p - x_{p+1} &= a \frac{\Delta_{n-p} - \Delta_{n-p-1} + \Delta_{p-1} - \Delta_{p-2}}{\Delta_{n-1}} - a \frac{\Delta_{n-p-1} - \Delta_{n-p-2} + \Delta_p - \Delta_{p-1}}{\Delta_{n-1}} \\ &= a \frac{\Delta_{n-p} + \Delta_{n-p-2} - 2\Delta_{n-p-1} + 2\Delta_{p-1} - \Delta_{p-2} - \Delta_p}{\Delta_{n-1}} \\ &= a \frac{k\Delta_{n-p-1} - 2\Delta_{n-p-1} + 2\Delta_{p-1} - k\Delta_{p-1}}{\Delta_{n-1}} \\ &= a(k-2) \frac{\Delta_{n-p-1} - \Delta_{p-1}}{\Delta_{n-1}}, \end{aligned}$$

așa că :

$$\frac{a - x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_p}{x_p - x_{p+1}} = \frac{a}{a(k-2)} = \frac{1}{k-2} = \alpha.$$

Observări. 1. Să facem $n-i+1 = i'$ în formula (10). Găsim :

$$x_i = \frac{\Delta_{i-1} + \Delta'_{i'-1} - \Delta_{i-2} - \Delta'_{i'-2}}{\Delta_{n-1}}.$$

Simetria formulei arată că $x'_i = x_i$, sau :

$$x_i = x_{n-i+1}.$$

Deci valorile necunoscutelor egal depărtate de cele extreme sunt egale.

2. Dacă $k=2$, $\alpha=\infty$, determinanții Δ formează o progresiune aritmetică, căci $\Delta_{n+2} - \Delta_{n+1} = \Delta_{n+1} - \Delta_n$ și cum rația este 1, rezultă $\Delta_n = n+1$. Ecuația (10) ne dă atunci

$$x_i = a \frac{1+1}{n} = \frac{2a}{n},$$

adică $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$. Toate necunoscutele sunt egale, cum de altfel se poate deduce direct din sistemul dat.

3. Dacă ξ și η sunt rădăcinile ecuației :

$$z^2 - kz + 1 = 0,$$

avem :

$$\Delta n = \frac{\xi^{n+1} - \eta^{n+1}}{\xi - \eta}.$$

Lăsăm demonstrația acestui rezultat, ca și pe a celor următoare, în seama cititorilor.

4. Expresia analitică a lui Δ_n este :

$$\Delta_n = k^n - \frac{n-1}{1} k^{n-2} + \frac{(n-3)(n-2)}{1 \cdot 2} k^{n-4} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} k^{n-6} + \dots$$

5. Desvoltând raportul $\Delta_n : \Delta_{n-1}$ în fracție continuă, găsim :

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = k - \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{\ddots}}}$$

6. Avem relația :

$$z \Delta_{n+1} - \Delta_n = z^{n+2},$$

z fiind o rădăcină a ecuației dela No 3.

7. Intre rădăcinile aceleiași ecuații mai avem :

$$\xi^n + \eta^n = \Delta_n - \Delta_{n-2}.$$

8. Trei determinanți consecutivi sunt legați prin relația :

$$\Delta_n^2 - \Delta_{n-1} \Delta_{n+1} = 1.$$

9. Doi determinanți consecutivi sunt legați prin relația :

$$\Delta_{n+1}^2 - k \Delta_{n+1} \Delta_n + \Delta_n^2 = 1.$$

Reșița, 18 Septembrie 1923.

Ing. N. KAUFMANN.

NOTE MATEMATICE.

23. *Alte zece algebre diverse.* (Vezi nota 6 pag. 47).

31. **Aritmeticală.** G. Peacoks. — Treatise on algebra I. Arithmetical algebra 1842.

32. **Boleană.** E. J. Dines. — Complete existential theory of Scheffer's postulate for Bolean algebras. Vezi *Bulletin of the American mathematical Society*, vol. XXI. pag. 183.

33. **Complimentară.** Z. A. Martini. — Algebra complementare. Livorno 1919.

34. **Cuantică.** E. B. Elliot. — Algebra of cuantics. Oxford 1913.

35. **Diviziunii.** J. H. M. Wodderburn. — On division algebras. Vezi *Bulletin of the American mathematical Society*, vol. XXVI pag. 338.

36. Fizicei. *A. Macfarlane.* — Principles of the algebra of physics.
37. Modernă. *L. Mathiessen.* — Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. 1878.
38. Simbolică. *G. Peacock.* — Treatise on algebra. II. Symbolical algebra 1845.
39. Secundară. *G. E. Fischer & G. Schwatt.* — Complete secondary algebra. New-York 1912.
40. Universitară. *H. N. Robinson.* — New University algebra 1876.

(Va urmă).

I. IONESCU.

24. *O nouă demonstrare a teoremei lui Fermat.* Se știe că afară de demonstrarea cunoscută în aritmetică, algebra demonstrează și ea teorema lui FERMAT, cu ajutorul formulei puterii unui polinom. Iată o nouă demonstrare, mai simplă decât cele cunoscute până acum, găsită cu ajutorul binomului lui NEWTON.

Fie x și p două numere întregi oarecare. Utilizând formula binomului lui NEWTON, putem scrie imediat :

$$(1) \quad x^p = [(x-1) + 1]^p = (x-1)^p + C_p^1(x-1)^{p-1} + C_p^2(x-1)^{p-2} + \dots \\ \dots + C_p^{p-1}(x-1) + 1.$$

Dacă p este număr impar, această dezvoltare are un număr par de termeni și cum coeficienții termenilor egali depărtați de extremi sunt egali, cei ai termenilor din mijloc sunt egali și au valoarea cea mai mare: $C_p^{\frac{p-1}{2}}$.

Se observă apoi ușor că, dacă p este număr prim, toți coeficienții: $C_p^1, C_p^2, C_p^3, \dots, C_p^{\frac{p-1}{2}}$ sunt divizibili cu p , așa că relația (1) se mai poate scrie :

$$x^p = \mathcal{M}p + (x-1)^p + 1,$$

sau, ceea ce e tot una :

$$(2) \quad x^p \equiv (x-1)^p + 1. \quad (\text{mod. } p).$$

Dând, în aceasta, lui x succesiv valorile $1, 2, 3, \dots, a$, căpătăm :

$$1^p \equiv 1. \quad (\text{mod. } p)$$

$$2^p \equiv 1^p + 1. \quad \text{» »}$$

$$3^p \equiv 2^p + 1. \quad \text{» »}$$

$$4^p \equiv 3^p + 1. \quad \text{» »}$$

$$\dots \dots \dots \quad \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \quad \dots \dots$$

$$(a-1)^p \equiv (a-2)^p + 1. \quad \text{» »}$$

$$a^p \equiv (a-1)^p + 1. \quad \text{» »}$$

de unde, prin adunare, obținem :

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + (a-1)^p + a^p \equiv 1^p + 2^p + \dots + (a-1)^p + a, \quad (\text{mod. } p).$$

$$\therefore \quad a^p \equiv a \quad (\text{mod. } p).$$

$$\therefore \quad a^p - a \equiv 0 \quad \text{» »}$$

relațiunea, care ne spune că :

Dacă p este număr prim, iar a un număr întreg oarecare, avem totdeauna :

$$a^p - a = \mathcal{M}p.$$

Această relațiune, pusă sub forma :

$$a(a^{p-1} - 1) \equiv 0, \quad (\text{mod. } p)$$

ne spune că :

Dacă p este număr prim, iar a un număr întreg nedivizibil cu p , avem totdeauna :

$$a^{p-1} - 1 = \mathcal{M}p,$$

relațiune, ce face obiectul teoremei lui FERMAT.

CĂPITAN GR. ZAPAN.

25. *În ce caz patratul unui termen din șirul lui FIBONACCI divide alți termeni ?*

În anul XXI pagina 125 și următoarele, D-I GH. ZAPAN arată că termenul u_{n-1} din șirul lui FIBONACCI nu are ca multipli decât termenii u_{tn-1} .

În acel articol, se arată că avem :

$$u_{n+s} = u_n u_s + u_{n-1} u_{s-1}, \quad (1)$$

și prin urmare :

$$u_{tn} = u_n u_{(t-1)n} + u_{n-1} u_{(t-1)n-1}.$$

De aci, scoatem :

$$u_{tn} = u_n u_{(t-1)n} + \mathcal{M} u_{n-1}^2.$$

Facem aci $t = 2, 3, 4, \dots n$ și înmulțim rezultatele. Deducem că

$$u_{tn} = u_n^t + \mathcal{M} u_{n-1}^2. \quad (2)$$

Zicem că avem și

$$u_{tn-1} = t u_{n-1} u_n^{t-1} + \mathcal{M} u_{n-1}^2. \quad (3)$$

Relația se verifică imediat pentru $t = 1$. Să procedăm prin inducțiune, înlocuind t cu $(t+1)$, adică să arătăm că

$$u_{(t+1)n-1} = (t+1) u_{n-1} u_n^{t+1} + \mathcal{M} u_{n-1}^2.$$

Din definiția șirului lui FIBONACCI, scoatem :

$$u_{(t+1)n-1} = u_{tn} u_{n-1} + u_{tn-1} u_{n-2}.$$

Înlocuind aci pe u_{tn} cu valoarea din (2), pe u_{tn-1} cu valoarea din (3), găsim :

$$u_{(t+1)n-1} = u_n^t u_{n-1} + t u_{n-1} u_n^{t-1} u_{n-2} + \mathcal{M} u_{n-1}^2$$

și cum :

$$u_{n-2} = u_n - u_{n-1},$$

reese că :

$$u_{(t+1)n-1} = u_n^t u_{n-1} + t u_{n-1} u_n^{t-1} + \mathcal{M} u_{n+1}^2,$$

$$u_{(t+1)n-1} = (t+1) u_n^t u_{n-1} + \mathcal{M} u_{n-1}^2,$$

ceea ce eră de arătat. Relația (3), este deci adevărată.

De oarece u_n și u_{n-1} sunt primi între ei, u_n nu se divide cu niciun factor al lui u_{n-1} ; reese dar că u_{tn-1} nu se va divide cu u_{n-1}^2 decât dacă $t = \mathcal{M} u_{n-1}$.

Așa dar :

Termenii din șirul lui FIBONACCI care se divid cu un termen u_{n-1} la patrat, sunt cei de forma u_{tn-1} , în care t este un multiplu al lui u_{n-1} .

Așa de exemplu : $u_4 = 5$, dă $n = 5$ și deci luând $t = u_4$, găsim că $u_{5.5-1} = u_{24} = \mathcal{M} 5^2 = \mathcal{M} 25$. De fapt $u_{24} = 75025$.

I. B. FLORESCU.

26. *Imaginare de ordin superior.*

Fie $i_1 = \sqrt{-1}$, $i_2 = \sqrt{-i_1}$, $i_3 = \sqrt{-i_2}$, ... $i_n = \sqrt{-i_{n-1}}$; îmi propun, în cele ce urmează, să caut câteva proprietăți ale imaginărei de ordinul n .

Avem succesiv :

$$i_2 = \sqrt{-i_1} = i_1^{\frac{1}{2}} \cdot i_1 = i_1^{\frac{3}{2}}$$

$$i_3 = \sqrt{-i_2} = i_2^{\frac{1}{2}} \cdot i_2 = i_1^{\frac{3}{4}} \cdot i_1 = i_1^{\frac{7}{4}}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$i_n = i_1^{\frac{2^n - 1}{2^n - 1}}$$

Această ultimă formulă îmi permite să scriu :

$$i_n^{i_1} = \left(i_1^{i_1} \right)^{\frac{2^n - 1}{2^n - 1}}.$$

Dar cum :

$$i_1^{i_1} = e^{-\frac{\pi}{2}} \quad (\text{real}),$$

pot spune că :

I. *O imaginară de ordin superior ridicată la puterea i_1 , devine reală.*

De asemenea :

$$\sqrt[i_1]{i_n} = \left(\sqrt[i_1]{i_1} \right)^{\frac{2^n - 1}{2^n - 1}}.$$

Cum :

$$\sqrt[i_1]{i_n} = e^{\frac{\pi}{2}} \quad (\text{real}),$$

pot deasemenea enunța proprietatea :

II. *Dacă din o imaginară de ordin superior, extrag rădăcina a ($i_1 - a$), atunci devine reală.*

Deasemenea, avem :

$$i_n^{i_1} = i_1^{\alpha_n} \cdot i_1^{\alpha_n}, \quad \text{unde} \quad \alpha_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}.$$

Sau, mai putem scrie :

$$\frac{i_n}{i_1} = \left(\frac{i_1}{i_1} \right)^{\alpha_n} \cdot i_1^{\alpha_n - 1}$$

Cum $i_1 = e^{-\frac{\pi}{2}}$ (real), ne rămâne :

$$\frac{i_n}{i_1} = e^{-\frac{\pi}{2} \alpha_n \cdot i_1^{\alpha_n - 1}}$$

deci tot imaginar, așa dar :

III. O *imaginară de ordin superior* lui i_1 , ridicată la o *putere egală cu acea imaginară (de același ordin)*, rămâne tot *imaginară*.

Apoi :

$$\sqrt[n]{\frac{i_n}{i_1}} = \sqrt[n]{\frac{i_1^{\alpha_n}}{i_1^{\alpha_n}}} = i_1^{\frac{\alpha_n}{i_1^{\alpha_n}}} = \left(i_1^{\frac{1}{i_1}} \right)^{\frac{\alpha_n}{i_1^{\alpha_n} - 1}}$$

Însă cum :

$$\frac{1}{i_1} = e^{\frac{\pi}{2}} \text{ (real),}$$

putem enunța proprietatea :

IV. Dacă din o *imaginară de ordinul* n ($n > 1$) se extrage *rădăcina* i_n , ea rămâne tot *imaginară*.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

27. *Asupra problemei 2939.* Această problemă nu este decât un caz particular al unei probleme mai generale.

Se știe că locul punctelor al căror triunghiul pedal este triunghiul podar al unui punct P , este cubica lui LUCAS, a cărei ecuație baricentrică este :

$$\frac{a^2(\beta - \gamma)}{\beta + \gamma} + \frac{b^2(\gamma - \alpha)}{\gamma + \alpha} + \frac{c^2(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} = 0.$$

În cazul particular I (a, b, c), vom avea condiția :

$$\frac{a(b - c)}{b + c} + \frac{b(c - a)}{c + a} + \frac{c(a - b)}{a + b} = 0,$$

care nu se verifică decât în cazul triunghiului isoscel sau echilateral, căci cubica nu trece prin I în cazul general.

EUG. I. BALLAN.

Absolvent al Lic. Sf. Sava.

28. *Asupra sâmburilor simetrice pozitivi* $G(x, y)$. $f(x)$ fiind o funcție arbitrară, să însemnăm :

$$G_n = \int_a^b \int_a^b G^{(n)}(x, y) f(x) f(y) dx dy.$$

Avem inegalitățile :

$$\begin{aligned} G_n^2 &\leq G_{n-1} G_{n+1}, & G_n^2 &\leq G_{n-p} G_{n+p}, \\ G_n^{n+1} &\leq G_{n+1}^n \times \int_a^b f^2(x) dx, & G_1^{n+1} &\leq G_{n+1} \times \left[\int_a^b f^2(x) dx \right]^n. \end{aligned}$$

Primele două inegalități se verifică cu ajutorul inegalității lui SCHWARTZ :

$$\begin{aligned} G_n &= \int_a^b \int_a^b \int_a^b G^{(n-p)}(x, s) f(x) G^{(p)}(s, y) f(y) dx dy ds \\ G_n^2 &\leq \int_a^b \int_a^b G^{(n-p)}(x, s) f(x) f(s) dx ds \\ &\quad \times \int_a^b \int_a^b \int_a^b G^{(n-p)}(x, s) G^{(p)}(s, y) f(y) G^{(p)}(x, t) f(t) dx dy ds dt \\ &\leq G_{n-p} \times \int_a^b \int_a^b G^{(n+p)}(t, y) f(t) f(y) dx dy = G_{n-p} G_{n+p}. \end{aligned}$$

Inegalitatea a treia se verifică ușor pentru $n=1$, în baza inegalității lui SCHWARTZ. Dar presupunând-o adevărată pentru $(n-1)$, avem :

$$\begin{aligned} G_n^2 &\leq G_{n-1} G_{n+1} \leq G_n^{\frac{n-1}{n}} \times \left[\int_a^b f^2(x) dx \right]^{\frac{1}{n}} \times G_{n+1} \\ G_n^{n+1} &\leq G_{n+1}^n \times \left[\int_a^b f^2(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Deci formula e generală. Inegalitatea a patra e echivalentă cu a treia, pentru $n=1$, deci e adevărată. Ori, presupunând-o adevărată pentru $(n-1)$, avem :

$$G_1^{n+1} = (G_1^n)^{\frac{n+1}{n}} \leq G_n^{\frac{n+1}{n}} \times \left[\int_a^b f^2(x) dx \right]^{\frac{(n-1)(n+1)}{n}}$$

și în baza inegalității a treia :

$$G_1^{n+1} \leq G_{n+1} \times \left[\int_a^b f^2(x) dx \right]^n.$$

P. SERGESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOALA POLITEHNICĂ DIN BUCUREȘTI

EXAMENUL DE ADMITERE ÎN ANUL I.

PROBELE SCRISE.

(Noembrie 1923).

Algebra. 1. Se dă sistemul de ecuațiuni:

$$2x + 3y - z + \alpha u = 0$$

$$x + 2y + \beta z + u = 0$$

$$\alpha x + y + z + 2u = 0.$$

Se cere să se găsiască valorile coeficienților α și β pentru ca sistemul să fie compatibil, fără ca toate necunoscutele să fie nule și pentru ca două din aceste necunoscute să fie arbitrare.

2. Să se studieze variațiunea funcțiunei

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x - \sqrt{3}\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - 3L \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}},$$

când x variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

Să se arate că funcțiunea rămâne finită, pentru orice valoare reală a lui x .

Timpul acordat: $3\frac{1}{2}$ ore.

Soluție. Pentru ca sistemul dat să fie compatibil, fără ca toate necunoscutele să fie nule, trebuie ca determinanții caracteristici să fie nuli.

Acești determinanți caracteristici sunt:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & \beta \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & \alpha \\ 1 & \beta & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & \alpha \\ 2 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Desvoltând acești determinanți și egalându-i cu zero, obținem următoarele patru ecuațiuni:

$$2\alpha - 2\beta + 3\alpha\beta = 0$$

$$2\alpha - \alpha^2 = 0$$

$$4\beta - \alpha^2\beta = 0$$

$$2\alpha + 6\beta - \alpha\beta = 0.$$

Avem patru ecuațiuni cu două necunoscute, deci putem avea șase grupe de câte două ecuațiuni, pentru obținerea valorilor lui α și β .

Rezolvând aceste ecuațiuni, constatăm că numai următoarele două grupe :

$$1) \quad \alpha = 0 \quad , \quad \beta = 0 \quad \text{și}$$

$$2) \quad \alpha = 2 \quad , \quad \beta = -1,$$

satisfac în acelaș timp, toate ecuațiile.

Pentru aceste valori de α și β sistemul de ecuațiuni dat, devine :

$$A \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + 2y + u = 0 \\ y + z + 2u = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad B \begin{cases} 2x + 3y - z + 2u = 0 \\ x + 2y - z + u = 0 \\ 2x + y + z + 2u = 0. \end{cases}$$

Examinând sistemul de ecuațiuni A, vedem că dacă înmulțim ecuațiunea a doua cu 2 și o scădem din prima, obținem pe a treia, deci nu avem decât două ecuațiuni distincte cu patru necunoscute, prin urmare două din aceste necunoscute, sunt arbitrare.

Examinând sistemul de ecuațiuni B, vedem că scăzând a doua ecuațiune din prima sau adunând pe a doua cu a treia, obținem acelaș rezultat, prin urmare numai două ecuațiuni sunt distincte și avem patru necunoscute, rezultă că două din aceste necunoscute sunt arbitrare.

2. Funcțiunea dată se poate scrie :

$$(x) = \frac{1+x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} [L(x^2+x+1) - L(x^2+1)].$$

Derivata acestei funcțiuni este :

$$\begin{aligned} f'(x) = & \frac{(1+x^2) - 2x(1+x)}{(1+x^2)^2} + \frac{2}{1+x^2} - \frac{\sqrt{3}}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)' \\ & - \frac{3}{2} \left[\frac{1+2x}{1+x+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} \right]. \end{aligned}$$

Făcând reducerile, obținem :

$$f'(x) = \frac{x(x+1)(x-1)^2}{(1+x^2)^2(1+x+x^2)}.$$

Numitorul acestei derivate nu se anulează pentru nicio valoare reală a lui x , deci funcțiunea derivată rămâne finită și continuă în tot intervalul dela $-\infty$ la $+\infty$.

După ce am enunțat acest fapt, știu că orice rădăcină reală a ecuațiunei $f'(x) = 0$ este o valoare de x corespunzătoare la un maximum sau la un minimum a funcțiunei $f(x)$: la un maximum, când pentru valoarea lui x găsită ca rădăcină, derivata a doua $f''(x)$ este mai mică decât zero (negativă); la un minimum, când pentru aceeași valoare, derivata a doua $f''(x)$ este mai mare decât zero și nu avem nici maximum nici minimum, când $f''(x) = 0$, afară de cazul când $f'''(x) = 0$, iar $f^{IV} \geq 0$.

Se vede din expresiunea funcțiunei derivate, că rădăcinile reale ale ecuațiunei

$$f'(x) = 0,$$

sunt : $x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = x_4 = 1.$

Pentru a ști dacă fiecare din aceste rădăcini corespunde la un maximum sau la un minimum, este suficient a deriva numai numărătorul, căci numitorul fiind întotdeauna pozitiv, nu va influența semnul derivatei a doua (C. D. БРАУН).

Numesc :

$$F(x) = x(x+1)(x-1)^2 = x^4 - x^3 - x^2 + x$$

$$F''(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1.$$

Le introducem în $F''(x)$, rădăcinile x_1, x_2 și x_3 :

$$F''(-1) = -4 < 0, \text{ avem maximum ;}$$

$$F''(0) = 1 > 0, \text{ avem minimum ;}$$

$$F''(x) = 0, \text{ avem nedeterminare.}$$

Prin faptul că $F'''(1) \geq 0$, nu avem nici maximum nici minimum, pentru

$$x_3 = x_4 = 1.$$

Intrunind la un loc aceste rezultate, avem următorul tablou :

x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
$f'(x)$	+++++	0	-----	0	+++++
$f(x)$	crește	M	descr.	m	crește

Geometria. Se consideră în semicercul descris pe AB ca diametru, o coardă MN variabilă, egală cu latura patrulaterului înscris în cercul corespunzător.

1. Să se calculeze unghiurile formate de dreptele AM și NB, precum și de dreptele AN și BM.

2. Să se găsiască locurile geometrice ale punctelor de întâlnire ale acestor perechi de drepte. Aceste locuri sunt porțiuni de cercuri trecând prin punctele A și B. Să se găsiască unghiul sub care se taie aceste două cercuri.

3. Se consideră coarda MN în pozițiunea particulară paralelă cu AB. Să se calculeze, în funcțiune de AB, lungimile AN, AM, BM și BN.

4. Să se determine pozițiunea coardei MN, astfel ca raportul laturilor opuse ale patrulaterului AMNB să fie același.

Timpul acordat 3 ore.

Soluție. — 1. Fie Q punctul de intersecție al dreptelor AM și BN și fie P punctul de intersecție al dreptelor AN și BM.

Unghiul din Q, fiind în afara cercului, are ca măsură diferența semi arcelor cuprinse între laturi, adică :

$$\sphericalangle Q = \frac{180^\circ}{2} - \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Unghiul din P, fiind în interiorul cercului, are ca măsură suma semi-arcilor cuprinse între laturi:

$$\sphericalangle P = \frac{180^\circ}{2} + \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ.$$

2. Unghiurile din Q și P fiind constante, locurile geometrice vor fi niște arce de cercuri ce trec prin A și B, capabile respectiv de 45° și 135° . Ducând două perpendiculare la extremitățile diametrului AB, vom tăia cercurile capabile de unghiurile 45° și 135° , delimitând astfel exact porțiunea din cerc care formează locul geometric.

Cele două cercuri se taie sub unghiul de

$$135^\circ - 45^\circ = 90^\circ.$$

Ele sunt deci ortogonale, mai mult încă, sunt simetrice față de dreapta AB.

3. Să considerăm coarda MN în pozițiunea particulară paralelă la AB. Fie C și D picioarele perpendicularelor scoborite din M și N pe diametrul AB.

$$(\alpha) \quad \overline{AM}^2 = \overline{BN}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{MC}^2$$

$$(\beta) \quad \overline{AC} = \overline{DB} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2}$$

$$(\gamma) \quad \overline{CD} = \overline{MN} = \frac{\overline{AB}}{2} \sqrt{2}.$$

Introducând pe (γ) în (β) , obținem:

$$(\delta) \quad \overline{AC} = \frac{\overline{AB} - \frac{\overline{AB}}{2} \sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{AB}}{4} (2 - \sqrt{2})$$

$$(\epsilon) \quad \overline{MC} = \frac{\overline{MN}}{2} = \frac{\overline{AB}}{4} \sqrt{2}.$$

Introducând pe (δ) și (ϵ) în (α) am:

$$\overline{AM}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{4^2} (2 - \sqrt{2})^2 + \frac{\overline{AB}^2}{4^2} (\sqrt{2})^2 = \frac{\overline{AB}^2}{4} (2 - \sqrt{2})$$

$$\overline{AM} = \overline{BN} = \frac{\overline{AB}}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Pentru obținerea lungimilor AN și BN, care sunt egale, considerăm unul din triunghiurile dreptunghice ANB sau AMB.

$$\overline{AN}^2 = \overline{BM}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4} (2 - \sqrt{2})^2$$

$$\overline{AN} = \overline{BN} = \frac{\overline{AB}}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

4. Să presupunem problema rezolvată. Din enunț, trebuie să avem .

$$AB/MN = AM/BN = \sqrt{2}.$$

Triunghiurile ACM și BPN sunt asemenea, având raportul de similitudine :

$$AM/BN = \sqrt{2}.$$

Acelaș raport avem pentru laturile AP și PB. Fie E un punct pe AB, care să împartă AB în două părți, astfel încât să avem :

$$AE/EB = AP/PB.$$

Acest punct E aparține bisectoarei unghiului P. Fie F punctul unde prelungirea bisectoarei taie cercul APB în partea opusă punctului P, față de AB. Acest punct F este bine definit fiind la jumătatea arcului AFB. De aci, construcția : Se unește punctul F, aflat la jumătatea arcului AB, din cercul APB, cu punctul E, aflat pe dreapta AB, astfel încât $AE/EB = \sqrt{2}$. Se unesc aceste două puncte F și E și locul unde taie a doua oară cercul AFB este punctul P. Se unește punctul P cu A și B și pe prelungirile acestor drepte se găsesc punctele N și M la intersecția cu semicercul descris pe AB ca diametru. Problema admite două soluții, după cum luăm pe E în apropierea lui A, sau în apropierea lui B.

Geometria descriptivă. Pe una din paginile coalei distribuite, se însemnează linia pământului la mijloc, paralelă cu laturile scurte ale foi. Punctul mijloc al liniei pământului este O.

Se dă :

a) Un punct $m'm$ la dreapta punctului O ($O_p = 55$), de cota $m'u = 35$, de depărtare $m_p = 20$.

b) Un plan $P\alpha P'$, perpendicular pe planul bisector al primului diedru. Urma orizontală αP face 45° cu linia pământului (la dreapta); $\alpha O = 85$ (la stânga).

Se cere :

Să se afle unghiurile formate cu planele de proiecție, de planul care trece prin linia pământului și punctul dat $m'm$.

Prin punctul $n'n$, de cota 22, luat în planul care trece prin linia pământului și punctul $m'm$ și având aceeași linie de ordine cu $m'm$, se duce o perpendiculară pe planul $P\alpha P'$. Se află punctul A ($a'a$), unde această perpendiculară străpunge planul $P\alpha P'$. Punctul A ($a'a$) este un vârf al pătratului ABCD, așezat în planul $P\alpha P'$, având ca latură 50 m/m. Latura AB este o frontală a planului $P\alpha P'$.

Să se construiască proiecțiunile $abcd$, $a'b'c'd'$ ale acestui pătrat.

Legendă. Orice plan perpendicular pe primul plan bisector are urmele sale simetrice față de linia de pământ. Planul $P\alpha P$ având urma orizontală înclinată la 45° față de linia de pământ, va trebui ca și urma verticală $\alpha P'$ să facă tot 45° cu linia de pământ, deci ducem din punctul α o dreaptă $\alpha P'$, simetrică cu αP și am obținut planul $P'\alpha P$, perpendicular pe primul plan bisector.

— Prin $m'm$ duc un plan de profil și-l rabat pe planul vertical. M este planul ce trece prin linia de pământ și punctul M și care face $60^{\circ}16'$ cu planul orizontal și $29^{\circ}44'$ cu planul vertical. Punctul N fiind în acest plan, îl găsim urma orizontală scoborind o linie de ordine din N în v și luăm apoi $\mu v = \mu n$. Se scoboară din n' și n perpendiculare respectiv pe urmele verticală și orizontală a planului $P' \alpha P$. Se obține piciorul perpendicularei $a'a$ utilizând planul vertical ce are ca urmă orizontală fv . Se rabate planul $P' \alpha P$ pe planul vertical, utilizând frontala $a'c'$, ac și găsim punctul A . Se construiește în planul rabătut, patrul ABCD de 50m/m latura, știind că latura AB este o frontală. Se ridică planul rabătut aducându-l în poziția $P' \alpha P$; odată cu el, se aduc și punctele B, C și D, obținându-se punctele $b'b$, $c'c$ și $d'd$.

Inginer-Şef C. D. ORĂŞANU.
Licențiat în matematici.

FACULTATEA DE ȘTIINȚE—BUCUREȘTI.

EXAMENELE DE BURSA.

29 Octomvrie 1923.

I. Se consideră o dreaptă, un punct A pe ea și un punct B exterior dreptei, un mobil pleacă din A , cu iuțeala v , pe dreaptă și o părăsește în direcția punctului B , cu o mișcare uniformă v' . Din ce punct trebuie să părăsiască dreapta, pentruca timpul întrebuințat ca să ajungă din A în B , să fie minimum? (Se va notă cu b , distanța dela B la dreapta BC și cu a distanța AC).

II. Să se arate că rădăcinile ecuației:

$$n^2 \cos \theta + 2n + \sin \theta = 0,$$

sunt reale, oricare ar fi unghiul θ . Să se demonstreze că între aceste rădăcini, avem relația:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 - x_1^2 x_2^2 = 1.$$

BIBLIOGRAFIE.

Bulletin dela Section scientifique de l'Académie roumaine. Anul VIII No. 7—8. Raport asupra lucrărilor primului Congres al Uniunii astronomice internaționale, ținut la Roma dela 2 la 10 Mai 1922 de N. DŌNICI.

Bulletin of the american mathematical Society. Vol. XXIX. Num. 5 Mai 1923. New-York. Adunarea din Aprilie a secțiunii din San Francisco, de B. A. BERNSTEIN. Adunarea Societății în Aprilie la Chicago, de A. DRESDEN.

Adunarea Societății în Aprilie la New-York, de R. G. D. RICHARDSON. O demonstrație elementară a unei leme fundamentale referitoare la limita unei sume, de H. T. ETTLINGER. Volumul II al Colecțiunii operelor lui KLEIN, de V. SNYDER. Lecțiunile de analiză funcțională ale lui LEVY, de C. A. FISCHER.

Idem. No. 6 Iunie 1923. Incorporarea Societății Matematice Americane, de R. G. D. RICHARDSON. Raport asupra curbelor trasate pe o suprafață algebrică, de S. LEFSCHETZ. Notă asupra convergenței seriilor trigonometrice cu ponduri, de D. JACKSON. Demonstrarea unei formule pentru arii, de H. E. BRAY. Filosofia matematică a lui KEYSER, de J. W. YOUNG. Operile complete ale lui ARCHIMEDE de PAUL VER ECKE, de D. E. SMITH. Curs oficial de balistică exterioară, de J. E. ROWE.

Idem. No. 7 Iulie. — Raport asupra curbelor continui din punct de vedere al analizei — situs, de R. L. MOORE. Generalizarea unei proprietăți a unei curbe cubice acnodale, de H. HILTON. Limitarea uniformă a unui șir de operațiuni funcționale, de T. H. HILDEBRANDT. Geometria coordonantelor a lui BECK, de J. L. COOLIDGE. Tratatul de probabilități al lui KEYNES, de E. B. WILSON. Geometria defuncțională a lui BLASCHKE, de G. A. BLISS.

Idem. No. 8 Octomvrie. Asupra funcțiunii zeta a lui RIEMANN, de C. F. CRAIG. Notă asupra unui oarecare tip de suprafață rostogolitoare, de W. C. GRANSTEIN. Diferențierea unei funcțiuni de funcțiune de H. B. CARSLAW. Asupra curburii relative a două curbe în V_n , de J. LIPKA. Congruența de separare în patrate, de E. T. BELL. Determinarea tuturilor sistemelor de ∞^4 curbe, în spaciul în care suma unghiurilor oricărui triunghi este două unghiuri drepte, de J. DOUGLAS. Operile lui LIE, vol. III, de R. D. CARMICHAEL. Paradoxurile infinitului ale lui BOLZANO, de L. L. SILVERMANN.

Mathesis. Volumul XXXVII, No. 8. Octomvrie 1923. Bruxelles. Bibliografia triunghiului și tetraedrului de J. NEUBERG. Deslegarea ecuațiilor de gradul III după SIMON STEVIN de H. BOSMANS. Triunghiuri și patrulatere marginite de patrate, de V. THÉBAULT. Asupra sumării puterilor numerice, de L. TITS. Asupra trisectoarelor unghiurilor unui triunghi, de J. NEUBERG. Asupra mișcării finite a unui corp solid de E. HENRIOT. Triunghiuri pseudoisoscele în raport cu un punct al lui FEUERBACH, de V. CRISTESCU.

Revista de matematicas y fisicas elementales. Anul V. No. 6. Octomvrie 1923. Buenos Aires. Notă asupra progresiilor, de A. E. DE CESARE. Relațiuni metrice într'un triunghi ale cărui laturi sunt în progresiune geometrică, de ST. LT. A. MICLESCU.

Revista matematică din Timișoara. Anul III No. 9. Noemvrie 1923. Timișoara. Câteva însumări trigonometrice de V. ALACI.

Journal de mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 48 No. 3. 1 Noemvrie 1923. Paris.

ANTONIO FAVARO. (1847 — 1922), de H. BOSMANS. Extras din *Revue des Questions scientifiques*, Iulie 1923. Supliment la *Mathesis*.

J. HAAG. *Cours complet de mathématiques spéciales*. Tome IV. *Géométrie descriptive et trigonométrie*. Paris. Gauthier-Villars 1923. Prețul 13 franci.

J. HAAG. *Exercices du cours de mathématiques spéciales*. Tome IV. *Géométrie descriptive et trigonométrie*. Paris. Gauthier-Villars. Paris 1924.

Cursul D-lui J. HAAG coprinde în o formă condensată, cunoștințele de matematici elementare și parte din cele superioare, necesare celor ce trebuie să se pregătiască mai solid în ramura științelor matematice. El coprinde în un prim volum *Algebra* și *Analiza*, al doilea *Geometria Analitică*, al treilea *Mecanica* și al patrulea cursurile apărute de curând și menționate mai sus. Fie care volum este însoțit de un altul cu exercițiile corespunzătoare.

Cursul de geometrie descriptivă are în vedere programul Școalei politehnice din Paris; el coprinde capitole de perspectivă și plane cotate. Trigonometria coprinde un rezumat de două capitole. Chestiunile sunt clar tratate și cursul poate fi de mare folos studenților, elevilor școalelor politehnice și elevilor de liceu cari doresc să fie bine pregătiți în aceste ramuri ale matematicilor.

I. I.

G. VERRIEST. *Cours de mathématiques générales*. I. Partie. *Calcul différentiel. Géométrie analytique à deux dimensions*. Louvain, Editions Universitatis și Paris, Gauthier Villars. 1923.

Științele matematice pătrund neconținut ca instrument de cercetare și de formulare a legilor în toate științele pure și aplicate, și de aceea ele trebuie să se și adapteze, nu numai nevoilor acelor științe, dar să se adapteze priceperii și dobândirii lor de cât mai mulți studenți sau oameni de știință. Științele filosofice cer azi cunoștințe de diferite ramuri ale matematicilor, însă nu în măsura în care ele sunt necesare matematicianilor. De aci, nevoia de a le specializa. De multă vreme, s'au publicat matematici elementare pentru uzul școalelor tehnice; cursuri de analiză și de mecanică rațională, speciale pentru ingineri și s'au încercat tratate de matematici pentru uzul altor specialități științifice.

Cursul de față este destinat studenților cari își pregătesc doctoratul în chimie; el a fost predat în cea mai mare parte de autorul lui la Universitatea din Louvain dela 1919 încoace. Se caută ca studentul să priceapă noțiunile fundamentale, să vadă cum se aplică la chestiuni care îl interesează în ramura lui, și se lasă la o parte toate rigorile și subtilitățile care ar face aridă priceperea matematicilor. Autorul citează în prefață, cuvintele lui D'ALEMBERT: „*Allez en avant et la foi vous viendra*“.

Se începe prin progresiuni și se trece la națiunea de limită, pe care o clarifică prin șapte exemple scoase din fizică și geometrie. Ca consecință, urmează înfiniții mici. Cap. II se ocupă cu logaritmii deduși din progresiuni și din exponențiale. Cap. III tratează despre funcțiuni, dând ca exemple legi fizice, ca a lui MARIOTTE, GAY-LUSSAC. Cap. IV se ocupă cu coordonante, drepte, unghiuri, locuri geometrice, exemple de curbe. În Cap. V, găsim fracțiunile continue, derivatele cu aplicațiuni din mecanică și geometrie, diferențiale. În Cap. următor, găsim aplicațiuni ale derivatelor și diferențialelor, la geo-

metrie, mecanică, dilatări, căldură specifică, forță electromotrice, creșterea funcțiilor, formula lui KIRCHOFF. Se consideră apoi diferențialele cu creșteri instantanee. Cap. VII se ocupă cu proprietățile derivatelor, a funcțiilor crescătoare și descrescătoare, teorema lui ROLLE, formula creșterilor finite. Cap. VIII tratează despre derivate și diferențiale succesive, cu interpretări geometrice și fizice. În Cap. IX, găsim formulele lui TAYLOR și MAC LAURIN, cu aplicațiunile lor, ca la aberațiunea longitudinală și transversală a oglinzilor sferice. Cap. X se ocupă cu expresiunile nedeterminate, aplicațiuni la galvanometrul balistic. Cap. XI tratează despre maximum și minimum cu aplicațiuni la tragerea coșurilor, formula lui KIRCHOFF, frânarea automobilelor. Cap. XII studiază funcțiunile și reprezentarea lor grafică cu aplicațiuni la conduita lui VAN DER WAALS. Cap. XIII se ocupă cu funcțiuni de mai multe variabile și funcțiuni compuse, iar cel următor cu diferențialele totale. Cap. XV se ocupă cu derivate parțiale, iar cel următor cu diferențierea ecuațiilor și a funcțiunilor implicite și cu interpretarea unor ecuațiuni fizice. Cap. XVII arată utilitatea diferențialelor, luând ca exemplu coeficientul de dilatare cubică al corpurilor anisotrope. În Cap. XVIII, se încep aplicațiunile geometrice ale calculului diferențial: tangente, normale, curburi, arii. Cap. XIX se ocupă de secțiunile conice. Ultimul Cap. XX se ocupă cu coordonatele polare. Capitolele sunt urmate de exerciții.

Chestiunile sunt cât se poate de simplu și de intuitiv tratate: exemplele le leagă de studiul unor fenomene naturale, așa că acest curs este foarte folositor studenților în științele fizico-chimice și secțiunilor industriale de pe lângă școlile politehnice. El poate fi folosit și de studenții în științele naturale, în medicină sau filosofie, căci se pot iniția mai ușor în cunoaștința elementelor matematicilor superioare.

ST. CRISTESCU. *La lumière relative et l'expérience de Michelson*. Paris. Felix Alcan 1923. Prețul 5 franci.

GASTON JULIA. *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier isolé*. Paris. 1924. Gauthier-Villars et C^{ie}. Editeurs. Quai des Grands-Augustins 55.

GENERAL SC. PANAITESCU. *De la Omer la Einstein*. Povestire astronomică în colecțiunea «Cunoaștere folositoare». Seria A «Știința pentru toți» No. 16, de sub directiva redacțională a D-lui Profesor universitar I. SIMIONESCU. București «Cartea românească». Prețul 3 lei.

C E R E R I.

107. Se știe că încă de mult, unele autorități, ca Poștele și Telegraful, Căile ferate, Institutul meteorologic au introdus calendarul gregorian. Care sunt acele autorități și când au introdus, fiecare acel calendar?

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3036. Fie A, B_1, C_1 punctele care împart laturile BC, CA, AB ale unui triunghi ABC , în acelaș sens și în acelaș raport α ; A_2, B_2, C_2 punctele care împart aceleași laturi în acelaș sens și în acelaș raport β ; P_a, P_b, P_c respectiv intersecțiile perechilor de drepte $(C_1A_1, AA_2), (A_1B_1, BB_2), (B_1C_1, CC_2)$; A_3, B_3, C_3 intersecțiile dreptelor AP_b, BP_c, CP_a respectiv cu laturile BC, CA, AB . Se cere să se arate că triunghiurile $ABC, A_3B_3C_3$ au acelaș centru de greutate.

C. I. GEORGESCU.

Soluție dată de D-nii: ADRIAN A. BUȘILĂ (București), F. DOBRESCU-BĂBICI, ILIE IONESCU-BREZUICA (Caracal), WILHELM SOLOMON (București), TRAIAN UDRISKY (Arad).

Fie

$$A_1B/A_1C = B_1C/B_1A = C_1A/C_1B = \alpha \text{ și } A_2B/A_2C = B_2C/B_2A = C_2A/C_2B = \beta.$$

Considerăm triunghiul ABA_2 tăiat de transversala A_1C_1 ; vom avea:

$$(1) \quad A_1B/A_1A_2 \cdot C_1A/C_1B \cdot P_aA_2/P_aA = 1.$$

Să căutăm valoarea raportului A_1B/A_1A_2 . Vom avea:

$$\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{A_2A_1 + A_1B}{A_1C - A_1A_2} = \frac{1 - \frac{A_1A_2}{A_1B}}{\frac{A_1C}{A_1B} - \frac{A_1A_2}{A_1B}} = \frac{1 - \frac{A_1A_2}{A_1B}}{\frac{1}{\alpha} - \frac{A_1A_2}{A_1B}} = \beta.$$

Din ultima egalitate, scoatem

$$A_1B/A_1A_2 = \alpha(1 - \beta)/\alpha^2(\alpha - \beta).$$

Inlocuind acest raport în formula (1), deducem

$$(2) \quad P_aA_2/P_aA = (\alpha - \beta)/\alpha^2(1 - \beta).$$

Triunghiul ABA_2 tăiat de transversala P_aC , ne dă relația

$$CB/CA_2 \cdot P_aA_2/P_aA \cdot C_3A/C_3B = 1$$

și ținând seamă că primul raport este egal cu $1 - \beta$, iar al doilea este dat de formula (2), deducem:

$$C_3B/C_3A = (\alpha - \beta)/\alpha^2.$$

Prin urmare

$$A_3B/A_3C = B_3C/B_3A = C_3A/C_3B = \alpha^2/(\alpha - \beta)$$

și deci în virtutea teoremei lui PAPPUS, triunghiurile ABC, $A_3B_3C_3$ au acelaș centru de greutate.

D-l TIBERIU POPOVICIU (Arad) tratează următoarea chestiune. Se notează:

$$A_1C/A_1B = -\alpha_a, \quad B_1A/B_1C = -\alpha_b, \quad C_1B/C_1A = -\alpha_c,$$

$$A_2B/A_2C = -\beta_a, \quad B_2A/B_2C = -\beta_b, \quad C_2B/C_2A = -\beta_c.$$

Care sunt condițiile ca triunghiurile ABC, $A_3B_3C_3$ să aibă acelaș centru de greutate?

D-l POPOVICIU găsește că aceste condiții sunt:

$$\beta_c + \alpha_c(\beta_a - \alpha_a) = \beta_a + \alpha_a(\beta_b - \alpha_b) = \beta_b + \alpha_b(\beta_c - \alpha_c),$$

care sunt evident verificate, dacă:

$$\alpha_a = \alpha_b = \alpha_c = \alpha \quad \text{și} \quad \beta_a = \beta_b = \beta_c = \beta.$$

Notă. D-l MIRCEA I. ADAM (Constanța) a rezolvat problema servindu-se de problema 2868 vol. XXVII.

D-nii: I. COȘEREANU (Piatra Neamț), M. FOȘENEANU (M-re Dealului), I. HUBER (București), A. URZICĂ (Deva) au trimis bune soluții analitice.

D-nii: B. M. BARBĂLATT (Bărlad), C. D. MIHĂESCU (Giurgiu), O. G. POPEA (Chișinău), ION M. ȘERBĂNESCU (București), EMIL ȘTEFĂNESCU (București), au greșit la calculul valorii raportului $A_3B: B_3C$.

D. V. I.

PROBLEMA 3039. Să se demonstreze relația:

$$\frac{\cotg A + \cotg B}{\tg \frac{1}{2}A + \tg \frac{1}{2}B} + \frac{\cotg B + \cotg C}{\tg \frac{1}{2}B + \tg \frac{1}{2}C} + \frac{\cotg C + \cotg A}{\tg \frac{1}{2}C + \tg \frac{1}{2}A} = \frac{2R}{r} - 1,$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghi carecare, iar R și r razele cercului circumscris și înscris triunghiului.

ADRIAN A. BUȘILĂ.

I. Soluție dată de D-nii: B. M. BARBĂLATT, A. TAUBER, ȘT. FL. LĂZĂRESCU, N. ARCADIAN, M. BRĂTESCU, I. COȘEREANU, G. MATEESCU.

Din relația

$$ar_a + br_b + cr_c = 2p(2R - r),$$

care face obiectul problemei 2762 propusă de D-l V. CRISTESCU (G. M. vol. XXVI pag. 156), se obține, divizând ambele părți prin $2S = ah_a = bh_b = ch_c = 2pr$,

$$\sum \frac{r_a}{h_a} = \frac{2R}{r} - 1$$

(Revista Mat. Timișoara, probl. 210 pag. 174 vol. II).

Cum avem:

$$h_a = \frac{a}{\cotg B + \cotg C}, \quad h_b = \dots \quad \text{etc.}$$

$$r_a = \frac{a}{\tg \frac{1}{2}B + \tg \frac{1}{2}C}, \quad r_b = \dots \quad \text{etc.}$$

înlocuind, se stabilește relația din enunțul problemei 3039.

II. Soluție dată de D-nii: C. I. GEORGESCU, B. M. BARBĂLATT, MART. BOGDAN, CR. GOILAV, ST. MĂCRINEANU, C. D. MIHĂIESCU, ERN. OPRIȘAN, EM. ȘTEFĂNESCU, L. WEISS, I. N. DRAGOMIR, O. POPEA.

Din egalitatea cunoscută

$$a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c),$$

se deduce

$$\sum \frac{a^2}{r_b + r_c} = 2(2R - r).$$

De unde

$$\sum \frac{a^2}{\tg \frac{1}{2}B + \tg \frac{1}{2}C} = 2p(2R - r).$$

(G. M. pag. 274, vol. XXVIII).

Ținând seamă de

$$a^2 = ah_a (\cotg B + \cotg C) \dots \text{etc.} \quad \text{și} \quad 2S = ah_a = \dots = 2pr,$$

se ajunge imediat la relația din enunț, adică

$$\sum \frac{\cotg B + \cotg C}{\tg \frac{1}{2}B + \tg \frac{1}{2}C} = \frac{2R}{r} - 1.$$

III. Soluție dată de D-nii: B. M. BARBĂLATT, V. COȘNIȚĂ, A. ABRAMOVICI, D. BLUMENFELD, M. ADAM, ȘT. EPURE, FL. E. GEORGESCU, V. GHÎTESCU, I. ILIESCU, J. T. LĂZĂRESCU, I. LAZA-

ROVICI, SANE MARCEL, G. MATEESCU, T. I. POPA, C. SCHÖNFELD,
I. M. ȘERBĂNESCU, EM. ȘTEFĂNESCU.

Ținând seamă de

$$\cotg B + \cotg C = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A}{4 \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}, \text{ etc. } \dots$$

$$\tg \frac{1}{2} B + \tg \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}, \dots \text{ etc.},$$

partea întâia a relației din enunț devine :

$$\frac{\sin \frac{1}{2} C}{2 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B} + \frac{\sin \frac{1}{2} A}{2 \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C} + \frac{\sin \frac{1}{2} B}{2 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} C}, \text{ sau}$$

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} A + \sin^2 \frac{1}{2} B + \sin^2 \frac{1}{2} C}{2 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}.$$

Folosindu-ne de relațiile cunoscute :

$$\sin^2 \frac{1}{2} A + \sin^2 \frac{1}{2} B + \sin^2 \frac{1}{2} C = 1 - r/2R \text{ și } \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C = r/4R,$$

partea întâia a relației din enunț devine egală cu

$$\frac{1 - r/2R}{2r/4R} = 2R/r - 1.$$

D-nii: A. DONCESCU, MARCUS FROM, ROMEO MIHĂILESCU,
P. MIRESCU, AL. I. PANAITESCU, EDGAR RUSSU, D. M. TEODO-
RESCU, după ce transformă partea întâia în funcție de sinusuri, ca
mai sus, au înlocuit apoi sinusurile precum și valorile lui R și r în
funcție de laturi, verificând astfel enunțul problemei.

IV. Soluție dată de D-nii: T. POPOVICIU, M. ADAM.

Se cunoaște

$$\tg \frac{1}{2} A = r_a / p, \dots \dots$$

Prin urmare

$$\sum \frac{1}{\tg \frac{1}{2} A \cdot \tg \frac{1}{2} B} = \frac{\sum \tg \frac{1}{2} A}{\tg \frac{1}{2} A \tg \frac{1}{2} B \tg \frac{1}{2} C} = \frac{\sum r_a}{r_a r_b r_c / p^3} = \frac{4R + r}{r} = \frac{4R}{r} + 1,$$

deoarece $r_a r_b r_c = p^2 r$ și $\sum r_a = 4R + r.$

Deci se poate scrie :

$$\sum \left(\frac{1}{\tg \frac{1}{2} A \tg \frac{1}{2} B} - 1 \right) = \frac{4R}{r} - 2.$$

Însă

$$\frac{1}{\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}A \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B} - 1 = \frac{(1 - \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}A \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B)(\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}A + \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B)}{\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}A \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B (\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}A + \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B)}$$

$$= \frac{\frac{1 - \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}^2 A}{\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}A} + \frac{1 - \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}^2 B}{\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B}}{\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}A + \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B} = \frac{2(\cotg A + \cotg B)}{\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}A + \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B}.$$

Prin urmare

$$\sum \frac{1}{\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}A \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B} - 1 = 2 \sum \frac{\cotg A + \cotg B}{\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}A + \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B} = 2 \left(\frac{2R}{r} - 1 \right)$$

$$\therefore \sum \frac{\cotg A + \cotg B}{\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}A + \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B} = \frac{2R}{r} - 1.$$

Alte soluții de D-nii : I. COȘEREANU, O. POPEA, W. SOLOMON, A. ȘCODRANO, E. BERCOVICI, D. BLUMENFELD, V. CAZACINCU, V. R. DIMITRIU, DOBRESCU-BABICIU, MARIN DUMITRESCU, SAMOILĂ DUMITRU, LONGIN IONESCU, MARIN ȘTEFAN, TR. UDRISKY.

Observație. Numeroși corespondenți au indicat la finele soluțiilor trimise, o serie de relațiuni, ce se pot demonstra în același mod. Menționăm pe acelea care cuprind numai liniile trigonometrice tg și $\cotg$.

$$\sum \frac{\cotg B + \cotg C}{\cotg_{\frac{1}{2}}B + \cotg_{\frac{1}{2}}C} = 1$$

(M. ADAM, I. N. DRAGOMIR, SANE MARCEL, FL. GEORGESCU, B. M. BARBĂLATT).

$$\sum \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}A + \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B} = \frac{r(4R+r)}{p^2}$$

(M. ADAM).

$$\sum \frac{\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B + \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}C}{\cotg_{\frac{1}{2}}B + \cotg_{\frac{1}{2}}C} = 1$$

(B. M. BARBĂLATT, FL. GEORGESCU).

$$\sum \frac{\cotg_{\frac{1}{2}}B + \cotg_{\frac{1}{2}}C}{\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B + \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}C} = 1 + \frac{4R}{r}$$

(B. M. BARBĂLATT, M. DUMITRESCU).

$$\sum \frac{\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}B + \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}C}{\cotg B + \cotg C} = 2 \sum \frac{r}{ra - r} = 2 \left(\frac{p^2 + r^2}{4Rr} - 2 \right)$$

(A. TAUBER, B. M. BARBĂLATT).

$$\sum \frac{\cotg 2A + \cotg 2B}{\tg A + \tg B} = -1 ; \quad \sum \frac{\cotg A + \cotg B}{\tg C} = 2$$

(T. POPOVICIU).

$$\sum \frac{\cotg A + \cotg B}{\tg A + \tg B} = 1$$

(T. POPOVICIU, FL. GEORGESCU).

$$\sum \frac{\cotg 2B - \cotg 2C}{\cotg B - \cotg C} = 0$$

(I. ȘERBĂNESCU).

$$\sum \frac{\cotg A - \cotg B}{\tg_{\frac{1}{2}} A - \tg_{\frac{1}{2}} B} = -2 \left(1 + \frac{R}{r} \right)$$

(E. BERCOVICI, C. I. GEORGESCU).

$$\sum \frac{\cotg A - \cotg B}{\tg B - \tg A} = 1 ; \quad \sum \frac{\cotg A - \cotg B}{\cotg_{\frac{1}{2}} A - \cotg_{\frac{1}{2}} B} = 1 ;$$

$$\sum \frac{\cotg 2A - \cotg 2B}{\tg A - \tg B} = 0.$$

(CONST. I. GEORGESCU).

Notă. Domnii: O. POPEA, G. MATEESCU, P. KATZ, V. CAZACINCUI, I. COȘEREANU au arătat că problema propusă se deduce cu ușurință din problema 210 din Rev. Mat. din Timișoara. După cum se vede însă din soluția I-a, la rândul ei acea problemă se deduce de asemenea din problema 2762, propusă de D-1 V. CRISTESCU în G. M. vol. XXVII.

MAIOR G. LITEANU.

PROBLEMA 3074. *Se consideră un triunghi oarecare ABC cu ortocentrul H și cercurile BHC, CHA, AHB (cercurile lui CARNOT). Cercul BHC taie a doua oară laturile AC și AB în A_b și A_a. Fie B_c, B_a și C_a, C_b punctele analoage determinate de cercurile CHA, AHB. Să se demonstreze că H este centrul comun al cercurilor circumscrise triunghiurilor A A_b A_c, B B_c B_a, C C_a C_b.*

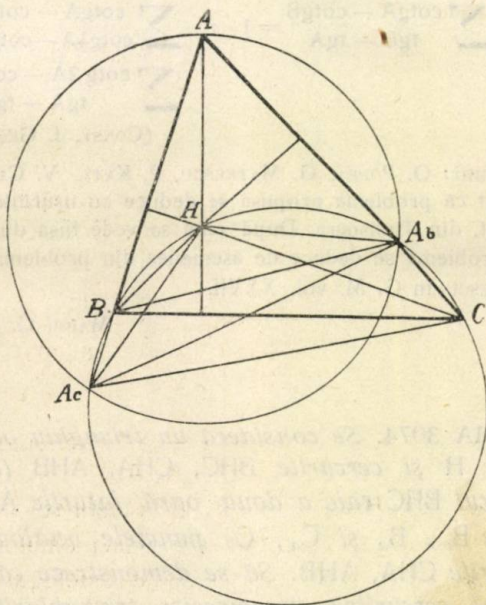
AL. NICULESCU.

I. Soluție dată de D-nii: CONST. I. GEORGESCU, ADRIAN A. BUȘILĂ, ALEXANDRU TAUBER (Elev cl. VIII Liceul Laurian, Botoșani), DAVID M. BLUMENFELD (Elev cl. VII Liceul Laurian, Boto-

șani), I. M. GOLDSTEIN (Bârlad), VIRGIL GHÎȚESCU (Elev cl. VIII Liceul Mihai Viteazul), BERNARD M. ZUCKERMAN (Bârlad), ȘTEFAN FL. LĂZĂRESCU (Elev cl. VIII Liceul I. Maiorescu, Giurgiu), D. M. TEODORESCU (Elev cl. VII Liceul Mihai Viteazul), CORNELIU C. IONESCU (Elev cl. VIII Liceul Cantemir-Vodă), SOLOMON WEISS (Elev cl. VI Liceul V. Alexandri, Galați), OVIDIU G. POPEA (Câmpina), EMIL ȘTEFĂNESCU.

Observăm că $\angle HAB = \angle HCB$, ca având ambele acelaș compliment, unghiul B. Dar $\angle HCB = \angle HA_c A$ ca având aceeași măsură în cercul BHC. Rezultă de aici că $\angle HAB = \angle HA_c A$; triunghiul HAA_c este deci isoscel și prin urmare $HA = HA_c$.

Analog demonstrăm că triunghiul HAA_b este isoscel; deci $HA = HA_b$.



Avem deci $HA = HA_b = HA_c$, ceea ce ne arată că H este centrul cercului AA_bA_c .

Demonstrația analoagă pentru cercurile BB_cB_a și CC_aC_b .

II. Soluție dată de D-nii: B. M. BARBĂLATT, EMIL ȘTEFĂNESCU, ION COȘEREANU, ȘTEFAN T. EPURE (Elev cl. VII Liceul

Buzău), MARTINIAN BOGDAN, N. P. ARCADIAN și F. DOBRESCU-BĂBICI (Elevi cl. VIII Liceul Caracal), LEON WEISS (Elev cl. VII Liceul V. Alexandri, Galați), TRAIAN UDRISKY (Elev cl. VI Liceul Moise Nicoară, Arad), MIHAIL I. FOȘENEANU, ISIDOR LAZAROVICI (Elev cl. VII Liceul Național, Iași), CONST. D. MIHĂESCU (Elev cl. VIII Liceul Giurgiu), G. MATEESCU (Elev cl. VIII Liceul Galați), MIRCEA I. ADAM (Constanța).

Triunghiul AA_bB este isoscel, căci:

$$\sphericalangle A A_b B = 180^\circ - \sphericalangle B A_b C = 180^\circ - \sphericalangle BHC = \sphericalangle A.$$

Deci BH este perpendiculară pe mijlocul lui AA_b . Analog demonstrăm că triunghiul ACA_c este isoscel și că CH este perpendiculară pe mijlocul lui AA_c . Deci H e centrul cercului AA_bA_c .

În celelalte cazuri de figură, demonstrația se menține, cu singura deosebire că unele unghiuri se înlocuiesc în demonstrație prin suplimentele lor.

III. Soluție și *generalizare* dată de D-nul TIBERIU POPOVICIU (Elev cl. VIII, Liceul Moise Nicoară, Arad).

Să presupunem că H este un punct oarecare din planul triunghiului ABC și să facem construcțiile indicate în enunț. Dreptele A_bA_c , B_cB_a , C_aC_b sunt evident antiparalele cu laturile triunghiului ABC ; deci triunghiurile AA_bA_c , BA_bB_c , CA_cC_b sunt fiecare invers asemenea cu ABC .

Fie M un punct de pe cercul BHC ; avem:

$$\sphericalangle MBC = \sphericalangle MA_bA \text{ ca având aceeași măsură,}$$

$$\sphericalangle MCB = \sphericalangle MA_cA \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»}$$

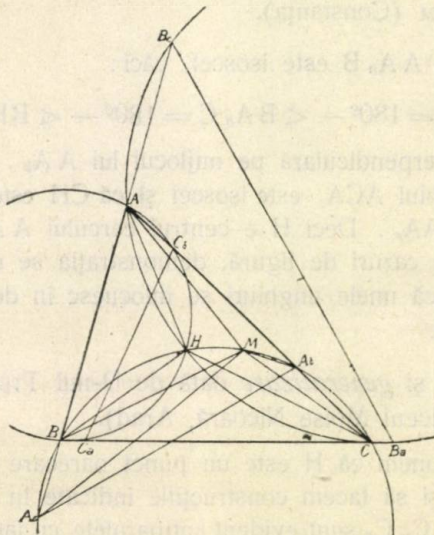
Deci punctul M jucând un rol oarecare în triunghiul ABC , va juca rolul inversului său în triunghiul AA_bA_c .

Cele trei cercuri BHC , CHA , AHB tăindu-se într'un acelaș punct H , urmează că acest punct H este punct omolog comun în triunghiurile AA_bA_c , BA_bB_c , CA_cC_b , iar omologul său din ABC este isogonalul lui H în raport cu acest triunghi. Putem deci enunța următoarele proprietăți:

Dacă H este ortocentrul lui ABC , el este centrul comun al cercurilor AA_bA_c , BA_bB_c , CA_cC_b . Aceasta este proprietatea din enunț.

Dacă H este centrul cercului ABC , el este ortocentrul comun al celorlalte trei triunghiuri.

Dacă H este centrul cercului înscris în triunghiul ABC el este în acelaș timp și centrul comun al cercurilor înscrise în celelalte triunghiuri.



Dacă H este centrul de greutate al triunghiului ABC , el este punctul comun al lui LEMOINE în celelalte triunghiuri.

Dacă H este punctul lui LEMOINE în triunghiul ABC , cele trei triunghiuri au acelaș centru de greutate, punctul H .

Dacă H este un punct al lui BROCARD în triunghiul ABC , el este punct al lui BROCARD și în celelalte triunghiuri; etc.

PROBLEMA 3099. Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghi oarecare, avem relațiunea :

$$\cos^3 \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} (B-C) + \cos^3 \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} (C-A) + \cos^3 \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} (A-B) \\ = 3 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C.$$

EMIL ȘTEFĂNESCU.

Soluție dată de D-nii: I. GOLDSTEIN (Bârlad), ALEX. TAUBER (Botoșani), MARIN ȘTEFAN (cl. VII, Constanța), PETRE A. MIRESCU (cl. VIII, Liceul Gh. Lazăr), TIBERIU POROVICIU (cl. VIII, Arad), EUGEN PĂLĂRIERU (cl. VIII, Liceul Spiru Haret), B. M. BARBĂLATT, I. M. ȘERBĂNESCU, LEON WEISS (cl. VII, Galați), MARIN GH. DUMITRESCU (cl. VII, Craiova).

Avem identitățile:

$$\cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(1 + \cos A),$$

$$\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}(B-C) = \frac{1}{2}(\sin B + \sin C),$$

de unde, prin înmulțire parte cu parte:

$$\cos^3 \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}(B-C) = \frac{1}{4}(1 + \cos A)(\sin B + \sin C),$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum \cos^3 \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}(B-C) &= \frac{1}{4}[2(\sin A + \sin B + \sin C) + \sin(A+B) \\ &\quad + \sin(B+C) + \sin(C+A)] \\ &= \frac{3}{4}(\sin A + \sin B + \sin C). \end{aligned}$$

Dar (*Culegere de Probleme, Trigonometria, XVII, 1*)

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$$

Avem deci

$$\sum \cos^3 \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}(B-C) = 3 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$$

Au rezolvat problema pe alte căi D-nii: LONGIN I. IONESCU, ION C. VASILIU, D. C. SCHILERU, ȘTEFAN T. EPURE, DAVID M. BLUMENFELD, N. P. ARCADIAN, MIRCEA I. ADAM, D. SAMOILĂ, TRAIAN I. UDRISKY.

Notă. D-nul TIBERIU POPOVICIU a arătat că problema are loc și pentru cazul mai general când avem

$$A + B + C = (4k + 1)\pi.$$

EXERCITIUL.

34. Când numărul 111.... 1110 se divide cu 13?

ȘT. A. MICLESCU.

R. Se găsește, încercând operațiunea, că $111111 = \mathcal{N} 13$.

Deci numărul va avea de $6n$ ori cifra 1.

35. Să se arate că fracția $(3n^2 + 12n + 11)/25$ este ireductibilă.

E. ȘTEFĂNESCU.

R. E destul a arăta că $(3n^2 + 12n + 11)$ nu se divide cu 5, sau înmulțind cu 3, prim cu 5, că $[(3n + 1)^2 + 2]$ nu se divide cu 5. Pentru aceasta, ar trebui ca $(3n + 1)^2$ să se termine cu 3 sau 8, ceea ce nu se poate.

36. Fie M și N intersecțiile a două isogonale, în raport cu vârful A, cu cercul ABC. Se cere locul intersecției dreptelor lui SIMSON al punctelor M și N, în raport cu ABC.

B. M. BARBĂLATT.

R. Fie P punctul al cărui loc se cere, el va fi ortopolul dreptei MN, care fiind paralelă cu BC, punctul P se va găsi pe înălțimea AA_1 .

37. Fie A_1, A_2, A_3 piciorul medianei, bisectoarei și simedianei care pleacă din vârful A al unui triunghi ABC. Să se demonstreze că avem:

$$2AA_1/AA_3 = BA_2/BA_3 + CA_2/CA_3.$$

ALEXANDRU TAUBER.

R. Se știe că avem

$$\overline{AA_3} = \frac{2bc}{b^2 + c^2} \overline{AA_1}, \quad \overline{BA_2} = \frac{ac}{b + c}, \quad \overline{BA_3} = \frac{ac^2}{b^2 + c^2}, \text{ etc.}$$

38. Fie ABCD un patrulater oarecare, E, F mijloacele diagonalelor AC, BD și M un punct oarecare din planul său. Să se demonstreze relația

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 2(\overline{ME}^2 + \overline{MF}^2) - \frac{1}{2}(\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2).$$

IOAN COȘEREANU.

R. Aplicăm triunghiurilor MBD și MCA teorema medianei și apoi adunăm parte cu parte cele două relații obținute.

39. Fie DE un diametru al cercului O și EA o coardă în acest cerc. Paralela dusă din A la DE taie cercul O în C, iar perpendiculara dusă din C pe AE taie diametrul DE în F și cercul O în B. Să se demonstreze că paralela dusă din F la BD trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC.

OVIDIU G. POPEA.

R. Fie H' intersecția paralelei dusă din F la BD cu înălțimea AE. E destul să arătăm că H' și E sunt simetrice față de BC și pentru aceasta trebuie să arătăm că unghiurile CFH' și CFE sunt egale. Avem însă:

$$\sphericalangle CFE = \frac{1}{2}(\text{măs. arcBD} + \text{măs. arcCE})$$

$$\sphericalangle CFH' = \sphericalangle CBD = \frac{1}{2}(\text{măs. arcAD} + \text{măs. arcAC}).$$

Dar DE fiind diametru, DA e perpendiculară pe AE și deci paralelă cu BC; rezultă că $\text{arc.CE} = \text{arcAD}$ și $\text{arcBD} = \text{arcAC}$.

40. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt[5]{x(a-x)^4} + \sqrt[5]{x^4(a-x)} = a.$$

CONST. I. GEORGESCU.

R. Dacă în identitatea

$$(\alpha + \beta)^5 = \alpha^5 + \beta^5 + 5\alpha\beta(\alpha + \beta)^3 - 5\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta),$$

punem

$$\alpha = \sqrt[5]{x(a-x)^4}, \beta = \sqrt[5]{x^4(a-x)},$$

și facem toate calculele, obținem :

$$8x^4 - 16ax^3 + 14a^2x^2 - 6a^3x + a^4 = 0,$$

$$\therefore (2x-a)^2(2x^2-2ax+a^2) = 0, \text{ etc.}$$

41. Să se demonstreze relația

$$\Sigma ab(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}A)(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}B) = 16R^2.$$

EMIL ȘTEFĂNESCU.

În primul membru, înlocuim pe a, b, c prin $2R\sin A, 2R\sin B, 2R\sin C$ și tangentele prin $\sin/\cos$; obținem :

$$4R^2 \Sigma \frac{\sin A \sin B}{\cos^2 \frac{1}{2}A \cos^2 \frac{1}{2}B} = 16R^2 \Sigma \operatorname{tg} \frac{1}{2}A \operatorname{tg} \frac{1}{2}B = 16R^2.$$

42. Într'un triunghi oarecare, avem relația :

$$\frac{1}{a} \cos^2 \frac{1}{2}A + \frac{1}{b} \cos^2 \frac{1}{2}B + \frac{1}{c} \cos^2 \frac{1}{2}C = \frac{p^2}{abc}.$$

PETRE A. MIRESCU.

$$R. \text{ Avem } \Sigma \frac{1}{a} \cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{1}{2R} \Sigma \frac{1}{\sin A} \cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{1}{4R} \Sigma \cotg \frac{1}{2}A,$$

$$\text{dar } \cotg \frac{1}{2}A + \cotg \frac{1}{2}B + \cotg \frac{1}{2}C = \cotg \frac{1}{2}A \cotg \frac{1}{2}B \cotg \frac{1}{2}C = \frac{p}{r},$$

ultima egalitate obținându-se înlocuind cotelantentele în funcție de laturi. Deci :

$$\Sigma \frac{1}{a} \cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{p}{4Rr} = \frac{p^2}{4RS} = \frac{p^2}{abc}.$$

43. Se proiectează pe un plan, un cerc dat, sub un unghi φ . Să se determine acest unghi, astfel ca cele trei cercuri descrise pe axele elipsei de proiecție ca diametre, să aibă arile lor în progresie aritmetică.

I. ST. TEODORESCU.

R. Dacă r este raza cercului, semiaxele elipsei sunt :

$$r, \quad r \cos \varphi, \quad \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \varphi} = r \sin \varphi.$$

Se scriu ariile cercurilor. Condițiunea este

$$\cos^2 \varphi = 2 \sin^2 \varphi, \quad \varphi = 35^\circ 15' 53''$$

evident și arcul complementar

$$\varphi' = 54^\circ 44' 7''$$

44. Se dă un triunghi dreptunghic în A și înscris într-o parabolă cu vârful în A. Ipotenuza BC trece printr'un punct fix.

M. FOCȘENEANU.

R. Ecuația parabolei raportată la tangentă este :

$$y^2 - 2px = 0.$$

Ecuația dreptei AB este : $y = \lambda x,$

iar a dreptei AC este $y = -\frac{1}{\lambda} x.$

Intersecțiile lor cu parabola sunt :

$$B \left(\frac{2p}{\lambda^2}, \frac{2p}{\lambda} \right); \quad C (2p\lambda^2, -2p\lambda).$$

Ecuația dreptei BC este :

$$\frac{\lambda(x - 2p\lambda^2)}{1 - \lambda^2} = y + 2p\lambda,$$

sau

$$\lambda(x - 2p) = (1 - \lambda^2)y,$$

care trece prin punctul fix $(2p, 0).$

PROBLEME PROPUSE.

3116 *) Fie R, r, r_a, r_b, r_c raza cercului circumscris, a cercului înscris și a cercurilor exînscrise, p semiperimetrul unui triunghi oarecare, d_a, d_b, d_c distanțele dela vârfurile A, B, C la centrele cercurilor exînscrise, r' raza cercului înscris în triunghiul ortic. Să se demonstreze relațiunea

$$\frac{r' + 2R}{p^2} = \frac{r_a - r}{d_a^2} + \frac{r_b - r}{d_b^2} + \frac{r_c - r}{d_c^2}.$$

N. P. ARCADIAN.

*) În enunțul acestei probleme strecurându-se o eroare, se publică din nou cu enunțul rectificat.

(N. R.)

3121. Se cer fracțiile cărora micșorându-le numărătorul și numitorul cu același număr, găsim o putere a acelei fracții.

E. ȘTEFĂNESCU.

3122. Dacă u_n este termenul de rang n al șirului lui FIBONACCI, să se demonstreze că expresiunea

$$u_{8n+4} - u_{8n-4} = 3,$$

se divide cu 45.

I. B. FLORESCU.

3123. Să se găsiască un patrat perfect format din 4 cifre consecutive, scrise într'o ordine oarecare.

LOCOT. COL. GH. BUCILIU.

3124. Să se demonstreze că raza unui cerc este medie geometrică între laturile dodecagoanelor regulate înscrise în cerc, convex și stelat.

I. IONESCU.

3125. Fie O , I , I_a centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris și al cercului exînscriș în unghiul A al unui triunghi ABC .

Să se demonstreze că dacă între unghiurile triunghiului avem relațiunea

$$\cos B + \cos C = 1,$$

dreapta OI este paralelă cu latura BC .

Să se demonstreze apoi că dreapta OI_a nu poate fi paralelă cu latura BC .

V. CRISTESCU.

3126. Fie A' și B' picioarele simedianelor AK și BK dintr'un triunghi ABC și P un punct de pe dreapta $A'B'$. Dreptele AP și BP întâlnesc laturile BC și AC ale triunghiului în A_1 și B_1 . Se cere înfășurătoarea dreptei A_1B_1 , când punctul P descrie dreapta $A'B'$.

GR. C. MOISIL.

3127. Se consideră trei drepte oarecare în spațiu D_1, D_2, D_3 , pe care se iau trei puncte fixe O_1, O_2, O_3 . Un plan arbitrar intersec-

tează dreptele D_1, D_2, D_3 în punctele M_1, M_2, M_3 , astfel ca să avem relațiunile :

$$\alpha_1 \overline{O_1 M_1} + \alpha_2 \overline{O_2 M_2} + \alpha_3 \overline{O_3 M_3} = \overline{k},$$

$$\alpha'_1 \overline{O_1 M_1} + \alpha'_2 \overline{O_2 M_2} + \alpha'_3 \overline{O_3 M_3} = \overline{k'},$$

α_i și α'_i fiind coeficienți dați, iar k și k' doi vectori dați. Să se găsiască locul geometric al centrului de greutate al triunghiului $M_1 M_2 M_3$.

(Se cere o soluție geometrică sau vectorială).

D. V. IONESCU.

3128. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_n^1 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+p-1}^1 & C_{n+p+1}^1 & \dots & C_{n+m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^{m-1} & C_{n+1}^{m-1} & \dots & C_{n+p-1}^{m-1} & C_{n+p+1}^{m-1} & \dots & C_{n+m}^{m-1} \end{vmatrix}$$

unde C_n^m este simbolul combinărilor.

TH. ANGHELUȚĂ.

3129. Să se stabiliască identitățile :

$$\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left(\frac{x+1}{2} \right)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (2i+1) C_{2n+1}^{n-i} X_i,$$

$$X_n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^{n-i} C_n^i C_{n+i}^i \left(\frac{x+1}{2} \right)^i,$$

unde X_i reprezintă polinomul lui LEGENDRE de gradul i ; C_m^p fiind numărul combinărilor a m obiecte luate câte p .

A. ANGELESCU.

3130. Un aeroplan zboară orizontal la 1000 m. altitudine, cu 126 km. pe oră.

Se întreabă care este distanța dela punctul de cădere al unei bombe lansată de avion, pânăla verticala punctului de lansare? Rezistența aerului se neglijează.

A. O. MICLESCU.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (3073, 88, 93, 116, 17, 20); Amărăscu G. (3076, 106); Andrieșescu Gh. (3084, 117, 19); Angelescu Tr. (3064, 67, 84, 117, E); Antoniu I. (3087); Arcadian N. (3087, 88, 92, 106, 17, 19, 20); Barbălat B. (2983, 3084, 88, 101, 16, 17, 20, A, P, R); Berdan C. (3088, 119, 20); Blumenfeld D. (3101, 16, 19, 20); Bușilă A. (N); Ciorănescu C. (3120); Constantinescu I. (R); Coșereanu I. (3117, 20); Coșniță V. (3120); Dobrescu-Băbici F. (3073, 82, 87); Dumitrescu M. (3116, 19); Dumitrescu S. N. (3103); Epure Șt. (3077, 88, 97, 116, 17, 19); Georgescu E. C. (R); Georgescu I. C. (3014, 120); Georgescu-Roegen N. (3118); Ghelber M. (E); Ghițescu V. (3076, 88, 97, 117); Goilav Cr. (3087); Gorovei S. (3097); Groșoreanu Gh. (2977); Grünbaum M. (3073, 115, N); Guțu Al. (3000, 40); Herovanu M. (N); Huber I. (3000); Huzuneanu Gh. (3117); Ianculescu O. (3117); Iliescu D. (2965, 77); Iliescu P. I. (3120); Ionescu C. C. (3103); Ionescu-Brezuica I. (3012, 87, 88, 92, 106, 16, 17, 20); Ionescu P. (3117, 19); Iordanian N. (3010); Marcus F. (3067, 92, 97, 119); Mărculescu O. (3097); Mateescu Gh. (2887, 3067, 97, 101, 17, 19); Mihăescu D. C. (P); Mihăilescu R. (3097, 117, 19); Negretzu Fl. (3087, 97, 117, C, N, P); Niculescu Al. (2915, 22, 3056, 70, 84); Pașaitescu A. (N); Pătrășianu M. (3117); Popea O. (3076, 77, 87, P, R); Popescu C. (3064); Popescu N. (3047); Popoviciu D. (3092); Răuț C. (3067); Russu E. (3070, 76, 87, 97); Schächter O. (3097); Schileru D. (3087); Schönfeld C. (2950); Școdranu Al. (P); Șerbănescu I. (3087, 119); Simionescu Gh. (3117); Solomon D. (P); Solomon W. (3097, 117, 19, P); Stamatiu N. (3120); Stănciulescu C. (3092); Stavrut M. (3084, 120); Ștefan M. (3047, 64, 77, 97, 101, E); Ștefănescu E. (2298, 3012, 74, 103, 19, 20, P); Tauber Al. (3119); Teodorescu I. (3000, 76, 120); Udrisky T. (3036, 39, 73, 97, 99); Vasiliu I. (3064, 82, 101); Weiss L. (3059, 88, 106, 08, 16, 19, 20, R); Zaharia E. (3010).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

La redacția revistei „Gazeta Matematică” se primesc abonamente pentru „Revista de matematicas y físicas elementales” din Buenos-Aires, Anul V (Mai 1923 — Aprilie 1924). Costul unui abonament anual este de 70 lei.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1948, 2091, 108, 16, 29, 30, 87, 91, 222, 74, 28, 95, 347, 49, 77, 86, 428, 31, 510, 12, 53, 66, 75, 85, 98, 640, 47, 51, 64, 83, 89, 701, 835, 38, 56, 72, 79, 95, 98, 910, 13, 20, 29, 31, 55, 71, 78, 80, 91, 93, 3019, 34, 48, 53, 54, 63, 71, 72, 85, 91, 96, 100, 03, 09, 11 și 13 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

28 VOLUME

Colecțiunea întreagă Lei 1500,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 70 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI și XXV, care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie*. (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

2. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. N. Abramescu, *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăugită*, 1921. (Epuizată).

4. A. G. Ioachimescu și G. Țițeica, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* Lei 15,—

6. Tr. Lalescu, *Tratat de Geometrie analitică*,
Fascicola I (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice Lei 20,—

7. Gh. Lazăr, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) Lei 5,—

8. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăugită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme Lei 60,—

9. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, *Vocabular Matematic* Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăoga taxele poștale pentru expediție.

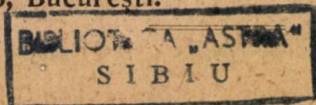
Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul*. Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septembrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimite D-lui: I. D. Teodor, Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la casierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București.



M2523

Onor Asociațiunea pentru cultură
și literatură a poporului Român



BIBLIOTECA ASTRA
- SIBIU -

AZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXIX.

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1924

0 - MAR 2014
22

Libru

BIBLIOTECA CENTRALA
ASOCIATION
SIBIU

SUMARUL

1. Teoreme asupra triunghiului Grigore C. Moisil.
2. O generalizare a teoremei lui Franke. Mihail I. Focșeneanu.
3. Note Matematice : 29—39.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Probleme rezolvate : 2759, 2905, 2928, 3012, 3014, 3051, 3076, 3106.
7. Exerciții : 45—53.
8. Probleme propuse : 3131—3140.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET

1924

74301

SPRE ȘTIINȚA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică”** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXIX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politehnică din București, **Tr. Lalescu**, Doctor în Matematici, Profesor Universitar și **I. D. Teodor**, Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Școala Politehnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice” se vor trimite D-lui **GEORGE BORNEANU**, Inginer, Directorul Fabricilor de chibrituri și timbre, București.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor rediă în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela D-l Cassier **I. D. Teodor**, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimisă prin poștă.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evita confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

În vederea sporirii taxelor poștale, corespondenții pot trimite de ac înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsa spații albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecință.

Nu se admite însă a se trata pe aceeași foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, creațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ”, trebuie să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 56, 59, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 94, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 59, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 53, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 16, 26, 36, 47, 53, 56, 61, 95, 3005, 08, 13, 19, 42, 45, 55, 60, 69, 75, 89, 90, 95, 96, 100, 07, 09, 10, 11, 12, 14, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

TEOREME ASUPRA TRIUNGHIULUI.

I.

PROPRIETAȚI ALE CONICELOR CIRCUMSCRISE ȘI TRITANGENTE UNUI TRIUNGHIU.

1. Să considerăm un sistem de parametri omogeni :

σ : $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ și elementele acestui sistem :

θ , punctul de coordonate baricentrice ($\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$) ;

Δ , dreapta a cărei ecuație e $\sum \frac{\alpha}{\alpha_1} = 0$, (1)

polara trilineară a punctului θ ;

Γ_c , conica circumscrisă triunghiului de referință, cu ecuația :

$$\sum \frac{\alpha_1}{\alpha} = 0, \quad (2)$$

care e locul polurilor trilineare al dreptelor ce trec prin punctul θ ;

Γ_t , conica tritangentă, cu ecuația :

$$\sum \frac{\alpha^2}{\alpha_1^2} - 2 \sum \frac{\alpha\beta}{\alpha_1\beta_1} = 0, \quad (3)$$

înfășurătoarea polarelor triliare a punctelor de pe Δ ;

X_c , cuartica circumscrisă, cu ecuația

$$\sum \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1} - 2 \sum \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha\beta} = 0, \quad (4)$$

curbă ce are în A, B și C puncte duble.

Curbele Δ , Γ_c , Γ_t și X_c formează un sistem σ , determinat de poziția punctului θ . Vom studia astfel proprietățile acestor curbe după poziția punctului θ în planul triunghiului ABC.

Vom considera punctul θ variabil.

Sistemul s : T, D, C_c , C_t , Q_c analog și determinat de parametri : s : $m, n, p, \dots$ e fix.

2. **Teorema I.** *Locul punctelor θ , așa fel încât conicele Γ_c , respectiv Γ_t , să înfășoare dreapta fixă D, sunt conicele C_t , respectiv C_c .*

Eliminând pe β și γ între ecuațiile conicelor Γ_c și aceea a dreptei D, obținem ecuația în α :

$$np\gamma_1\alpha^2 + (mn\gamma_1 + np\alpha_1 - mp\beta_1)\alpha + mn\alpha_1 = 0,$$

al cărui discriminant egalat cu zero, exprimă tocmai condiția de tangentă a conicei Γ_c cu dreapta D :

$$\sum \frac{\alpha_i^2}{m^2} - 2 \sum \frac{\alpha_i \beta_i}{mn} = 0. \quad (5)$$

Dar relația (5) exprimă tocmai condiția ca punctul θ să aparțină conicei C_t .

Pentru a stabili proprietatea conicei C_c , vom considera trei drepte $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, așa fel ca cele trei conice $\Gamma_{t1}, \Gamma_{t2}, \Gamma_{t3}$ să fie tangente dreptei D . În acest caz, punctul T , polul dreptei D , se va găsi respectiv pe dreptele $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Deci aceste drepte sunt concurente în T , polurile lor descriu în acest caz, conica circumscrișă C_c *).

3. Teorema II. *Locul punctelor θ , așa fel încât conica Γ_c , respectiv Γ_t , să treacă prin punctul fix T , e dreapta D , respectiv cuartica Q_c .*

În privința lui Γ_c , proprietatea e intuitivă: fie Γ_{c1} și Γ_{c2} conicele corespondente pozițiilor θ_1 și θ_2 . Dreapta $\theta_1\theta_2$ va fi polara punctului lor de intersecție T . Dacă Γ_{c3} trece prin T , θ_3 va fi colinear cu θ_1 și θ_2 pe dreapta D .

În privința conicei Γ_t , scriind că această conică conține punctul T (m, n, p):

$$\sum \frac{m^2}{\alpha_i^2} - 2 \sum \frac{mn}{\alpha\beta} = 0, \quad (6)$$

scriem tocmai că punctul variabil θ descrie cuartica Q_c .

4. Teorema III. *Locul punctelor θ , așa fel ca Δ să înfășoare conica C_c e cuartica Q_c .*

Procedând ca la § 2, dar intervertind sistemele σ și s , obținem condiția:

$$\sum \frac{m^2}{\alpha_i^2} - 2 \sum \frac{mn}{\alpha\beta} = 0, \quad (7)$$

care exprimă tocmai că punctul θ aparține cuarticei Q_c . Dacă Δ înfășoară conica C_t , punctul θ descrie dreapta D .

*) Proprietate enunțată la § 1, care de altfel face obiectul articolului d-lui CR. MATEESCU «Asupra conicelor circumscrise sau tritangente unui triunghi» (G M. XXV).

Deasemenea, F. G. M. Ex. de mécanique (pag. 723).

5. **Teorema IV.** *Locul punctelor θ , așa fel încât cuartica X_c să treacă prin punctul fix T , e conica C_t .*

Scriind că punctul $T(m, n, p)$ este pe cuartica X_c (4):

$$\sum \frac{\alpha_1^2}{m^2} - 2 \sum \frac{\alpha_1 \beta_1}{mn} = 0, \quad (8)$$

rezultă că punctele $\theta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ descriu conica C_t . Dacă θ descrie C_c , polara lui, Δ se rotește în jurul punctului T .

6. La punctele 4 și 5 am reamintit proprietățile fundamentale, care fac obiectul articolului d-lui CR. MATEESCU «Asupra conicelor circumscrise sau tritangente unui triunghi» *), tocmai pentru a evidenția un fapt interesant, pe care-l voi explica mai târziu: între dreapta D și cuartica Q_c există relațiuni strânse, asemenea celor dintre conicele C_c și C_t . Intr'adevăr, aceste patru teoreme le-am putea pune pe coloane și din punct de vedere al paralelismului între D și Q_c . Fiecărei proprietăți a dreptei, îi corespunde una analoagă a cuarticei.

7. Aceste patru teoreme sunt interesante prin numărul mare de particularizări. Voi lua numai câteva exemple și anume, voi începe cu cea mai interesantă aplicație. Dacă punctul T se confundă cu G , baricentrul, $[s: 1, 1, 1]$, atunci dreapta D devine chiar dreapta dela infinit

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

iar conicele C_c și C_t sunt prima și a doua elipsă a lui STEINER, având centrul în G și fiind una circumscrisă (E_{c_1}) cealaltă tangentă în picioarele medianelor (E_{c_2}).

Dar genul unei conice depinde de felul cum ea intersectează dreapta dela infinit. Dacă aceste intersecții sunt reale, conica e hiperbolă, dacă e tangentă, e parabolă, dacă intersecțiile sunt imaginare, e o elipsă. Dar punctului G , care e în regiunea interioară ambelor elipse, îi corespund conice elipse. Deci putem astfel enunța:

Teorema V. *Conicele Γ_c , respectiv Γ_t , sunt elipse, parabole sau hiperbole, după cum punctul θ e interior, aparține, sau e exterior elipselor lui STEINER E_{c_2} , respectiv E_{c_1} .*

*) In afară de F. G. M. Ex. de mécanique, proprietatea că, dacă polara înfășoară un punct, polul ei descrie o conică circumscrisă, e și în art. d-lui BOGDAN IONESCU «Teoreme asupra triunghiului» G. M. vol. II.

Teorema V nu e nouă. Ea se găsește sub o formă puțin schimbată în F. G. M. Ex. de mécanique pag. 716. Acolo se consideră punctul θ ca un punct al lui GERGONNE generalizat. Calea urmată de noi ne arată că teorema e un caz cu totul particular al unor alte teoreme (I — IV).

8. Dacă T se confundă în K, punctul lui LEMOINE, dreapta D e chiar dreapta lui LEMOINE, iar conicele C_c și C_t sunt cercul circumscris O și elipsa lui BROCARD E_B , care are focarele în punctele lui BROCARD Ω_1 și Ω_2 și e tangentă laturilor în picioarele simedianelor. Teoremele I — II se pot particulariza în modul următor:

Teorema VI. *Cercul circumscris O și elipsa E_B a lui BROCARD, sunt locurile punctelor θ , așa fel încât conicele Γ_t , respectiv Γ_c , să fie tangente dreptei lui LEMOINE.*

Teorema VII. *Dreapta lui LEMOINE e locul punctelor θ , așa fel încât conicele Γ_c să treacă prin punctul K al lui LEMOINE.*

Dacă T se confundă cu S, punctul lui STEINER, dreapta D devine chiar dreapta GK și putem enunța:

Teorema VIII. *Dreapta GK e locul punctelor θ , astfel încât conicele Γ_c să treacă prin punctul S al lui STEINER.*

Am putea continua pe acelaș motiv, fără a prezintă însă vreun interes.

II.

TRANSFORMĂRI POTENȚIALE.

9. În vreo câteva articole anterioare, s'a vorbit despre potențiale. În legătură cu aceste puncte voi indica aci, pe scurt, o metodă de transformare, care conduce la proprietăți noi, dar mai ales la generalizări frumoase.

Potențialul de ordin k , al unui punct $M(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, e punctul $M_k(\alpha_1^k, \beta_1^k, \gamma_1^k)$.

Fie o curbă S:

$$S \equiv F(\alpha, \beta, \gamma).$$

Locul potențialelor de ordin K, al punctelor de pe S, e format de o curbă:

$$S_k \equiv F(\alpha^{1/k}, \beta^{1/k}, \gamma^{1/k}),$$

pe care, prin analogie, o vom numi *curbă potențială de ordinul* K , a curbei S .

Două curbe fiind tangente, admit un punct M de contact, care nu e altceva decât două puncte apropiate confundate. Curbele potențiale lor, de ordin k , vor admite pe M_k , ca punct de contact și vor fi tangente.

Teorema IX. *Dacă două curbe S și L sunt tangente, curbele potențiale de ordinul k ale lor, L_k și L'_k , vor fi asemenea tangente.*

Multe din teoremele de tangență din geometria triunghiului și chiar altele, se pot transforma potențial. O metodă grafică de construcție a potențialelor de ordin întreg, o voi da mai târziu. Voi transforma potențial numai teoremele I-IV, celelalte deducându-se.

10. Să considerăm potențialele de ordin $1/k$ ale curbelor $\Delta, \Gamma_c, \Gamma_t, X_c$.

Teorema X. *Dreapta D :*
$$D = \sum \frac{\alpha_1}{m} = 0,$$

e locul punctelor $\theta(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, așa fel încât curba circumscrișă:

$$\sum \frac{\alpha_1}{\alpha^k} = 0,$$

să treacă printr'un punct fix și curbele:

$$\sum \frac{\alpha^k}{\alpha_1} = 0, \quad \sum \frac{\alpha_1^{2k}}{m^2} - 2 \sum \frac{\alpha_1^k \beta_1^k}{mn},$$

să fie tangente. (Ultima curbă e de k — ori tangenta fiecărei laturi a triunghiului).

Teorema XI. *Conica circumscrișă C_c :*

$$(C_c) \quad \sum \frac{m}{\alpha_1} = 0,$$

e locul punctelor $\theta(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, așa fel încât curbele:

$$\sum \frac{\alpha^{2k}}{\alpha_1^2} - 2 \sum \frac{\alpha^k \beta^k}{\alpha_1 \beta_1} = 0 \quad \text{și} \quad \sum \frac{\alpha_1^k}{m} = 0,$$

să fie tangente și curba
$$\sum \frac{\alpha^k}{\alpha_1} = 0,$$

să treacă printr'un punct fix.

Teorema XII. Conica C_t :

$$C_t \equiv \sum \frac{\alpha_1^2}{m^2} - 2 \sum \frac{\alpha_1 \beta_1}{mn} = 0,$$

e locul punctelor $\theta(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$, așa fel încât curbele:

$$\sum \frac{\alpha_1}{\alpha^k} = 0, \quad \sum \frac{\alpha_1^k}{m} = 0,$$

să fie tangente și curba

$$\sum \frac{\alpha_1^2}{\alpha^{2k}} - 2 \sum \frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha^k \beta^k} = 0,$$

să treacă printr'un punct fix.

Teorema XIII. Cuartica Q_c :

$$Q_c \equiv \sum \frac{m^2}{\alpha_1^2} - 2 \sum \frac{mn}{\alpha_1 \beta_1} = 0,$$

e locul punctelor $\theta(\alpha \beta_1 \gamma_1)$, așa fel încât curba:

$$\sum \frac{\alpha^{2k}}{\alpha_1^2} - 2 \sum \frac{\alpha^k \beta^k}{mn} = 0,$$

să treacă printr'un punct fix și curbele:

$$\sum \frac{\alpha^k}{\alpha_1^k} = 0 \quad \text{și} \quad \sum \frac{m}{\alpha_1^k} = 0,$$

să fie tangente.

Hiperbola H_i a D-lui ING. NICOLAU (v. art. «Asupra unei hiperbole importante» în G. M. XXVII) nu e altceva decât potențiala de ord $\frac{1}{2}$ a dreptei GK.

Ar fi interesant de studiat proprietățile elementelor a două sisteme potențiale.

(Va urmă)

GRIGORE C. MOISIL.
Liceul „Spiru Haret“, București.

O GENERALIZARE A TEOREMEI LUI FRANKE.

Se cunoaște următoarea teoremă datorită lui FRANKE *):

«Fie A' , B' , C' mijloacele laturilor unui triunghi oarecare ABC și O centrul cercului circumscris. Dacă pe dreptele OA' , OB' , OC' care măsoară distanțele centrului O la laturile triunghiului, se iau respectiv trei puncte A_1 , B_1 , C_1 astfel ca

$$OA'/OA_1 = OB'/OB_1 = OC'/OC_1 = k,$$

dreptele AA_1 , BB_1 , CC_1 se taie într'un acelaș punct N situat pe dreapta lui EULER OGH , a triunghiului ABC .

Generalizarea dată de D-nul TIBERIU POPOVICIU acestei teoreme la pag. 409 din *Gazeta Matematică* Vol. XXVIII, este următoarea:

Fie G centrul de greutate al unui triunghi ABC , A' , B' , C' mijloacele laturilor și O un punct arbitrar din planul triunghiului. Dacă se iau pe dreptele OA' , OB' , OC' respectiv punctele A_1 , B_1 , C_1 astfel ca să avem

$$OA'/OA_1 = OB'/OB_1 = OC'/OC_1,$$

atunci dreptele AA_1 , BB_1 , CC_1 sunt concurente într'un punct N de pe dreapta OG .

Această generalizare este și ea cazul particular al teoremei homotetiei a trei triunghiuri.

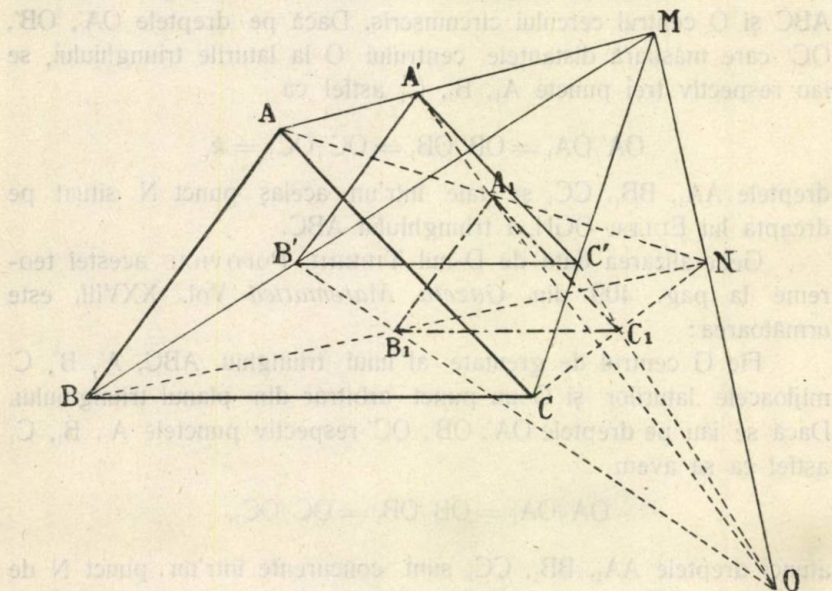
În adevăr, în locul triunghiului $A'B'C'$ format de mijloacele laturilor, care e homotetic cu ABC , putem considera un triunghi oarecare $A'B'C'$ homotetic cu ABC , cu centrul de homotetie oarecare M (vezi figura) și unind vârfurile lui $A'B'C'$ cu un punct O oarecare să luăm pe dreptele OA' , OB' , OC' respectiv trei puncte A_1 , B_1 , C_1 astfel ca să avem

$$OA'/OA_1 = OB'/OB_1 = OC'/OC_1.$$

În virtutea acestor relații, dreptele A_1B_1 , B_1C_1 , C_1A_1 sunt respectiv paralele cu $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ și deci triunghiurile $A_1B_1C_1$

A se vedea: F. — G. M., *Exercices de Géométrie*, sixième édition, question 1242. (o), p. 551.

și $A'B'C'$ sunt homotetice. Rezultă de aci, că triunghiul $A_1B_1C_1$ este homotetic cu ABC , iar dreptele AA_1 , BB_1 , CC_1 concură într'un punct N , care se află, în virtutea teoremei homotetiei, pe axa de homotetie MO .



Dacă în loc de un punct arbitrar M din planul triunghiului ABC , luăm un punct M , care joacă un rol particular în acest triunghi, avem o teoremă ceva mai generală decât a D-lui T. POPOVICIU, căci făcând ca M să coincidă cu centrul de greutate G al triunghiului ABC , în cazul generalizării D-lui T. POPOVICIU, aveam un singur triunghi $A_1B_1C_1$, pe când în cazul nostru, avem o infinitate de triunghiuri.

Dacă acum, după ce am făcut ca centrul de homotetie M al triunghiurilor $A'B'C'$ și ABC să coincidă cu centrul de greutate G al triunghiului ABC , mai facem ca A' , B' , C' să fie respectiv mijloacele laturilor BC , CA , AB (adică raportul de homotetie al celor două triunghiuri să fie $1:2$) atunci obținem generalizarea D-lui T. POPOVICIU. Iar dacă pe lângă acestea, punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , obținem teorema lui FRANKE, axa de homotetie MNO devenind atunci dreapta lui EULER a triunghiului ABC .

Interesantă este și răciproca teoremei generalizate, care se poate enunța astfel :

Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri homotetice cu centrul de homotetie în M și un punct oărecare O . Dacă se ia pe dreapta OM un punct N , atunci dreptele AN, BN, CN taie respectiv dreptele OA', OB', OC' în trei puncte A_1, B_1, C_1 care sunt vârfurile unui triunghi homotetic cu ABC și $A'B'C'$.

În adevăr, transversalele AN, BN, CN tăind respectiv laturile triunghiurilor OMA', OMB', OMC' , ne dau :

$$\frac{A_1A'}{A_1O} \cdot \frac{NO}{NM} \cdot \frac{AM}{AA'} = 1, \quad \frac{B_1B'}{B_1O} \cdot \frac{BM}{BB'} \cdot \frac{NO}{NM} = 1,$$

$$\frac{C_1C'}{C_1O} \cdot \frac{CM}{CC'} \cdot \frac{NO}{NM} = 1.$$

Ținând seamă că prin ipoteză avem

$$AM/AA' = BM/BB' = CM/CC'$$

și comparând cele trei relațiuni de mai sus, deducem că

$$A_1A'/A_1O = B_1B'/B_1O = C_1C'/C_1O,$$

adică laturile A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 sunt respectiv paralele cu $A'B', B'C', C'A'$ și deci cu AB, BC, CA , de unde rezultă că triunghiurile $ABC, A'B'C', A_1B_1C_1$ sunt homotetice.

În cazul particular când A', B', C' sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC și O este centrul cercului circumscris, M este centrul de greutate G al acestui triunghi, iar N fiind un punct de pe dreapta lui EULER, dreptele AN, BN, CN taie mediatoarele OA', OB', OC' în trei puncte A_1, B_1, C_1 astfel că avem :

$$A_1A'/OA_1 = B_1B'/OB_1 = C_1C'/OC_1,$$

$$\therefore OA'/OA_1 = OB'/OB_1 = OC'/OC_1 = k,$$

care este răciproca teoremei lui FRANK.

Din cele de mai sus, se vede ușor că teorema răciprocă generalizează, și Problema 2982 (*Gazeta Matematică* Vol. XXVIII, pag. 313 și u.) precum și generalizarea dată de D-nul CONST. I. GEORGESCU acestei probleme la pag. 316 loc. cit.

MIHAIL I. FOCȘENEANU.

Elev în clasa VIII reală.

NOTE MATEMATICE.

29. *Alte zece aritmetici diverse.* (A se vedeà nota No. 1, pag. 19).
81. **Analitică.** *L. Bianchi.* — Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici e principi della aritmetica analitica. Pisa 1921.
82. **Chineză.** *Arithmétique chinoise* (A se vedeà *L'Intermédiaire des mathématiciens*, vol. V, pag. 144).
83. **Cifrelor. *)** *Aritmetica cu cifre.* București. 1862.
84. **Formelor cuadratice.** *P. Bachmann.* — Die arithmetik der quadratischer Formen. Lipsca 1898.
85. **Ipercomplexă.** *Hypercomplex arithmetic.* Vezi *Bulletin of the American mathematical Society*. Vol. 28, pag. 438.
86. **Legală.** *Die gerichtliche arithmetik in Beziehung auf d. kgl. preuss. Gesetze.* 1824.
87. **Prescurtată. *)** *D. N. Chinez.* — Aritmetica prescurtată 1854.
88. **Scrisă.** *Slate arithmetic.* Vezi *Chamber's educational course of arithmetic*, 1899, pag. 109.
89. **Specială *).** *T. Ciontea.* — Aritmetica generală și specială, 1884.
90. **Uzuală *).** *I. Galescu.* — Aritmetica uzuală. Galați, 1872.

(Va urmă)

I. IONESCU.

30. *Generalizarea problemei 2966.* Dacă m și n sunt cifre, să se găsiască suma:

$$S = m + mn + mn^2 + mn^3 + \dots,$$

suma având p termeni.

*) Comunicate de D-1 E. Ilescu.

Dacă adunăm de o parte și de alta $(p-1)(m-n)$, avem:

$$S + (p-1)(m-n) = m(1+11+111+1111+\dots+\dots);$$

$$S + (p-1)(m-n) = m\left(\frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \dots\right);$$

$$S + (p-1)(m-n) = \frac{m}{9}\left(\frac{10^{p+1}-10}{9} - p\right)$$

$$S = \frac{m}{81}(10^{p+1} - 90p + 71) + (p-1)n.$$

Ca aplicație, să facem $p=1, 2, 3, \dots$ Avem:

$$p=1 \quad S=m,$$

$$p=2 \quad S=11m+n,$$

$$p=3 \quad S=121m+n.$$

M. FROM.

31. *Asupra notei 94, din Anul XXVIII al Gazetei Matematice pag. 448.* În demonstrația dată proprietății din acea notă, s'a omis a se pune condiția că $q < N$, căci altfel conduce la imposibilități de fapt. Dacă s'ar cere cu câte *zerori* se termină $5!!$, am găsi că nu este niciunul, pe când numărul este $120!$ și are multe nule la urmă. Ar fi interesant de studiat cazul $q > N$.

O. POPEA.

32. *Asupra notei No. 94 din Anul XXVIII.*

În această notă, se arată că cea mai mare putere a unui număr q , care divide produsul $N!!!\dots!$, este:

$$A.B.C\dots L,$$

unde:

$$A = E(N/q) + E(N/q^2) + \dots$$

$$B = E(N!/q^A) + E(N!/q^{2A}) + \dots$$

$$\dots$$

Dar, în realitate, cea mai mare putere a lui q este superioară lui:

$$A.B.C\dots L,$$

deoarece în produsul:

$$(N!+1)(N!+2)\dots(N!+N!-1)$$

și altele analoge, unde factorialele sunt de ordin superior, sunt factori cari conțin pe q .

Exemplu. Numărul $7!!$ se divide cu 3^{2516} , iar nu numai cu 3^{12516} .

I. B. FLORESCU.

33. *Asupra problemei 1730.* (G. M. vol. XXVIII, Pag. 410).

. *Să se rezolve în numere întregi ecuațiunea:*

$$(1) \quad 2/z = 1/x + 1/y.$$

Se poate da o soluțiune mai simplă și mai completă decât cea dată de D-l I. T. RIZESCU și pur aritmetică, în felul următor:

Scriem egalitatea (1) sub forma:

$$(2) \quad z = 2xy/(x + y)$$

și să presupunem D cel mai mare comun divizor al numerelor x, y , punând în acest caz:

$$x = DX, \quad y = DY, \quad z = DXY/(X + Y).$$

X și Y fiind două numere prime între ele, numerele XY și $X + Y$ sunt asemenea prime între ele; deci, pentru ca z să fie întreg, este necesar și suficient să avem:

$$X + Y = A \quad \text{și} \quad D = A \times B \quad \text{sau} \quad 2D = A \times B.$$

Presupunând deci că luăm $C < A$, putem scrie soluțiunea problemei sub forma:

$$(I) \quad X = C, \quad Y = A - C, \quad z = 2BC(A - C), \quad D = A \times B,$$

sau

$$(II) \quad X = C, \quad Y = 2A' - C, \quad z = BC(2A' - C), \quad D = A' \times B.$$

De unde, trecând la x, y, z , avem soluțiunile generale:

$$(I') \quad x = ABC, \quad y = AB(A - C), \quad z = 2BC(A - C), \quad (C < A)$$

și

$$(II') \quad x = ABC, \quad y = AB(2A - C), \quad z = BC(2A - C), \quad (C < 2A).$$

Dacă în soluțiunea (II'), facem: $B = 1, A = u, C = u + v$, avem

$$x = u(u + v), \quad y = u(u - v), \quad z = (u + v)(u - v),$$

sub forma dată de D-l RIZESCU.

O. N. Ț.

34. *O completare.* In «Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen unterricht aller schulgattungen», 1923; 4 Heft; gădesc următoarea problemă propusă de D-I BRETTAR:

«Ist π eine Primzahl — grösser als 3 — und P relativ prim zu π , dann ist $P\pi - P$ von der Form $6\pi k!$, ist π eine Primzahl — ausser 2, 3, 7, dann hat π^6 die Forme $168k+1$.»

Prima parte a problemei se demonstrează ușor cu ajutorul teoremei lui FERMAT. A doua parte a problemei, însă, nu e completă, căci, dacă π este diferit de 2, 3 și 7, atunci

$$\pi^6 - 1 = 504k.$$

In adevăr, $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. Ori:

$$\pi^6 - 1 = (\pi^2 - 1)(\pi^4 + \pi^2 + 1).$$

Dar $\pi^2 - 1 = \mathcal{M} 24$, când $\pi > 3$ (o teoremă cunoscută); apoi $\pi^6 - 1 = \mathcal{M} 7$ (FERMAT) și în fine, un număr prim mai mare ca 3 are forma $\mathcal{M} 6 \pm 1$, deci:

$$\pi^4 + \pi^2 + 1 = \mathcal{M} 3.$$

C. c. e. d. d.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

35. *O generalizare.* In Fitz-Patrik, 64, probl. 74, gădesc o problemă, care se poate generaliza astfel:

Dacă se împart n numere prime printr'un acelaș divizor, produsul numerelor micșorat cu produsul resturilor, este multiplu al acelui divizor.

In adevăr, fie:

$$N_1 = D.C_1 + R_1$$

$$N_2 = D.C_2 + R_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$N_n = D.C_n + R_n.$$

Atunci:

$$P = N_1 \cdot N_2 \dots N_n = \mathcal{M} D + R_1 \cdot R_2 \dots R_n$$

C. c. e. d. d.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

36. *Asupra unor proprietăți ale dreptei lui SIMSON.* (A se vede notațiunile și figura dela pag. 152 și 153 din *Gazeta Matematică* Vol. XXVIII).

1. D-nul profesor TR. LALESCU în notele 71 și 72 din *Gazeta Matematică* Vol. XXVIII pag. 369 și u. arată câteva aplicațiuni ale teoremei: Distanțele mutuale dintre isogonalele unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi, sunt egale respectiv cu segmentele determinate de laturile triunghiului pe dreapta lui SIMSON a punctului considerat. Voiu da aci o demonstrație simplă a acestei proprietăți.

Triunghiurile asemenea QSP, ABP ne dau

$$(1) \quad QS/SP = AB/PB.$$

Triunghiurile asemenea ABB', BPS ne dau

$$(2) \quad BB'/SP = AB/PB.$$

Comparând aceste două egalități, deducem:

$$BB' = QS,$$

tocmai rezultatul D-lui profesor TR. LALESCU.

2. Cu ajutorul relațiilor dela punctul precedent, se poate demonstra ușor teorema D-lui inginer V. CRISTESCU, care formează obiectul notei 42 dela pag. 249 *Gazeta Matematică*, Vol. XXVIII.

În adevăr, triunghiurile asemenea PRS, PAC ne dau relația

$$(3) \quad SR/SP = AC/PC.$$

Împărțind relația (3) prin relația (1), avem

$$SR/SQ = AC \cdot PB/AB \cdot PC.$$

Triunghiurile asemenea PBR, PCQ ne dau însă

$$PB/PC = PR/PQ,$$

iar relația precedentă devine

$$SR/SQ = AC \cdot PR/AB \cdot PQ.$$

Această relație exprimă tocmai teorema D-lui V. CRISTESCU.

B. M. BARBĂLATT.

Elev cl. VII, Liceul Codreanu, Bârlad.

37. *Asupra problemei 1718 (Gazeta Mat. Vol. XVIII, p. 301 ș. u.)* Fie O centrul cercului circumscris, O₉ centrul cercului celor

nouă puncte și O_a centrul cercului BOC. Teorema D-lui Profesor A. ANGELESCU, care face obiectul problemei 1718, este următoarea :

Dreapta AO_a și analoagele sale BO_b , CO_c sunt concurente în isogonalul centrului O_9 a cercului EULER.

În deosebire de cea din Gazetă, voi da o altă soluție acestei proprietăți.

Fie A' , B' , C' picioarele înălțimilor triunghiului ABC și α un punct oarecare de pe arcul $B'C'$ din cercul lui EULER, situat de aceeași parte a lui $B'C'$ ca și vârful A . Avem

$$\sphericalangle B'A'C' = 180^\circ - 2A, \quad \therefore \quad \sphericalangle B'\alpha C' = 2A.$$

Dar unghiul BOC este și el egal cu $2A$.

Rezultă că cercurile O_a și O_9 reprezintă segmentele de cerc capabile de unghiul $2A$, descrise respectiv pe BC și $B'C'$, iar triunghiurile ABC și $AB'C'$ fiind asemenea, căci $B'C'$ e antiparalelă cu BC , urmează că cercurile O_a și O_9 sunt două figuri omoloage în cele două triunghiuri asemenea.

Rezultă de aici că AO_a și AO_9 sunt drepte isogonale în raport cu unghiul BAC. Analog BO_b și CO_c sunt respectiv isogonalele lui BO_9 și CO_9 . Deci AO_a , BO_b , CO_c sunt concurente în isogonalul lui O_9 .

MICU GRÜNBAUM.

Elev în Cl. VIII, Liceul Codreanu, Bârlad.

38. *Asupra problemei 2992.* Vreau să observ că expresiunile propuse în această problemă sunt sume de două puteri asemenea, fără ca $a^2 - 4b$ să fie patrat perfect și apoi să arăt că problema în chestiune este în strânsă legătură cu seriile recurente.

În adevăr, dacă însemnez cu u_4 , u_5 expresiunile date :

$$\begin{aligned} u_4 &= a^4 - 4a^2b + 2b^2 \\ u_5 &= a^5 - 5a^3b + 5ab^2, \end{aligned}$$

observ că

$$\begin{aligned} u_5 &= a(a^4 - 4a^2b + 2b^2) - b(a^3 - 3ab) \\ \therefore u_5 &= au_4 - bu_3; \end{aligned}$$

la fel :

$$\begin{aligned} u_4 &= a(a^3 - 3ab) - b(a^2 - 2b) \\ \therefore u_4 &= au_3 - bu_2 \\ u_3 &= a(a^2 - 2b) - ba \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots \quad u_3 &= au_2 - bu_1 \\ u_1 &= a \quad u_0 = 2 \end{aligned}$$

u_4, u_5 sunt termenii de rang 4, 5 ai unei serii recurente, în care trei termeni consecutivi sunt legați prin relația:

$$(2) \quad u_n = au_{n-1} - bu_{n-2}, \quad u_0 = 2, \quad u_1 = a.$$

Se știe însă că în acest caz, dacă u și v sunt rădăcinile ecuației, pe care s'o numesc *caracteristică* a șirului recurent:

$$x^2 - ax + b = 0,$$

atunci termenul general u_n este dat de expresiunea:

$$u_n = \lambda u^n + \mu v^n,$$

în care:

$$\lambda = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2\sqrt{a^2 - 4b}} u_0 + \frac{u_1}{\sqrt{a^2 - 4b}},$$

$$\mu = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2\sqrt{a^2 - 4b}} u_0 - \frac{u_1}{\sqrt{a^2 - 4b}},$$

în cazul nostru, $u_0 = 2, u_1 = a$, deci:

$$\lambda = \mu = 1,$$

așa încât:

$$u_n = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \right)^n + \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \right)^n,$$

în cazul când $a^2 - 4b$ este patrat perfect, el este de aceeași paritate cu a , așa că rădăcinile u și v sunt numere întregi.

Cu această ocaziune, mai observ că:

$$u_n^2 = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \right)^{2n} + \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \right)^{2n} + 2 \left(\frac{4b}{4} \right)^n$$

$$u_n^2 = \left(\frac{a^2 - 2b + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \right)^n + \left(\frac{a^2 - 2b - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \right)^n + 2b^n$$

M. G.

39. Generalizarea problemei 16, C. d. P. de Mecanică (cap. I, pag. 3). «Dacă se ia rezultanta R a n forțe concurente $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ apoi rezultanta S_i a forței F_i și R , avem:

$$\sum S_i^2 = \sum F_i^2 + (n+2) R^2.$$

Se știe că: $R^2 = \sum F_i^2 + \sum F_i F_k \cos \alpha_{i,k}$ (1)
 $\alpha_{i,k}$ fiind unghiul direcțiilor F_i cu F_k .

De asemenea, se știe că : $S_i^2 = F_i^2 + R^2 + 2 F_i R \cos(F_i, R)$.

Prin urmare: $\sum S_i^2 = \sum F_i^2 + nR^2 + 2 \sum F_i R \cos(F_i, R)$. (2)

Rămâne să arătăm că

$$\sum F_i R \cos(F_i, R) = R^2. \quad (3)$$

Intr'adevăr, proiectând rezultanta R succesiv pe $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$, vom avea :

[illegible]

În multitudine relațiile (4) respectiv $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$, obținem:

$$\sum F_i R \cos (F_i, R) = \sum F_i^2 + 2 \sum F_i F_k \cos \alpha_{i,k} = R^2.$$

Inlocuind în (2) căpătăm:

$$\sum S_i = \sum F_i^2 + (n + 2) R^2.$$

Tocmai ceeace trebuia să demonstrăm.

Pentru $n = 2$, suntem în cazul problemei din C. de P.

ADRIAN A. BUȘILĂ.

CHESTIUNI DE EXAMEN

SCOALA POLITEHNICĂ DIN BUCUREȘTI

EXAMENUL DE ADMITERE IN ANUL I

PROBELE SCRISE.

(Noemvrie 1923).

Trigonometrie. 1. Pe două roți cu axele paralele, se află întinsă o curea ABCDEFA. Să se calculeze lungimea curelei, știind că diametrul unei

roți este 2,40 metri, al celeilalte de 1,00 metru, iar distanța OO' dintre centre este de 5,00 metri. Firul mijlociu al curelei este într'un plan.

2. Să se calculeze cea mai mică valoare a lui x din relația :

$$\cotgx = \sqrt[3]{\frac{0,1 \sin 15^\circ 36' 17''}{\cos^2 32^\circ 15' 20''}}$$

3. Să se discute ecuațiunea :

$$\sin x + 2 \cos x = a.$$

În particular, să se afle toate valorile lui x , care verifică ecuația în cazul când $a = 1$.

Rezultatele se vor exprima în grade și în radianți.

Timpul acordat : $3\frac{1}{2}$ ore.

Soluție. Chestiunea 1. Fie O centrul cercului de diametru $D = 2,40$ metri, care reprezintă roata mare, fie O' centrul cercului de diametru $d = 1,00$ metru, care reprezintă roata cea mică, și fie AB și ED tangentele exterioare comune celor două cercuri O și O' .

Din cauza simetriei figurei, față de linia centrelor, lungimea L a curelei va fi :

$$L = 2 [AB + \text{arc}BC + \text{arc}AF].$$

Să calculăm pe rând: valoarea tangentei AB , a arcului BC și apoi a arcului AF .

a) Pentru obținerea tangentei AB , duc din centrul O' , al cercului cel mic o dreaptă paralelă cu tangenta AB . Fie G punctul unde această paralelă întâlnește raza OA . Se formează triunghiul dreptunghic GOO' în care cateta $O'G$ este egală cu tangenta AB , ca paralele coperse între paralele, deci :

$$AB = GO' = OO' \sin \alpha = a \sin \alpha$$

în care :

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{R-r}{a}\right)^2},$$

deci

$$AB = a \sqrt{1 - \left(\frac{R-r}{a}\right)^2} = 5,00 \sqrt{1 - \left(\frac{1,20 - 0,50}{5,00}\right)^2} = 4,951 \text{ m.}$$

b) Lungimea arcului BC este :

$$\text{arc}BC = \pi r \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}.$$

Valoarea unghiului α o deducem tot din triunghiul dreptunghic GOO' .

$$\cos \alpha = \frac{R-r}{a} = \frac{1,20 - 0,50}{5,00} = 0,14 = \cos 81^\circ 57' 49''$$

$$\therefore \alpha = 81^\circ 57' 49'' = 81,96362$$

$$\text{arc}BC = 3,1416 \times 0,50 \times \frac{81,96362}{180^\circ} = 0,708 \text{ m.}$$

c) Lungimea arcului AF este:

$$\text{arcAF} = \frac{\pi R (180^\circ - \alpha)}{180^\circ}$$

$$\text{arcAF} = 3.1416 \times 1.20 \frac{98^\circ 03' 37''}{180^\circ} = 2.053 \text{ m.}$$

Lungimea curelei va fi deci:

$$L = 2[4.951 + 0.708 + 2.053] = 15.424 \text{ metri.}$$

Chestiunea 2. Aplicând logaritmi expresiunii:

$$\cotg x = \sqrt[3]{\frac{0.1 \times \sin 15^\circ 36' 17''}{\cos^2 32^\circ 15' 20''}}$$

avem:

$$\log \cotg x = \frac{1}{3}(\log 0.1 + \log \sin 15^\circ 36' 17'' - 2 \log \cos 32^\circ 15' 20'').$$

Tabelele ne dau:

$$\log 0.1 \dots \dots \dots = 1.00000$$

$$\log \sin 15^\circ 36' 17'' \dots \dots \dots = 1.42975$$

$$2 \log \cos 32^\circ 15' 20'' \dots \dots \dots = 0.14560$$

$$\hline 2.57535$$

$$\dots \log \cotg x = \frac{2.57535}{3} = 1.52512$$

$$\dots x = 71^\circ 28' 34''.$$

Chestiunea 3. Inlocuind in ecuațiunea dată pe

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x},$$

obținem:

$$5 \sin^2 x - 2a \sin x + a^2 - 4 = 0,$$

ecuațiune de gradul al doilea in raport cu $\sin x$. Deducem:

$$\sin x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 20(a^2 - 4)}}{10}.$$

Examinând ecuațiunea dată se vede că a nu poate fi in valoare absolută mai mare ca 2, deci cantitatea de sub radical este întotdeauna pozitivă

$$4a^2 - 20(a^2 - 4) = -16a^2 + 80 > 0.$$

Concludem că rădăcinile vor fi întotdeauna reale.

In particular, când $a = 1$ avem:

$$\sin x_1 = 1 \quad \text{și} \quad \sin x_2 = -\frac{3}{5}.$$

De unde:

$$x_1 = 90^\circ + 360^\circ n \quad \text{și}$$

$$x_2 = -36^\circ 52' 11'' + 360^\circ n.$$

Valoarea in grade a unui radiant este

$$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44'' = 57^\circ 29' 55''.$$

Deci valorile neperiodice ale lui x_1 și x_2 sunt :

$$x_1 = \frac{90^\circ}{57^\circ.2955} = 1,57 \text{ rad.}$$

$$x_2 = -\frac{36^\circ.8697}{57^\circ.2955} = -0,64 \text{ rad.}$$

INGINER-ŞEF C. D. ORĂŞANU.

Licentiat în matematici.

BIBLIOGRAFIE.

Mathesis. Vol. XXXVII. No. 9 Noembrie 1923, Bruxelles. Bibliografia triunghiului și tetraedului, de J. N. Un punct remarcabil în cubice, de CL. SERVAIS. Asupra unei proprietăți a dreptei lui SIMSON și extensiunea ei la tetraedru, de R. GOORMAGTIGH. Cappa și strofoida, de R. DEAUX. Volumul câtorva tetraedre, de J. NEUBERG. Geometrie și mecanică, de V. THÉBAULT. Note de algebră elementară de AD. M.

Journal de mathématiques élémentaires par H. VUIBERT. Anul 48 No. 4, 5, 6. Noembrie și Decembrie 1923. Paris. Asupra rețelelor de cercuri, de J. COISSARD.

Revista matematică din Timișoara. Anul III No. 10. Decembrie 1923 Timișoara. Asupra unei formule de derivare, de A. ANGELESCU.

Journal matematic. Revistă matematică publicată de TIB. POPOVICIU. Volumul I, No. 1, 1 Ianuarie 1924. Arad. Redacția: TIB. POPOVICIU, Str. Nicu Filipescu No. 25, Arad. Administrația: TR. UDRISKY, Str. Regele Ferdinand No. 8, Arad. Apare de 2 ori pe lună. 1 Volum are 12 numere și costă 20 lei. Numărul costă 2 lei. Cuvânt înainte, de T. P. Asupra unor ceviane într'un triunghi, TIB. POPOVICIU. Note. Probleme propuse. Informațiuni. (Foaia de 12 pagini este scoasă la ciclostil).

P. SERGESCU. *Sur la distribution des valeurs caractéristiques des noyaux de Marty* $N(x, y) = A(x) k(x, y)$. Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie de Sciences* din Paris, vol. 177, pag. 519.

E. ABASOHN. *Probleme de electricitate și electrotehnică.* Cuprinde soluțiunile chestiunilor propuse la examenele parțiale și generale dela Școala Politehnică din București, cu o notă asupra aplicațiunii imaginarelor în electricitate. București 1923. Apărută în „Biblioteca Asociației de matematici pure și aplicate”, sub No. 16.

CĂPITAN I. LINTES. *Concentrarea focurilor, contribuțiuni la întrebuințarea artileriei.* Timișoara, 1923.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2759. Fie φ punctul lui FEUERBACH al unui triunghi ABC (punctul de contact al cercului înscris cu cercul celor nouă puncte). Să se demonstreze că între distanțele punctului φ la punctele de contact D, E, F a cercului înscris cu laturile BC, CA, AB avem relațiunea:

$$\varphi F \sin \frac{1}{2}C = \varphi D \sin \frac{1}{2}A + \varphi E \sin \frac{1}{2}B.$$

($a > c > b$).

După ce am propus relația care face obiectul acestei probleme, am găsit că ea a fost stabilită de D-nul J. NEUBERG în *Mathesis* 1908, p. 204 și 205, unde figurează printre mai multe proprietăți ale punctului φ^*). Imprumutăm de acolo și soluția.

D-nul J. NEUBERG demonstrează acolo că coordonatele bari-centrice ale punctului φ , în raport cu triunghiul de referență DEF, sunt

$$\frac{\cos \frac{1}{2}A}{\sin \frac{1}{2}(B-C)}, \quad \frac{\cos \frac{1}{2}B}{\sin \frac{1}{2}(C-A)}, \quad \frac{\cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}(A-B)}.$$

Laturile triunghiului DEF, având ca valori:

$$EF = 2r \cos \frac{1}{2}A, \quad FD = 2r \cos \frac{1}{2}B, \quad DE = 2r \cos \frac{1}{2}C,$$

coordonatele normale ale lui φ , în triunghiul DEF, sunt:

$$\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(B-C)}, \quad \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(C-A)}, \quad \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(A-B)}.$$

De aici conchidem, că avem

$$\frac{\varphi D}{\sin \frac{1}{2}(B-C)} = \frac{\varphi E}{\sin \frac{1}{2}(C-A)} = \frac{\varphi F}{\sin \frac{1}{2}(A-B)}.$$

Relațiunea propusă se reduce deci la a demonstra că avem

$$\sum \sin \frac{1}{2}C \sin \frac{1}{2}(A-B) = 0, \quad \text{sau} \quad \frac{1}{2} \sum (\sin A - \sin B) = 0,$$

ceea ce este adevărat.

Dar mai avem și egalitatea

$$\sum \cos \frac{1}{2}C \sin \frac{1}{2}(A-B) = 0, \quad \text{sau} \quad \frac{1}{2} \sum (\cos B - \cos A) = 0,$$

care ne dă

$$\sum \cos \frac{1}{2}C \cdot \varphi F = 0,$$

*) J. NEUBERG, *Sur le Théorème de FEUERBACH*, *Mathesis* année 1908, pag. 201.

relațiune care exprimă teorema lui PTOLEMEU și care are loc pentru orice punct de pe cercul înscris în triunghiul ABC.

Noi am găsit relația propusă, calculând dădreptul distanțele φD , φE , φF . Avem :

$$\varphi D^2 = \frac{(c-b)^2(p-a)}{a} \cdot \frac{r}{R-2r}, \quad \varphi E^2 = \frac{(a-c)^2(p-b)}{b} \cdot \frac{r}{R-2r},$$

$$\varphi F^2 = \frac{(a-b)^2(p-c)}{c} \cdot \frac{r}{R-2r}.$$

V. CRISTESCU.

Notă. D-nii CONST. I. GEORGESCU și ȘT. FL. LĂZĂRESCU au demonstrat relația

$$\sum \varphi F \cos \frac{1}{2} C = 0,$$

care exprimă teorema lui PTOLEMEU în raport cu patrulaterul înscritibil φDFF .

PROBLEMA 2905. Să se demonstreze inegalitățile:

$$\sin x < \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{x}{2^n} < x$$

$$x < \sum_{n=1}^{n=\infty} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} < \operatorname{tg} x,$$

prima când x e un arc pozitiv mai mic decât 2π , iar a doua când $0 < x < \pi/2$.

AL. STOICA.

Soluție dată de D-I A. FÎNȚESCU (elev cl. VIII, liceul «Mihai Viteazul», București).

1. Arcul α fiind cuprins între 0 și π , pe lângă inegalitatea cunoscută

$$(1) \quad \sin \alpha < \alpha,$$

putem stabili inegalitatea

$$(2) \quad \sin \alpha > \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

Intr'adevăr, având : $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, se deduce în cazul

când $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, că: $\sin 2\alpha < 2\sin \alpha$; observând că $\sin \alpha > 0$, iar $0 < \cos \alpha < 1$.

În cazul când $\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$, inegalitatea (2) rămâne adevărată, deoarece $\sin 2\alpha < 0$, iar $\sin \alpha > 0$.

Deasemenea, inegalitatea (1) subzistă în cazul când $\pi < \alpha < 2\pi$, observând că în acest caz avem: $\sin \alpha < 0$, iar $\alpha > 0$.

Avem deci în general, α fiind un arc cuprins între 0 și 2π , inegalitatea dublă:

$$(A) \quad \frac{1}{2}\sin 2\alpha < \sin \alpha < \alpha.$$

Pentru inegalitățile noastre, eră suficient să presupunem arcul α cuprins între 0 și π , valorile pe care să le dăm lui α fiind:

$$\frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \frac{x}{2^3}, \dots, \frac{x}{2^n}.$$

Pentru stabilirea primelor inegalități, să generalizăm inegalitatea (A).

Să scrim pentru aceasta inegalitatea (2) pentru $\alpha, \alpha/2, \alpha/2^2, \dots, \alpha/2^p$ și să înmulțim între ele inegalitățile obținute; avem:

$$\frac{\sin 2\alpha}{2^{p+1}} < \sin \frac{\alpha}{2^p}.$$

De altă parte, având: $\sin \frac{\alpha}{2^p} < \alpha/2^p$ deducem inegalitatea mai generală:

$$(B) \quad \frac{\sin 2\alpha}{2^{p+1}} < \frac{\sin \alpha}{2^p} < \frac{\alpha}{2^p}, \quad (0 < \alpha < \pi)$$

care pentru $p=0$, se reduce la (A).

Făcând acum pe $\alpha = x/2$, avem:

$$\frac{\sin x}{2^{p+1}} < \sin \frac{x}{2^{p+1}} < \frac{x}{2^{p+1}}.$$

Dacă considerăm suma:

$$S_n = \sum_{p=0}^{p=x-1} \sin \frac{x}{2^{p+1}},$$

observăm că ea are termenii săi pozitivi respectiv inferiori termenilor unei progresii descrescătoare:

$$S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{x}{2^{p+1}},$$

deci când n tinde la ∞ , S_n admite o limită cuprinsă între :

$$\sin x \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \text{ și } x \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+1}}; \text{ adică}$$

$$\sin x < \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n} < x. \quad (A)$$

C. C. T. D.

În acelaș mod, presupunând $0 < \alpha < \pi/2$, putem stabili inegalitatea :

$$(C) \quad \alpha/2 < \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha < \operatorname{tg} \alpha/2.$$

Arcul α fiind în primul cadran, se cunoaște inegalitatea :

$$(3) \quad \alpha/2 < \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha;$$

de altă parte, observând că $0 < \alpha/2 < \pi/4$, deci că $1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha < 1$, se deduce din relația :

$$2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha),$$

inegalitatea :

$$(4) \quad 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha < \operatorname{tg} \alpha,$$

deoarece $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

Din inegalitățile (3) și (4), rezultă (C).

Făcând succesiv în (4), pe α egal cu α , $\alpha/2$, $\alpha/2^2$, ..., $\alpha/2^p$ și înmulțind inegalitățile obținute, avem inegalitatea mai generală

$$(D) \quad \alpha/2^p < \operatorname{tg} \frac{1}{2^p} \alpha < \operatorname{tg} \alpha/2^p,$$

în care, făcând $p = 1$, avem inegalitatea (C).

Acum, dacă considerăm suma :

$$S_n = \sum_{p=1}^{p=n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^p},$$

observăm că termenii ei pozitivi sunt respectiv mai mici decât termenii unei progresii geometrice descrescătoare, deci când n tinde la infinit, S_n admite o limită :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} \text{ cuprinsă între } x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ și } \operatorname{tg} x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \text{ adică :}$$

$$x < \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} < \operatorname{tg} x.$$

C. C. T. D.

Au rezolvat problema D-nii : GH. I. JUJESCU, I. M. ȘERBĂNESCU, IOAN B. FLORESCU, TIBERIU POPOVICIU, FLOREA NEGRETZU, C. I. GEORGESCU, L. FOCȘENEANU, N. GEORGESCU-ROEGEN, EMILIAN D. ILIESCU, IOAN S. ANTONIU, T. I. POPA, EMIL ȘTEFĂNESCU, FLORIAN GR. GEORGESCU, C. E. GEORGESCU, EUGENIU I. BĂLAN, ADRIAN A. BUȘILĂ, JEAN TH. LĂZĂRESCU, I. CONSTANTINESCU, CRISTEA P. GOILAV, NICU P. ARCADIAN.

PROBLEMA 2928. *O cutie paralelipipedică e așezată pe o masă orizontală. Într'ânsa se pune o cantitate oarecare de apă și se închide. Rostogolind cutia în jurul unei muchii de pe masă, la ce înclinare va începe să se ude capacul ? La ce înclinare va fi capacul complet ud ?*

Se vor examina toate cazurile posibile.

ION IONESCU.

Soluție dată de D-l MIRON NICULESCU (Student, București).

Fie a, b muchiile de pe masă, c înălțimea cutiei, $V = abc$ volumul ei și v volumul de apă ce conține. Să presupunem că rostogolirea se face în jurul muchiei b .

Vom examina următoarele cazuri :

I. $V < 2v$. Fie α înclinarea fundului față de masă, când apa atinge capacul. Pe o față, apa va uda toată muchia c , iar pe față opusă numai o porțiune x , așa că :

$$v = \frac{bc + bx}{2} \times a$$

$$\therefore x = \frac{2v - abc}{ab} = \frac{2v - V}{ab}.$$

Fie y distanța la care planul apei taie planul bazei cutii, pornind dela muchia de rostogolire. Se vede, din asemănarea de triunghiuri, că avem :

$$\frac{c}{x} = \frac{y}{y-a},$$

$$\therefore y = \frac{ac}{c-x} = \frac{ac}{c - \frac{2v-v}{ab}} = \frac{a^2bc}{abc-2v+v} = \frac{aV}{2(V-v)}.$$

De aci, scoatem :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{y} = \frac{2c(V-v)}{aV},$$

care ne dă unghiul căutat α .

Continuând cu rostogolirea, fața bc se va așeza pe masă fără ca tot capacul să se ude. Rostogolirea se va face în jurul altei muchii a feței acesteia și ne găsim atunci în cazul precedent. Dar dacă β este unghiul cu care va trebui să rostogolim din nou cutia, vom avea în mod analog, pentru udarea capacului în total

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2a(V-v)}{cV}.$$

Dacă rostogolirea se făcea în jurul muchiilor a , se găseau rezultate analoage, în care numai a se înlocuește cu b .

II. $V = 2v$. Formulele precedente devin, în acest caz :

$$\operatorname{tg} \alpha = c/a, \quad \operatorname{tg} \beta = a/c.$$

III. $V > 2v$. În acest caz, când apa atinge capacul, ea are forma unei prisme triunghiulare cu baza bc și cu o înălțime $x < a$, pe această muchie. Deci :

$$v = \frac{1}{2} bcx,$$

$$x = 2v/bc = 2av/V$$

și deci :

$$\operatorname{tg} \alpha = c/x = cV/2av.$$

$$\operatorname{tg} \beta = aV/2cV.$$

E de observat că în toate cazurile, β mărit cu 90° ne dă învârtirea totală a cutiei, până ce se udă complet capacul.

Se mai observă că pentru un volum dat al cutiei și al apei, α și β nu depind de lungimea muchiei rostogolitoare.

PROBLEMA 3012. Dându-se numărul:

$$N = 3!!!$$

Se cere:

- 1) Numărul zerorilor cu care se termină.
- 2) Cel mai mare exponent al lui 3, care divide pe N.
- 3) Numărul de cifre al lui N.
- 4) Eliminându-se zerourile numărului N, se cere valoarea numerică a cifrei dela dreapta numărului astfel obținut.

CĂPITAN I. LINTES.

1) Numărul zerorilor lui N, provine din înmulțirea lui 2 cu 5; ori într'un număr de forma:

$$N = 3!!! = 6!! = 720!$$

exponentul lui 2 va fi mai mare decât al lui 5, deci exponentul lui 5 va fi acela, care ne va da numărul de zerori cu care se termină N și cum cea mai mare putere al lui 5, care divide pe N, este:

$$p = E(720/5) + E(720/5^2) + E(720/5^3) + \dots,$$

unde E(l) înseamnă numărul întregilor cuprinși în l (notațiunea lui Legendre), sau:

$$P = 144 + 28 + 5 + 1 = 178,$$

numărul N se va termina cu 178 de zero.

2) Cel mai mare exponent al lui 3, care divide pe N, este:

$$q = E(720/3) + E(720/3^2) + E(720/3^3) + \dots$$

$$= 240 + 80 + 26 + 8 + 2 = 356,$$

adică 356.

3) Numărul de cifre al lui N se poate defini aproximativ între două limite, servindu-ne de cunoscuta inegalitate:

$$\alpha) \sqrt[n]{n!} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad (\text{Culegere de Probleme, Algebră IX. 23})$$

unde, făcând $n = 720$ și aplicând logaritmi, găsim că: numărul cifrelor lui N este cuprins între 1029 și 1841.

Deasemenea, putem afla numărul cifrelor lui N cu aproximație, servindu-ne de formula lui STIRLING, adică:

$$\beta) n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt[12]{2\pi n},$$

unde $\theta = 1/2$ aprox., deci aplicând și aici logaritmi, avem :

$$\log (720!) = 720 (\log 720 - \log e) \\ + \frac{\log e}{17280} + \frac{\log 2 + \log \pi + \log 720}{2}$$

și cum :

$$\log 720 = 2,85733 ; \quad \log e = 0,43429 ;$$

$$\log 2 = 0,30103 ; \quad \log \pi = 0,49715 ;$$

avem :

$$\log (720!) = 1746,41658.$$

Prin urmare, N va avea 1747 cifre, număr care nu este exact, totuși e foarte apropiat.

D-l PINCU KATZ, a găsit că N are 1746 cifre, descompunând pe N în factori primi și apoi aplicând logaritmi.

4. Ultima cifră a numărului obținut prin eliminarea zerorilor cu care se termină N, se găsește descompunând pe N în factori primi și apoi vom elimina zerorile, eliminând factorii 2 și 5. Factorii primi ai lui N sunt toate numerele prime și mai mici ca 720.

Exponenții acestor factori însă se pot deduce ușor, așa cum am văzut la punctele 1) și 2) ale problemei și găsim astfel că N are următorii factori primi :

2⁷¹⁶. 3³⁵⁶. 5¹⁷⁸. 7¹¹⁸. 11⁷⁰. 13⁵⁹. 17⁴⁴. 19³⁸. 23³². 29²⁴. 31²³. 37¹⁹. 41¹⁷.
43¹⁶. 47¹⁵. 53¹³. 59¹². 61¹¹. 67¹⁰. 71¹⁰. 73⁹. 79⁹. 83⁸. 89⁸. 97⁷. 101⁷. 103⁶.
107⁶. 109⁶. 113⁶. 127⁵. 131⁵. 137⁵. 139⁵. 149⁴. 151⁴. 157⁴. 163⁴. 167⁴.
173⁴. 179⁴. 181³. 191³. 193³. 197³. 199³. 211³. 223³. 227³. 229³. 233³.
239³. 241². 251². 257². 263². 269². 271². 277². 281². 283². 293². 307².
311². 313². 317². 331². 337². 347². 349². 353². 359². 367. 373. 379. 383.
389. 397. 401. 409. 419. 421. 431. 433. 439. 443. 449. 457. 461. 463.
467. 479. 487. 491. 499. 503. 509. 521. 523. 541. 547. 557. 563. 569.
571. 577. 587. 593. 599. 601. 607. 613. 617. 619. 631. 641. 643. 647.
653. 659. 661. 673. 677. 683. 691. 701. 709. 719.

Dintre acești factori, vom elimina zerorile cu care se termină N, adică factorii 2⁷¹⁶ și 5¹⁷⁸ (cea mai mare putere a lui 5 care divide pe N). Apoi ținând seamă că : *ultima cifră cu care se termină un număr ridicat la o putere, este ultima cifră cu care se termină cifra unităților aceluși număr, ridicată la acea putere și mai ținând seamă că :*

$$3^{4n} = 81^n \quad \text{se termină cu } 1$$

$$7^{4n} = 2401^n \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 1$$

$$9^{2n} = 81^n \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 1$$

$$(3.7)^n = 21^n \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 1,$$

vom elimina toate aceste grupe și vom conchide că N — fără zerori — se va termina cu aceeași cifră ca și numărul:

$$\begin{aligned} & 2^{538} \cdot 7^2 \cdot 3^3 \cdot 7^3 \cdot 7^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3^3 \cdot 7^3 \cdot 9 \cdot 3^3 \cdot 7^3 \cdot \\ & 9 \cdot 3^3 \cdot 9 \cdot 7^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot \\ & 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3 \cdot \\ & 7 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 9. \end{aligned}$$

Grupând acum factorii acestui număr astfel încât fiecare grupă să se termine cu 1, ne mai rămâne:

$$2^{538} \cdot 3^2.$$

Dar $2^{4n} = 16^n$, se termină cu 6, deci:

$$2^{538} = 2^{4 \cdot 134} \cdot 2^2.$$

Deci se va termina cu:

$6 \cdot 2^2 = 24$, adică cu cifra 4 și prin urmare N se va termina cu ultima cifră a numărului:

$$4 \cdot 3^2 = 36,$$

adică: *ultima cifră cu care se termină N este 6* — atunci când i se elimină zerorile.

CĂPITAN I. LINTES.

Au rezolvat problema după cum urmează:

1) și 2) ca în mai sus, D-nii: Pincu KATZ, LEON WEISS, M. ADAM, SIGNER-IGNACE și EM. ȘTEFĂNESCU.

3) D-l Pincu KATZ a găsit numărul cifrelor lui N descompunându-l în factori și apoi aplicând logaritmi. D-nii: M. ADAM și ANTONIU V. ALBOV au aplicat formula lui STIRLING.

D-l EM. ȘTEFĂNESCU a aplicat neegalitatea:

$$\sqrt{n^n} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

D-l IONESCU-BREZUICA a aflat numărul cifrelor lui N din condiția:

$$n! < n^n,$$

calculând numărul cifrelor lui n^n .

4) Numai D-l EM. ȘTEFĂNESCU a găsit ca în problemă că N — fără zerori — se termină cu 6.

În fine, D-l WILHELM SOLOMON a trimis o amănunțită soluție, însă cu greșeli de calcul.

CĂPITAN I. LINTES.

PROBLEMA 3014. Să se calculeze sumele :

$$S_1 = \sum_{i=p}^{i=n-1} (2n+i)(i-p+1)$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{i=n-1} (2n+i)(i-p+1).$$

TH. ANGHELUȚĂ.

Suma S_1 poate fi descompusă în alte sume, după cum urmează :

$$S_1 = \sum_{i=p}^{i=n-1} i^2 + (2n-p+1) \sum_{i=p}^{i=n-1} i - 2n(p-1)(n-p).$$

Însă avem :

$$\sum_{i=p}^{i=n-1} i^2 = \sum_{i=p}^{i=n-1} i^2 - \sum_{i=1}^{i=p-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{p(p-1)(2p-1)}{6},$$

$$\sum_{i=p}^{i=n-1} i = \frac{(n+p-1)(n-p)}{2}.$$

Prin urmare, avem :

$$S_1 = \frac{n(n-1)(2n-1) - p(p-1)(2p-1)}{6} + \frac{(2n-p+1)(n-p)(n+p-1)}{2} - 2n(p-1)(n-p).$$

Sau încă :

$$S_1 = \frac{(n-p)[8n^2 - (7p-6)n - (p-1)(p-2)]}{6}$$

$$\therefore S_1 = \frac{(n-p)(n-p+1)(8n+p-2)}{6}.$$

În mod analog, se descompune S_2 și obținem :

$$S_2 = \sum_{i=1}^{i=n-1} i^2 + (2n-p+1) \sum_{i=1}^{i=n-1} i - 2n(p-1)(n-1).$$

Înlocuind sumele prin valorile lor cunoscute, se găsește :

$$S_2 = \frac{n(n-1)(8n-15p+14)}{6}.$$

Au rezolvat problema D-nii : I. ANTONIU, N. ARCADIAN, M. BOGDAN, I. COȘEREANU, M. FOCȘENEANU, C. I. GEORGESCU, CR. GOILAV, I. GOLDSTEIN, P. KATZ, ST. LĂZĂRESCU, ER. OPRÎȘANU, A. PANAITESCU, TIB. POPOVICIU, E. ȘTEFĂEESCU, A. TAUBER, S. WEISS.

Notă. D-l M. FOCȘENEANU generalizează, propunând suma :

$$\sum_{x=p}^{x=n} [\varphi(x) + x][x - f(x)].$$

D-l I. GOLDSTEIN consideră de asemenea un caz mai general ca sumele S_1 și S_2 :

$$S = \sum_{i=p}^{i=r} (2n+i)(i-k+1).$$

D-l TIB. POPOVICIU calculează întâi suma

$$S = \sum_{i=k}^{i=n-1} (2n+i)(i-p+1),$$

însă nici una din generalizări nu conduce la expresiuni de natură a simplifica calculul sumelor S_1 și S_2 .

PROBLEMA 3051. Știind că $A > B$ și că $A = 2^\alpha$ și $B = 17^\beta$, să se găsiască valorile lui α și β , astfel încât să avem : $\varphi(A) < \varphi(B)$, $\varphi(I)$ fiind indicatorul lui I .

În ce caz avem și $\sigma(A) < \sigma(B)$, $\sigma(I)$ fiind suma numerelor prime cu I și inferioare lui.

CĂPITAN I. LINTES.

Soluția I-a.

I. Se știe din G. M. anul XXVIII, pag. 363 din articolul : «O problemă cu indicatori», că dacă avem două numere întregi și pozitive $A > B$, atunci $\varphi(A) < \varphi(B)$, când :

1) Numărul factorilor lui A va fi mai mare sau egal cu al lui B.

2) Numerele A și B să nu fie de forma $A' \cdot K$ și $B' \cdot K$, unde A' și B' sunt prime absolut.

3) Numerele A și B să satisfacă condiția :

$$B < A < (n+1)B,$$

n fiind numărul de factori al lui A.

În condițiunile problemei No. 3051, numerele $A > B$ vor avea $\varphi(A) < \varphi(B)$, când

$$B < A < (n+1)B.$$

Însă cum : $A = 2^\alpha$, $B = 17^\beta$ și $n = 1$, atunci avem :

$$1) \quad 17^\beta < 2^\alpha < 2 \cdot 17^\beta.$$

Dar această neegalitate se mai poate scrie :

$$2) \quad 2^{\alpha-1} < 17^\beta < 2^\alpha$$

sau :

$$\alpha - 1 < \frac{\log 17}{\log 2} \cdot \beta < \alpha.$$

Cum

$$\frac{\log 17}{\log 2} = 4,08... , \text{ avem :}$$

$$3) \quad \alpha - 1 < 4,08... \beta < \alpha.$$

De aici, se vede că va trebui să avem neapărat :

$$4) \quad \alpha = 4\beta + 1,$$

deoarece α și β sunt întregi; dar înlocuind această valoare în 3), vedem că :

$$0 < 0,08... \beta < 1,$$

de unde găsim condiția că :

$$5) \quad \beta \leq 11.$$

Așa dar valorile lui α și β , în condițiunile problemei, sunt :

α	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
β	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

II. Pentru cazul al doilea al problemei, ținând seamă că :

$$\sigma(A) = 2^{\alpha-2} \quad \text{și} \quad \sigma(B) = 8 \cdot 17^{\beta-1},$$

găsim condiția :

$$6) \quad 17 \cdot 2^{2\alpha-5} < 17^{2\beta} < 2^{2\alpha}.$$

De unde, aplicând logaritmi, găsim :

$$7) \quad \alpha - 0,46... < 4,08... \beta < \alpha,$$

care ne dă pentru α valoarea :

$$\alpha = 4\beta + 1$$

și pe care înlocuind-o în 7), obținem :

$$0,54... < 0,08... \beta < 1,$$

de unde, pentru β , condiția :

$$6 < \beta \leq 11,$$

ceea ce ne dă valorile numerice următoare :

α	29	33	37	41	45
β	7	8	9	10	11

Soluția II-a. Dacă țineam seamă direct că trebuie să avem :

$$A > B,$$

$$\varphi(A) < \varphi(B)$$

și aplicăm logaritmi, am fi obținut în ambele cazuri ale problemei, următoarele neegalități duble :

$$8) \quad 4,08... \beta < \alpha < 4,08... \beta + 0,92...$$

$$9) \quad 4,08... \beta < \alpha < 4,08... \beta + 0,46...$$

pe care, rezolvându-le în numere întregi, am fi găsit tot soluțiunile date mai sus.

CĂPITAN I. L.

Au rezolvat problema, găsind numai neegalitățile 8) și 9) ca în a doua soluție, fără însă să le rezolve, D-nii : MIRCEA I. ADAM, FL. I. NEGRETZU și LEON WEISS.

D-l EM. ȘTEFĂNESCU a scris cele două neegalități sub forma :

$$4\beta < \alpha < 5\beta.$$

D-nii : DOBRESCU-BĂBICI și O. POPEA au găsit numai condiția că $\alpha = 4\beta + 1$, fără alte restricțiuni.

D-l ARCADIAN, a găsit pe cale algebrică — studiind variațiunea funcțiilor exponențiale 2^x și 17^y — condiția $\alpha = 4\beta + 1$.

CĂPITAN I. L.

PROBLEMA 3076. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx.$$

E. ȘTEFĂNESCU.

I. *Soluție și generalizare* dată de D-nii: FL. NEGRETZU (Pitești), B. M. BARBĂLATT (Bârlad), T. POPOVICIU (Arad).

Fie de rezolvat în numere reale ecuația:

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) = 2 \sum x_1 x_2.$$

Trecând în partea întâia a egalității și grupând convenabil avem:

$$(x - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 = 2.$$

Deoarece suma mai multor patrate perfecte de cantități reale nu poate fi nulă, decât când fiecare pătrat e nul, rezultă:

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 - x_3 = 0, \dots, x_{n-1} - x_n = 0,$$

sau

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = m,$$

m fiind o cantitate reală oarecare.

Când $n=3$, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ și simplificând cu 2, găsim ecuația din enunț; de unde $x=y=z$.

II. *Soluție și generalizare* dată de D-nii: B. M. BARBĂLATT și I. M. GOLDSTEIN (Liceul Bârlad).

Ne propunem a rezolva în numere reale ecuația:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + \dots + x_{n-1} x_n + x_n x_1,$$

ce se poate încă scrie:

$$2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_n x_1),$$

sau

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + \dots + (x_n - x_1)^2 = 0.$$

De unde rezultă

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = m,$$

m fiind un număr real oarecare.

D-nii: B. M. BARBĂLATT, JEAN T. LĂZĂRESCU, ȘERBAN SOLACOLU, LEON WEISS, A. TAUBER au rezolvat problema propusă, scriind ecuația din enunț sub forma:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0.$$

D-nii: C. I. GEORGESCU, MIRCEA ADAM, B. M. BARBĂLATT, TIB. POPOVICIU, A. TAUBER, IONESCU-BREZUICA, MARTINIAN BOGDAN, OVIDIU POPEA, LONGIN IONESCU, I. COȘEREANU au găsit soluțiile $x=y=z$, rezolvind ecuația propusă în raport cu x și punând condiția ca realizantul ecuației de gradul al 2-lea să fie nul.

Alte soluții s'au primit dela D-nii: G. AMĂRĂSCU, V. GHIȚESCU, O. POPEA, E. RUSSU, I. ST. TEODORESCU, TIB. POPOVICIU, AD. BUȘILĂ, G. MATEESCU, ROMEO MIHĂILESCU, A. TAUBER, ST. FL. LĂZĂRESCU, N. ARCADIAN, ST. F. LĂZĂRESCU, R. D. CĂDERE, TR. N. ANGELESCU, I. SERGHIEV și CORNELIU POPESCU.

NOTĂ. 1. D-l B. M. BARBĂLATT a studiat și cazul când $x_1, x_2, \dots, x_n$ ar fi cantități complexe și anume în cazul când au același coeficient al lui i , problemă generalizată deasemenea, găsindu-se $x_1=x_2=x_3=\dots=x_n$.

2. D-l MIRCEA ADAM, generalizând problema 2298, al cărui enunț este: Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 3,$$

a cărei soluție nu s'a publicat până în prezent, arată că în cazul particular al problemei 3076 avem $x=y=z$.

3. Se rezolvă în mod analog ecuația

$$x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = x^n y^n + x^n z^n + y^n z^n,$$

(L. WEISS, M. BRĂTESCU-DANUBIU),

sau mai general

$$(n-1) \sum_1^n x_i^{2p} = C_{2p}^1 \sum x_i^{2p-1} x_j - C_{2p}^2 \sum x_i^{2p-2} x_j^2 + \dots + (-1)^p C_{2p}^p \sum x_i^p x_j^p.$$

TIB. POPOVICIU.

PROBLEMA 3106. *Dintre toate triunghiurile înscrise în același cerc, care este cel în care suma patratelor distanțelor dela ortocentru la mijloacele laturilor e minimă?*

ȘT. NICOLESCU.

1. Soluție dată de D-nul ILIE IONESCU-BREZUICA (Elev în Cl. VIII, Liceul Ioniță Asan, Caracal).

În *Gazeta Matematică*, Vol. XVII, pag. 126, se demonstrează că punctul M din planul unui triunghi ABC, care face minimă expresia

$$MA^2 + MB^2 + MC^2,$$

adică suma patratelor distanțelor sale la vârfurile triunghiului, este centrul de greutate G al triunghiului ABC.

Cu ajutorul acestei teoreme, vom putea rezolva ușor problema propusă.

Fie H ortocentrul și A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor triunghiului ABC . Conform enunțului, trebuie să aflăm minimumul sumei

$$(1) \quad \overline{HA_1}^2 + \overline{HB_1}^2 + \overline{HC_1}^2.$$

Dar dacă aplicăm triunghiului $A_1B_1C_1$ teorema amintită mai sus expresia (1) este minimă când H coincide cu centrul de greutate G_1 al acestui triunghi. Se știe însă (și se poate ușor demonstra) că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC au același centru de greutate, căci ele sunt homotetice, având ca centru de homotetie centrul de greutate. Deci expresia (1) este minimă când ortocentrul H coincide cu centrul de greutate G , când adică înălțimile triunghiului ABC sunt și mediane. În acest caz, e evident că triunghiul ABC este echilateral.

II. Soluție dată de D-nii: MIRCEA I. ADAM (Elev în Cl. VII Liceul Mircea cel Bătrân, Constanța) și ȘTEFAN MARIN.

Aplicând teorema medianei, găsim că:

$$\overline{HA_1}^2 + \overline{HB_1}^2 + \overline{HC_1}^2 = \overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Fie R raza și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Se știe că avem:

$$\overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

astfel că expresia precedentă devine:

$$\overline{HA_1}^2 + \overline{HB_1}^2 + \overline{HC_1}^2 = 12R^2 - \frac{5}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

sau, observând că $\overline{HO}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, găsim:

$$\overline{HA_1}^2 + \overline{HB_1}^2 + \overline{HC_1}^2 = \frac{1}{4}(3R^2 + 5\overline{HO}^2).$$

Cum R este constant, se vede că minimumul căutat are loc când $\overline{HO}$ are cea mai mică valoare, când adică distanța HO este nulă. În acest caz ortocentrul triunghiului ABC coincide cu centrul cercului circumscris și, prin urmare, triunghiul este echilateral.

D-nii: OVIDIU G. POPEA, F. DOBRESU-BĂBICI, GAVRIL O. AMĂRĂSCU și LEON WEISS au arătat că expresia, al cărei minimum se cere, este egală cu

$$2R^2(1 - 5\cos A \cos B \cos C),$$

de unde au dedus că minimumul are loc când expresia

$$\cos A \cos B \cos C$$

este maximă, ceea ce are loc când triunghiul ABC este echilateral, chestiune tratată de mai multe ori în *Gazeta Matematică* (Vezi, *Gazeta Mat.* Vol. XVII Problema 1606, pag. 148, Vol. XXI, Problema 2312, p. 270 și Vol. XXVI, Problema 2648, p. 101).

EXERCITII.

45. Pentru tinerii corespondenți ai „Gazetei Matematice”, Moș Crăciun a adus în sacul său de daruri un număr, format din suma a 2 numere, care adunate, inversând foaia pe care sunt scrise, ne dau ca sumă pe 8152.

Care este acel număr ?

CĂPITAN GR. ZAPAN.

R. Se găsește ușor :

$$8152 = 8061 + 91 \quad \text{și} \quad 8152 = 8091 + 61.$$

De unde soluțiile :

$$1924 = 1908 + 16 \quad \text{și} \quad 1627 = 1608 + 19.$$

46. Să se arate că

$$p(p^{243501} + 499) - 500p$$

se divide cu 249001, dacă p este prim cu 499.

E. ȘTEFĂNESCU.

R. Se știe că $(a+1)^p - ap - 1$ și $p^{a(a-1)}$ se divid cu a^2 , dacă a este prim și prim cu p . Scăzând și făcând $a = 499$ număr prim, ese proprietatea enunțată.

47. Să se arate că dacă $x + y + z + t = 0$, atunci

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} + t^{2n+1},$$

este divizibil cu $x^3 + y^3 + z^3 + t^3$.

IOAN B. FLORESCU.

R. În Culegere de Probleme de Algebră (ed. II), III, 42, se arată că polinomul

$$(x + y + z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1},$$

se divide cu

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3,$$

unde, dacă punem $x + y + z = -t$, chestiunea este rezolvată.

48. Suma și diferența a două numere f și g nu pot fi întregi în același timp, decât dacă amândouă aceste numere sunt în același timp sau întregi, sau fracții ireductibile cu numitorul 2.

Suma, diferența și produsul a două numere f și g nu pot fi întregi în același timp, decât dacă acele numere sunt întregi.

P. SERGESCU.

R. Punând :

$$f + g = s, \quad f - g = d,$$

avem :

$$f = \frac{s+d}{2}, \quad g = \frac{s-d}{2}.$$

Deci, dacă s și d sunt întregi de aceeași paritate, f și g sunt întregi, iar dacă s și d sunt de paritate diferită, f și g sunt fracții ireductibile cu numitorul 2. În acest din urmă caz, produsul fg e o fracție ireductibilă cu numitorul 4; aceasta dovedește și partea a doua a exercițiului.

49. Să se construiască un triunghi, cunoscând punctele Ω și Ω_1 ale lui BROCARD, K punctul lui LEMOINE și un vârf al triunghiului A .

S. WEISS.

R. Cercul circumscris triunghiului $\Omega\Omega_1K$ este cercul lui BROCARD al triunghiului. În acest cerc punctul diametral opus lui K este centrul cercului circumscris, iar raza OA este raza acestui cerc.

Fie B_1 și C_1 intersecțiile cercului lui BROCARD cu dreptele $A\Omega_1$ și $A\Omega$.

Intersecțiile cercului circumscris cu dreptele ΩB_1 și $\Omega_1 C_1$ sunt celelalte două vârfuri ale triunghiului.

50. Se dă un cerc de rază R și un punct fix A pe el. O coardă variabilă ce trece prin A taie cercul în C .

Se cere locul unui punct B , situat pe perpendiculara ridicată în A pe AC , astfel ca $BC = 2r$.

ION COȘEREANU.

R. Notez cu θ unghiul ce-l face coarda variabilă cu diametrul ce trece prin A și cu ρ distanța AB .

Avem $AC = 2R \cos \theta$. Atunci din triunghiul dreptunghiu BAC :

$$\rho^2 = 4R^2 - 4R^2 \cos^2 \theta = 4R^2 \sin^2 \theta$$

$$\rho = 2R \sin \theta.$$

Trecând în coordonate carteziene:

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0.$$

Locul e un cerc.

51. Să se demonstreze că locul punctelor astfel ca razele duble ale fasciculelor involutive determinate în fiecare din aceste puncte, de cuplurile de drepte conjugate în raport cu o conică cu centru, să fie rectangulare, este un cerc descris din centrul conicei.

E. BALLAN.

R. Se știe, în adevăr, că razele duble ale fasciculelor involutive formate în condițiile de mai sus, sunt tangentele duse din acel punct la conică.

Dar locul punctelor din care se pot duce tangente rectangulare la o conică, este cercul lui MONGE al conicei. Teorema de mai sus este deci demonstrată.

52. Să se arate că între elementele unui triunghi oarecare, avem relațiunea:

$$\frac{a}{r_a - r} + \frac{b}{r_b - r} + \frac{c}{r_c - r} = \frac{abc}{(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r)}.$$

MARIN A. RĂDULESCU.

R. Avem formulele :

$$\cotg \frac{1}{2} A = \frac{p}{r_a} = \frac{p-a}{r}, \quad \therefore \quad \cotg \frac{1}{2} A = \frac{a}{r_a - r}, \text{ etc.}$$

și înlocuim cotangentele în relațiunea

$$\cotg \frac{1}{2} A + \cotg \frac{1}{2} B + \cotg \frac{1}{2} C = \cotg \frac{1}{2} A \cotg \frac{1}{2} B \cotg \frac{1}{2} C.$$

53. Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghi oarecare, avem relațiunea :

$$\sum \cos^3 A \sin(B-C) + \sin(A-B) \sin(B-C) \sin(C-A) = 0.$$

CONSTANTIN I. GEORGESCU.

R. În *Culegere de Probleme*, Trigonometria, IX. 23, se demonstrează identitatea :

$$\sum \cos^3 a \sin(b-c) = \cos(a+b+c) \sin(a-b) \sin(b-c) \sin(c-a).$$

Dacă a, b, c sunt unghiurile unui triunghi, atunci

$$\cos(a+b+c) = \cos 180^\circ = -1, \text{ etc.}$$

Problema subsistă și pentru cazul mai general, când

$$A+B+C = 360^\circ \times k + 180^\circ.$$

PROBLEME PROPUSE

3131. Se cer patratele mai mici ca 10^b prime cu 10, la care sporind cu 1 o cifră, să rămână tot patrate.

E. ȘTEFĂNESCU.

3132. Să se arate că :

$$\alpha^2 ! = \mathcal{M}(\alpha!)^{\alpha+1},$$

α fiind un număr întreg și pozitiv.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

3133. Să se arate că avem congruența :

$$(p-2)^{(2p-1)^n} \equiv (p-1)^{(2p+1)^n} \pmod{p(p-1)}$$

unde p este prim, iar n întreg și pozitiv.

ROSENFELD LEON.

3134. Să se rezolve în numere întregi sistemul :

$$ax + b = by + c = cz + d = du + a.$$

I. IONESCU.

3135. Să se construiască un triunghi cu laturile a, b, c și să se cunoască perimetrul, un unghi și raportul a două laturi.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

3136. Se împart laturile triunghiului ABC în segmente proporționale cu patratele laturilor triunghiului primitiv, prin punctele M, N, P .

1. Să se demonstreze că dreptele AM, BN, CP concură într'un punct de pe dreapta OK .

2. Să se determine natura acestui punct.

M. GHERMĂNESCU.

3137. Să se demonstreze că între laturile și razele cercurilor înscrise unui triunghi oarecare avem relațiunea

$$\frac{a^2 - b^2}{r_c(r_a - r_b)} + \frac{b^2 - c^2}{r_a(r_b - r_c)} + \frac{c^2 - a^2}{r_b(r_c - r_a)} = 4.$$

CONST. I. GEORGESCU.

3138. Să se determine coeficienții A, B, C, D astfel ca polinomul

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + 6$$

să fie divizibil prin $(x-1)^4$ și în acest caz, să se dea și câtul diviziunii.

TH. ANGHELUȚĂ.

3139. Să se demonstreze că în orice triunghi, avem relațiunea :

$$\frac{p+a}{p-a} + \frac{p+b}{p-b} + \frac{p+c}{p-c} = \frac{8R}{r} - 1,$$

notațiunile fiind cele obișnuite.

MARIN A. RĂDULESCU.

3140. Două trenuri cu vitezele de 35 km. și 40 km. pe oră, merg pe două linii, ale căror direcții fac între ele un unghi de 60° . O persoană din primul tren, vede trecând în fața sa pe cel de-al doilea tren în 18 secunde, iar o persoană din al doilea tren vede pe cel d'întâi în 27 secunde.

Se cere :

1. Lungimea celor două trenuri, când ele merg în sensuri diferite.

2. În câte secunde ar trece un tren în fața observatorului din celalt tren, când ele merg cu aceleași viteze și în acelaș sens.

3. Direcția traectoriei mișcării aparente a unui tren față de celălalt, considerate în primul caz (când merg în sensuri diferite).

C. D. MIHĂESCU.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam I. M. (2974, 3073, 113, E); Amărăscu G. (3102, 04); Angelescu Tr. (2838, 56, 3076, 88, 92, 104, 13, 16, 19, 20); Arcadian N. (3097, 113); Aronovici S. (3104, 13); Ballan E. (3047); Barbălat M. B. (3097, P); Bărbulescu C. (3104, 13, 19, 20); Bercovici Em. (3102, 19); Blumenfeld D. (2978, 3104, 13, 17, 20); Bolgiu O. (3093, 104, 13, 17, 24); Botea N. (3093, 104, 13, 17); Brătescu-Danubiu M. (3113, 17, 20); Brătescu R. N. (3102, 04); Budu G. (3104, 13); Bușilă A. (3088, 104, 13, 16, 20); Cădere D. R. (3076); Căldăraru L. (3117); Cantacuzino I. (3093, 104, 13); Ciorănescu I. C. (3093, 113, 16, 19); Constantinescu I. (3102, 04, 13); Coșereanu I. (3104, 13); Coșniță V. (2978, 3087, 116, 17, 19); David Gh. (3092, 93, R); Diaconu G. (3093, 104, 13); Dobrescu-Băbici F. (2978, 3073, 84, 87); Dumitrescu A. (3097); Dumitrescu M. (3113); Ene Al. (3104, 13); Gabrielescu V. (3102, 17, 24); Georgescu E. C. (P, N) Georgescu I. C. (2922, R); Georgescu-Val I. (3093, 104, 13, 17, 19, 20); Ghelber M. (3104, 13); Gheorghiu E. (3113); Ghițescu V. (3113, 16, 20); Goldstein I. (3119, 24); Goldstein M. (3104, 13); Goroveiu S. (3104); Grabowsky E. (3084); Groșoreanu G. (3085, 113, N); Grumbău M. (3054, 84, 105, 19, A); Grumberg I. M. (3093, 104, 13); Guțianu E. (3104, 13); Huzuneanu Gh. (3113, 16, 24); Iliescu D. (3093, 102, 04); Iliescu P. I. (3104, 13, 17, 19); Ionescu-Brezeuica I. (3067, 104, 13); Ionescu Longin (3059, 97); Ionescu Paul (3064, 88, 93, 113, 16, 20, 24, N, R); Ionescu Zane N. (P); Iordanian N. (3104, 13); Katz S. (3113, 24); Lăzărescu Elena (3113); Lăzărescu Fl. Șt. (3076, 104, 13, 16, 17, 19, 20, 24, P, R); Marcus Fr. (3064, 102, 04, 13); Marin Șt. (2766, 838, 56, 974, 3088, 104, 06, 13); Martinian B. (3097); Mateescu G. (3059, 93, 104, 13); Mihăescu C. (3088, 93, 104, 13, 19, P); Mihăilescu R. (3104, 13); Mihoc Gh. (3088, 102, 04, 13, 17); Mirescu P. (3088, 97, 116, 17, 19, 20); Mițescu D.-R. (2978, 3092, 104, 13); Miu I. (3093); Negrețu Fl. (3086, P); Niculescu Al. (3003, 85); Opreșcu Gh. (3113); Orăscu N. (3113); Pălărieru E. (3091, 113, 19, 20, 24); Pătrașcu Gh. (3017); Pătoreanu M. (3104, 13); Popea O. (2856, 87, 3084, 93, 116, 20, E, N); Popescu C. (3076, 93, 104, 13); Popescu N. (E); Popescu Fl. (3104, 13); Popovici P. D. (3064, 113); Popoviciu Tib. (3078, 98); Popp Em. (3093, 104, 13, 16, 20, 24); Rabinovici F. (3102, 04, 13, E); Rădulescu Șt. (3113, 17); Rădulescu T. (3104, 13); Răuț C. (3084, 104); Ringler S. (3117); Russu E. (3086, 102); Samoilă D. (3119, 20); Schächter Arie (3104, 13); Schächter O. (3104, 13); Schlișca E. (3113, 17); Sergheiev I. (305, 76, 104, 13, 17); Simionescu G. (3104, 13, 16, 24); Smărăndescu D. (3113); Solomon D. (3102, 04, 13); Solomon W. (3085, 87, 115, 18, N); Stamatii M. (3093, 102, 04, 13, 16); Stavrut Gh. (3104, 13); Ștefănescu E. (3113, P); Șușeșcu I. (3093, 104, 13); Țânțăreanu P. (3113); Tauber Al. (2298, 3113, 17, 24); Teodorescu D. (3088, 113, 16, 17, 19, 20, 24); Teodorescu I. (2918, 3059, 113); Vărlan V. (3119); Vasilescu M. (3092, 113, 16, 17); Vasiliu C. I. (2683, 701, 3092, 113, 15, 16, 17, 19, 20, 24, E, P); Weiss L. (3044, 84, 87, 97, 113, C, N); Weiss S. (3088, 102, 04, 13, 16, 19, E).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2108, 29, 30, 87, 91, 222, 78, 89, 95, 318, 77, 96, 510, 66, 75, 85, 98, 640, 43, 47, 64, 82, 89, 835, 61, 72, 79, 95, 98, 910, 20, 29, 71, 80, 91, 3034, 43, 48, 53, 63, 71, 72, 77, 80, 83, 86, 100, 01, 03, 09, 11, 21, 23, 26 și 30 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

28 VOLUME

Colecțiunea întregă Lei 1500,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 70 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI și XXV, care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie*. (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

2. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. N. Abramescu, *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăugită*, 1921. (Epuizată).

4. A. G. Ioachimescu și G. Țițeica, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* Lei 15,—

6. Tr. Lalescu, *Tratat de Geometrie analitică*,
Fascicola I (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice Lei 20,—

7. Gh. Lazăr, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) Lei 5,—

8. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăugită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme Lei 60,—

9. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, *Vocabular Matematic* Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăoga taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul*. Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septembrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimite D-lui: I. D. Teodor, Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București.

*Asociațiunea pt. cultura
și literatură poporului Român*



Sibiu
GAZETA MATEMATICĂ

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXIX.

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1924

SUMARUL

1. Asupra unei formule a lui Hermite • • *A. Angelescu.*
2. Teoreme asupra triunghiului (urmare) • *Grigore C. Moisil.*
3. Note Matematice: 40—44.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 108.
7. Probleme rezolvate: 2887, 3025, 3088, 3105, 3124.
8. Exerciții: 54—59.
9. Probleme propuse: 3141—3150.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET

1924



SPRE ȘTIINȚA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXIX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politehnică din București, **Tr. Lalescu**, Doctor în Matematici, Profesor Universitar și **I. D. Teodor**, Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Școala Politehnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui **GEORGE BORNEANU**, Inginer, Directorul Fabricilor de chibrituri și timbre, București.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor redia în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela D-l Cassier *I. D. Teodor*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poștă.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evită confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

În vederea sporirii taxelor poștale, corespondenții pot trimite de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei fol, fără a lăsa spații albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecință.

Nu se admite însă a se trata pe aceeași foale mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, creațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebuie să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 56, 59, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 94, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 53, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 16, 26, 36, 47, 53, 56, 61, 95, 3005, 08, 13, 19, 42, 45, 55, 60, 69, 75, 89, 90, 95, 96, 100, 07, 09, 10, 12, 14, 21, 22, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

INȘTIINȚARE

Solicitați de cererile unoră din corespondenții noștri, cari ne arată că unele oficii poștale refuză a taxă manuscritele ce ne sunt adresate, așa cum este în tariful în vigoare, publicăm mai jos textul câtorvâ articole din «*Legea de exploatare telegrafo-poștală*».

Art. 109. — 1) Sunt considerate ca hârtii de afaceri, și admise ca atari la moderațiunea portului consacrată prin art. 100 alin. 7 din acest regulament, toate piesele și toate documentele, scrise sau desemnate, în total sau în parte, cu mână, care nu au caracterul unei corespondențe actuale și personale, cum sunt piesele de procedură, actele de orice fel, dresate de către autorități, scrisorile de trăsură sau conosamente, facturile, diferitele documente de serviciu ale societăților de asigurare, copiile sau extractele de acte sub semnătura privată scrise pe hârtie timbrată sau netimbrată, partițiunile sau foile de muzică manuscrite, *manuscriptele de cărți sau de ziare, expediate izolat, exercițiile corectate ale elevilor*;

2). Hârțiile de afaceri sunt admise pânăla greutatea maximă de 2 kgr. și nu trebuie să aibă pe una din laturile pachetului mai mult de 45 centimetri, iar în formă de sul să nu aibă mai mult ca 75 centimetri în lungime și 10 centimetri în grosime;

3) Imprimatele și hârțiile de afaceri trebuiesc condiționate astfel ca să se poată verifica conținutul lor. În caz când, în asemenea trimiteri, s'ar găsi scrieri sau adnotațiuni cu caracter de corespondență personală și de actualitate, întreaga trimitere se exclude dela expediere, tratându-se ca rebut.

FRATERNITY

THE FRATERNITY OF THE
FUTURE

THE FRATERNITY OF THE
FUTURE

THE FRATERNITY OF THE
FUTURE

THE FRATERNITY OF THE
FUTURE

THE FRATERNITY OF THE
FUTURE

THE FRATERNITY OF THE
FUTURE

THE FRATERNITY OF THE
FUTURE

THE FRATERNITY OF THE
FUTURE

THE FRATERNITY OF THE
FUTURE

THE FRATERNITY OF THE
FUTURE

THE FRATERNITY OF THE
FUTURE

GAZETA MATEMATICA

ANUL XXIX

SUPLIMENT

No. 6

RECREAȚIUNI

1. **Sistemul tonal.** MORGAN povestește că în 1862, MYSTROM a propus un sistem de numerație cu baza 16. Primele 16 numere ar fi:

an, de, ti, go, su, by, ru, me, ni, ko, hu, vy, la, po, fy, ton.

Mai departe s'ar zice: *ton-an, ton-de*, etc. Numărul 10961518095 se citește:

detammemilllasansutonjhubongramillposanfy.

Autorul a reformat și calendarul, împărțind anul în 16 luni:

<i>Anuary,</i>	<i>Debrian,</i>	<i>Timander,</i>	<i>Gostus,</i>
<i>Suvenary,</i>	<i>Bylian,</i>	<i>Ratamber,</i>	<i>Mesudias,</i>
<i>Nictoary,</i>	<i>Columbian,</i>	<i>Husamber,</i>	<i>Vyctorius,</i>
<i>Lamboary,</i>	<i>Polian,</i>	<i>Fylander,</i>	<i>Tomborius.</i>

Cine ar fi vorbit de MYSTROM, dacă nu ar fi făcut această reformă!

* * *

I. I.

2. **Longevitate ... tipografică.** În ziarul *Universul* s'a publicat un anunț de înmormântare al arhitectului EDMUND HASPROVSKY „*in etate de 544 ani*”.

A fost înmormântat la Bellu, în București, Joi 30 August 1923.

T. DORDEA.

* * *

3. **Magia numerelor.** Reproduc aci din *Faust* de GOETHE și în traducere română de D-l IOSIF NĂDEJDE, următoarele versuri:

Du must verstehen!

Auch *Eins* mach *Zehn*

Und *Zwei* lass gehn.

Und *Drei* mach gleich,

So bist du reich;

Verlier die *Vier*!

Aus *Fünf* und *Sechs*,

So sag die *Hex*,

Mach *Sieben* und *Acht*,

So ist's vollbracht:

Und *Neun* ist *Eins*,

Und *Zehn* ist *Keins*

Das ist das Hexen-*Einmal-Eins*.

Vezi de'nțelege

Această lege:

Dintr'unu fă zece.

Iar două să plece

Pe *trei* dacă-l ții

Bogat ai să fii;

Pe *patru* cată

Să-l prinzi pe dată.

Cu *cinci* și *șasă*

Nimic nu-ți pasă.

Din *șapte* să faci

Pe *opt* și să taci

Căci nouă e unu

Asta-i al babei *odată-unu*!

A. BUȘILĂ.

* * *

4. **Cele patru operațiuni.** POMPILIU ELIADE spune că acum 100 ani Românii nu știau decât de existența a trei operațiuni aritmetice, bazându-se pe următorul pasagiu din „*Insemnări a călătoriei mele*” de CONSTANTIN GOLESCU :

„Pe la satele lor au foarte multă orânduială, spre podoaba, buna viață și învățătura copiilor, căci toți copiii trebuie să învețe carte încât să poată citi și a scrie și cele trebuincioase, cele trei socoteli: adunarea, înmulțirea și scăderea”.

De aci, reese că pe acele vremuri, împărțirea nu prea erea trebuincioasă, dar nu că nu se cunoștea. Este posibil ca GOLESCU însă să nu o fi cunoscut. Am arătat însă că cu mult înainte se predau în București matematici superioare, care nu se puteau face fără împărțiri.

I. I.

* * *

5. **Certitudinea.** Ea se găsește în matematici, după cum arată SULLY-PRUDHOMME în următoarele versuri:

„La cause et la fin sont dans l'ombre,
Rien n'est sur que le poids, la figure et le nombre”.

I. I.

* * *

6. **Geometrie neeuclidiană la teatru.** Reproduc următoarele cuvinte din *Le soleil* (19/IX 1897):

„L'action suit deux parallèles qui se coupent à un point déterminé”.

I. I.

* * *

7. **Formula frumuseței.** După VIERORDOT, frumusețea unei femei este dată, în mod matematic, prin formula următoare, în care G este greutatea ei în kgr., I înălțimea netă (fără tocuri și fără pălărie) în cm., T periferia transversală maximă netă, măsurată cu o sfoară întinsă, tot în cm.:

$$G = \frac{IT}{2400}.$$

Frumusețea corespunde lui $G = 60,5$. Un kg. în plus sau în minus, distruge echilibrul frumuseței!

* * *

M. G. DUMITRESCU.

8. **Matematica și amorul.** H. de BALZAC arată că nici dragostea nu se poate fără matematici. Iată ce spune dânsul în „*Histoire des treize*” pag. 266 :

„Cet homme audacieux manquait précisément de l'audace habituelle aux amants qui connaissent les formules de l'algèbre féminine...”

„...l'amour veut, malgré sa délicieuse poésie de sentiment, un peu plus de géométrie qu'on ne le pense”.

* * *

M. G.

9. **O nouă metodă pentru rezolvarea sistemelor de ecuații de gradul I.** La o școală de fete din București, se dă o problemă de algebră, pentru rezolvarea unui sistem de ecuații de gradul I. La ora fixată, se ia caetele și se

scoate la tablă o elevă, ca să rezolve acel sistem și care, deși avea înainte note rele, de data asta găsisse bine rezultatul. I se puse mai întâi întrebarea: „Prin care metodă ai rezolvat sistemul?”

Eleva, care nu prea auzise de acele metode, răspunde repede și sincer: „Prin copiere!”

* * *

I. I.

10. „Eliminări“ de primăvară. (Versuri dedicate unui profesor de matematici):

Pe ceru-albastru arde un soare cald, sublim!

În umbra clasei trece x , y , y' !

Se aude cânt de păsări prin aerul curat;

În clasă greu răsună $y + h^2$!

Albinele inviate în zbor măestru trec;

În clasă-ades vibrează „măi, tare ești berbec”!

Copiii toți se joacă, țipând cu dulce glas;

Din vise mă trezește o voce grea de bas.

Și când toți strigă veseli, într'un delir nebun,

Eu sunt trecut în bancă, ca factorul comun.

E. S.

* * *

11. Răspuns dublu nemerit. Un elev scos la tablă, este întrebat ce reprezintă ecuația:

$$\frac{x^3}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Elevul nu știe și tace. Profesorul își aruncă ochiul pe tablă și apoi pe catalog și strigă pe un alt elev.

„E lipsă”! strigă un camarad al lui!

O. POPEA.

* * *

12. Valoarea biblică a lui π . La recreația No. 5 din Suplimentul de pe lângă No. 1, s'au strecurat mai multe erori care denaturează rezultatul. Calculurile sunt următoarele:

$$30 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} 10$$

$$\pi = 2 \times 1,5 = 3,0.$$

Cam mică mare! Dintre corespondenții cari mi-au semnalat eroarea, unul, anonim, o atribuie „răzbunării atotputernicului spirit sfânt”. Primesc această răzbunare, căci nu pot lăsa să se crează că lungimea cercului este egală cu a exagonului regulat înscris!

I. I.

* * *

13. Știința și politica. Reproduc următoarele după C. NEGRUZZI:

„Anul 1848, atât de priincios libertății popoarelor, a fost funest pentru litere. Toată lumea se aruncă în arena politică. Lira lui LAMARTINE se desacordă, iar telescopul lui ARAGO prinse ceață”.

I. I.

* * *

14. **O teoremă a lui TOLSTOI.** În scrisoarea sa din 23 octombrie 1910, către părintele TROITSKY (publicată în traducere în „Flacăra” din 27/IV 1923), LEON TOLSTOI scrie :

„Sunt cu totul de aceeași părere că smerenia este cea mai mare virtute. Cum în totdeauna am spus, omul seamănă cu o fracție, în care *numitorul* stabilește părerea ce o are el despre sine însuși. Lucrul cel mai bun este când acest numitor este *zero* (smerenia totală) și e îngrozitor lucru când numitorul crește la infinit. În cazul întâiu, ori care ar fi numărătorul, el are o însemnătate reală, în al doilea nici una...”

Cu alte cuvinte fie *O* omul, *S* părerea pe care o are el despre el însuși și *N* un număr oarecare. Cu oarecare aproximațiune, se poate dar scrie :

$$O = \frac{N}{S}.$$

Când $S = 0$ și N finit, *O* are o valoare apreciabilă și teorema este adevărată. Dar dacă și $N = 0$? Aceasta ar corespunde cazului când deși *O* știe că nu valorează nimic, totuși marchează valoarea prin simbolul $0/0$. De asemenea, dacă omul are o părere infinit de bună despre el însuși, când nu vrea să apară ca lucru îngrozitor, se egalează cu ∞/∞ și este la adăpostul teoremei lui TOLSTOI. Reese că teorema lui TOLSTOI nu este generală și nici riguros exactă.

Concluzia este că dacă matematicienii reușesc să facă câteodată și figuri literare, pe lângă cele geometrice, apoi literații nu prea reușesc să stabilizească teoreme matematice mai niciodată.

G. B.

* * *

15. ∞ . Fiindcă veni vorba de infinit, iată câteva păreri despre el :

„Cantității numită *cât prin zero*, nici o adunare, nici o scădere, ori și cât de mari ar fi, nu-i pot aduce creștere sau pierdere ca și unui timp fără sfârșit și fără declin, seriile de existenți”.

(BHASKARA).

„Om muritor, știi însu-ți ce este un infinit ?

„Il știi tu mai înainte, spre a ști la ce ai venit ?” (D. BOLINTINEANU).

I. I.

* * *

16. **Ecuția mică a conicelor.** Cea mai scurtă ecuație a conicelor pare a fi :

$$\left(y'' - \frac{2}{3}\right)''' = 0.$$

La parabolă, se va suprima unul din accentele de afară.

I. I.

ASUPRA UNEI FORMULE A LUI HERMITE.

Polinoamele lui LEGENDRE :

$$(1) \quad X_n = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{d x^n}$$

satisfac, după cum se știe¹⁾, egalității

$$(2) \quad \int_{-1}^{+1} A(x) X_n dx = 0,$$

unde $A(x)$ este un polinom oarecare de grad inferior lui n . Vom utiliza această proprietate, precum și formula (1):

$$(3) \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1},$$

pentru a găsi valoarea integralei

$$(4) \quad I(y) = \int_{-1}^{+1} (1+x)^y X_n dx.$$

Să presupunem, pentru aceasta, polinomul X_n ordonat după puterile lui $1+x$, adică :

$$X_n = c_n (1+x)^n + c_{n-1} (1+x)^{n-1} + \dots + c_0.$$

Vom avea atunci pentru integrala (4) :

$$I(y) = c_n \frac{2^{y+n+1}}{y+n+1} + c_{n-1} \frac{2^{y+n}}{y+n} + \dots + c_0 \frac{2^{y+1}}{y+1},$$

sau

$$(5) \quad I(y) = 2^{y+1} \frac{P_n(y)}{(y+1)(y+2)\dots(y+n+1)},$$

unde $P_n(y)$ reprezintă un polinom de gradul n . Acest polinom este determinat, în afară de un factor constant, prin faptul că $I(y)$ este nul pentru $y=0, 1, \dots, n-1$, conform relației (2). Vom avea deci :

$$(6) \quad P_n(y) = C y (y-1) \dots (y-n+1).$$

Ne rămâne, prin urmare, să determinăm valoarea constantei C . Pentru aceasta vom calcula direct pe $I(n)$ și rezultatul găsit îl vom compara cu valoarea dată pentru $I(n)$ de (5) și (6). Ținând seamă de (2), vedem că :

1) A se vedea, spre exemplu, Gazeta Matematică, Vol. XXIV, p. 161.

$$I(n) = \int_{-1}^{+1} x^n X_n dx.$$

Dar din formula (1), reese că :

$$X_n = \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{n! 2^n} x^n + \text{un polinom de gradul } n-1,$$

aşa că din relația (3), deducem:

$$\int_{-1}^{+1} x^n X_n dx = \frac{n! 2^{n+1}}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)}.$$

Prin urmare :

$$I(n) = \frac{n! 2^{n+1}}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)}.$$

Să deducem acum pe $I(n)$ din (5) și (6). Avem imediat:

$$I(n) = \frac{C n! 2^{n+1}}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)}.$$

Din compararea acestor două valori ale lui $I(n)$, rezultă că :

$$C = 1.$$

Vom avea, așa dar, formula :

$$(7) \quad \int_{-1}^{+1} (1+x)^y X_n dx = \frac{y(y-1)\dots(y-n+1)}{(y+1)(y+2)\dots(y+n+1)} 2^{y+1},$$

care este valabilă pentru valorile lui y superioare lui -1 . HERMITE a dedus ¹⁾ această formulă dintr'o identitate dată de L. LINDELÖF. Considerațiunile, care ne-au condus la formula (7), pot fi utilizate pentru a stabili formule mult mai generale. Fără a ne ocupa acum de aceste generalizări, să indicăm câteva aplicațiuni ale formulei (7).

Valoarea unor integrale definite. Ambii membri ai relației (7) sunt funcțiuni continue de y pentru $y > -1$. Să considerăm atunci raportul:

$$(8) \quad I(y)/(y-p),$$

unde p , este unul din numerele $0, 1, \dots, n-1$ și să căutăm valoarea sa pentru $y=p$. Din formula (7), reese imediat că această valoare este :

$$(-1)^{n-p-1} \frac{p!(n-p-1)!}{(p+1)(p+2)\dots(p+n+1)}.$$

1) OEUUVRES de CHARLES HERMITE, T. IV, p. 500.

Aplicând însă raportului (8) regula lui HOSPITAL, vedem că acest raport are ca valoare :

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^p \operatorname{Log} (1+x) X_n dx.$$

Vom avea, așa dar :

$$(9) \quad \int_{-1}^{+1} (1+x)^p \operatorname{Log} (1+x) X_n dx \\ = (-1)^{n-p-1} \frac{p!(n-p-1)!}{(p+1)(p+2) \dots (p+n+1)}.$$

La acest rezultat, mai puteam ajunge luând derivata în raport cu y a ambilor membri ai formulei (8). CATALAN, urmând o cale cu totul diferită, a găsit¹⁾ valoarea integralei (9) în cazul particular $p=0$ și spune: «Cette formule me paraît d'autant plus remarquable, que, pour la vérifier (sur des cas particuliers), j'ai du recourir à des développements en séries».

Polinomele lui STIELTJES. Să ne propunem să determinăm polinomul $E_n(x)$ de gradul $n+1$ în x , așa ca să avem :

$$(10) \quad \int_{-1}^{+1} A(x) X_n E_n dx = 0,$$

$A(x)$ fiind un polinom oarecare de gradul n . Vom lua :

$$(11) \quad E_n = a_{n+1} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n+1} + a_n \left(\frac{x+1}{2}\right)^n + \dots + a_0$$

și vom înlocui condiția (10) prin condiția echivalentă :

$$\int_{-1}^{+1} \left(\frac{x+1}{2}\right)^y X_n \left[\sum_{i=0}^{i=n+1} a_i \left(\frac{x+1}{2}\right)^i \right] dx = 0,$$

pentru $y=0, 1, \dots, n$. Ținând seama de formula (7), și punând :

$$(12) \quad B(y) = \frac{y(y-1) \dots (y-n+1)}{(y+1)(y+2) \dots (y+n+1)},$$

vedem că va trebui să avem :

$$a_0 B(y) + a_1 B(y+1) + \dots + a_{n+1} B(y+n+1) = 0,$$

pentru $y=0, 1, \dots, n$. Făcând succesiv pe $y=0, 1, \dots, n$, căpătăm sistemul :

1) Premier Mémoire sur les fonctions X_n de Legendre, p. 58.

TEOREME ASUPRA TRIUNGHIULUI.

(Urmare *)

III.

TRANSFORMAREA PRIN INVERSIUNE GENERALIZATA.

11. Sunt multe proprietăți comune transformărilor prin puncte reciproce și celei prin puncte isogonale. Aceste proprietăți m'au determinat să studiez o clasă generală de transformări, ale cărei cazuri particulare sunt transformările prin puncte reciproce și prin puncte inverse.

Să considerăm un sistem de trei drepte: $AM_1, A\omega_1, AN_1$. Dacă — M_1, ω_1, N_1 fiind picioarele dreptelor — avem relația:

$$\frac{\overline{BM_1}}{\overline{CM_1}} \cdot \frac{\overline{BN_1}}{\overline{CN_1}} = \frac{\overline{B\omega_1}^2}{\overline{C\omega_1}^2}, \quad (9)$$

atunci dreptele AM_1 și AN_1 se vor numi *ceviene inverse generalizate*, iar $A\omega_1$ *axă de inversiune generalizată*.

Din relațiile (9), deducem:

$$\frac{\overline{BM_1}}{\overline{CM_1}} = \frac{\overline{B\omega_1}^2}{\overline{C\omega_1}^2} \cdot \frac{\overline{CN_1}}{\overline{BN_1}}. \quad (10)$$

12. Dacă trei puncte sunt colineare M_1, M_2, M_3 , iar $A\omega_1, B\omega_2, C\omega_3$ trei ceviene concurente în ω , relația lui MENELAUS dă:

$$\frac{\overline{BM_1}}{\overline{CM_1}} \cdot \frac{\overline{CM_2}}{\overline{AM_2}} \cdot \frac{\overline{AM_3}}{\overline{BM_3}} = 1$$

și substituind valorile (10):

$$\frac{\overline{CN_1}}{\overline{BN_1}} \cdot \frac{\overline{AN_2}}{\overline{CN_2}} \cdot \frac{\overline{BN_3}}{\overline{AN_3}} \cdot \frac{\overline{B\omega_1}^2}{\overline{C\omega_1}^2} \cdot \frac{\overline{C\omega_2}^2}{\overline{A\omega_2}^2} \cdot \frac{\overline{A\omega_3}^2}{\overline{B\omega_3}^2} = 1. \quad (11)$$

Dar $A\omega_1, B\omega_2, C\omega_3$ fiind concurente, relația lui CEVA dă:

$$\frac{\overline{B\omega_1}}{\overline{C\omega_1}} \cdot \frac{\overline{C\omega_2}}{\overline{A\omega_2}} \cdot \frac{\overline{A\omega_3}}{\overline{B\omega_3}} = 1.$$

*) Gazeta Matematică, Vol. XXIX, No. 5, pag. 161.

Relația (11) se reduce :

$$\frac{CN_1}{BN_1} \cdot \frac{AN_2}{CN_2} \cdot \frac{BN_3}{AN_3} = 1,$$

egalitate ce demonstrează :

Teorema XIV. *Dacă trei puncte sunt colineare, inversele lor față de picioarele unui sistem de ceviane, sunt colineare.*

Procedând la fel, găsim teorema :

Teorema XV. *Cevienele inverse, în raport cu un centru oarecare, a trei ceviane concurente, sunt concurente.*

Prin definiție, aceste două puncte se vor numi *inversc generalizat*, în raport cu centrul dat.

Dacă (α, β, γ) și $(\alpha', \beta', \gamma')$ sunt coordonatele a două puncte inverse, în raport cu centrul $\omega (\alpha_0 \beta_0 \gamma_0)$, avem relațiile :

$$\left. \begin{aligned} \alpha\alpha' &= \alpha_0^2 \\ \beta\beta' &= \beta_0^2 \\ \gamma\gamma' &= \gamma_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Pentru cazul special $\omega = G$, $\alpha_1 = 1$, inversiunea e prin puncte reciproce ; pentru $\omega = I$, $\alpha_1 = a$, inversiunea e prin puncte isogonale.

Inversiunea generalizată e reciprocă.

Două curbe se zic *inverse generalizat*, în raport cu un centru, când una e locul inverselor în raport cu acel centru, a punctelor de pe cealaltă.

Între două curbe inverse generalizat, există reciprocitate.

13. Trei ceviane paralele se întâlnesc pe dreapta dela infinit :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

inversele lor se vor întâlni pe curba :

$$\frac{\alpha_0^2}{\alpha} + \frac{\beta_0^2}{\beta} + \frac{\gamma_0^2}{\gamma} = 0,$$

care e chiar conica C_c , relativă la potențialul de ord. II al lui ω (v. § 1).

Teorema XVI. *Inversele generalizat a trei ceviane paralele, sunt concurente pe conica C_c , relativă la potențialul de ord. II al centrului de inversiune.*

La fel se demonstrează :

Teorema XVII. *Inversele generalizat a trei ceviane con-*

curente pe polara trilineană a centrului de inversiune, sunt concurente pe conica C_c , relativă la centrul de inversiune.

Teoremele XVI—XVII ne arată că unele din proprietățile punctelor *reciproce* se pot generaliza în două chipuri: considerând ceviene paralele, anume, sau considerând și în generalizare ceviene paralele, sau considerând ceviene ce se întâlnesc pe polara centrului.

Teoremele XVI—XVII au aplicație imediată în căutarea înfășurătoarei dreptelor ale căror transformate inverse sunt paralele.

Intr'adevăr, transformata inversă a unei drepte: $m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$ e conica circumscrișă $m\alpha_0^2\beta\gamma + n\beta_0^2\alpha\gamma + p\gamma_0^2\alpha\beta = 0$.

Dacă această conică e o parabolă, ea e tangentă dreptei dela infinit, adică admite două puncte confundate. Inversele acestor puncte se vor găsi pe dreaptă și pe conica C_c , corespunzătoare potențialului de ord. II, al centrului de inversiune.

Asemenea conica C_c , corespunzătoare chiar centrului, e înfășurătoarea dreptelor ale căror inverse sunt tangente polarei centrului.

Teorema XVIII. *Înfășurătoarea dreptelor ale căror transformate inverse generalizat sunt parabole, e conica C_c (definită la § 1), corespondentă potențialului de ord. II al centrului de inversiune.*

Chestiuni similare se pot rezolvă servindu-ne de teoremele expuse în prima parte a acestui articol.

14. Teorema XIX. *Fascicolul de ceviene $A_\omega, B_\omega, C_\omega$ formează locul punctelor care, împreună cu inversul lor și centrul de inversiune, sunt colineare.*

Intr'adevăr, condiția de colineație se exprimă:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_0^2 & \beta_0^2 & \gamma_0^2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0, \quad (13)$$

care reprezintă o curbă de gr. III.

Dar, orice punct de pe A_ω are coordonatele $(\lambda, \beta_0, \gamma_0)$, inversul său $(\alpha_0^2/\lambda, \beta_0^2/\beta_0, \gamma_0^2/\gamma_0)$, sau (μ, β_0, γ_0) , deci se găsește tot pe A_ω și aceste două puncte sunt colineare cu centrul. Fascicolul cevienelor $A_\omega, B_\omega, C_\omega$, formând o curbă de gr. III și bucurându-se de proprietatea enunțată, e chiar locul căutat.

Se vede ușor că problema propusă generalizează nota 24 din *G. M.* Vol. XXVI, a d-lui MIRON NICULESCU.

Importanța inversiunii generalizate se prezintă din acest exemplu și se va degaja ușor din exemplele ce urmează.

15. Teorema XX. *Punctele care împreună cu transformatele lor inverse generalizat, în raport cu două centre ω_1 și ω_2 , sunt colineare, se află pe o conică de forma .*

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 0, \quad (14)$$

în care A, B, C sunt minorii tabloului

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 \end{vmatrix}$$

Intr'adevăr, condiția de colineație se exprimă :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1^2/\alpha & \beta_1^2/\beta & \gamma_1^2/\gamma \\ \alpha_2^2/\alpha & \beta_2^2/\beta & \gamma_2^2/\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

În acest caz M, M_{i_1} și M_{i_2} sunt colineare pe o dreaptă Δ .

Se vede ușor că teorema aceasta generalizează teorema 4 asupra hiperbolei H_e din articolul d-lui Ing. M. NICOLAU «Asupra unei hiperbole echilatre importante, în legătură cu triunghiul» (*G. M.* XXVII pag. 347). Teorema următoare generalizează proprietatea 5^o.

Teorema XXI. *Conica (14) e înfășurată dreptelor Δ , având punctul M ca punct de contact.*

Proprietatea următoare ne permite să definim conica generală (14) în același mod cum D-I NICOLAU definește hiperbola H_e .

Teorema XXII. *Conica (14) conține centrele ω_1 și ω_2 , precum și asociatele lor armonice.* (Definiție și pr. 1^o).

16. Să încercăm generalizarea câtorvâ din teoremele d-lui MIRON NICULESCU, din interesantul articol «Proprietăți ale unor puncte remarcabile ale triunghiului» (*G. M.* XXVII pag. 377). Păstrând notațiunile de acolo, putem generaliza teoremele 8—9.

Teorema XXIII. *Fie $T_1, T'_1, T''_1, T_2, T'_2, T''_2$ inversele generalizat ale punctelor $R_1, R'_1, R''_1, R_2, R'_2, R''_2$, în raport cu un centru oarecare a .*

Dreptele $T''_1T'_2$, $T_1T''_2$, T'_1T_2 determină prin intersecțiile lor un triunghi, cu acelaș centru de gravitate ca și ABC.

Demonstrația se face ca și în articolul citat.

Asemenea se demonstrează teorema 10.

Teorema XXIV. *Dacă, în triunghiul ABC, avem: $a^2 = bc$, dreptele $T''_1T'_2$, $T_1T''_2$, T'_1T_2 trec respectiv prin vârfurile B, C, A ale triunghiului și împart laturile opuse în acelaș raport.*

Punctele T_1 , T'_1 , etc. și R_1 , R'_1 , etc. sunt inverse generalizat, în raport cu un centru oarecare.

O generalizare analoagă a teoremelor 14 și 15, poate deschide orizonturi largi și în alte direcții de cercetări.

17. D. MIRON NICULESCU a avut bunăvoința să-mi atragă atenția asupra generalizării pe aceeași cale, a unei teoreme publicate într'un articol anterior al D-sale. (Teoreme din Geometria Analitică G. M. XXV pag. 245). Această generalizare se enunță:

Teorema XXV. *Potențialul de ordinul m al unui punct P, este inversul generalizat, în raport cu acest punct P, al reciprocului potențialului de ordin $(m-2)$.*

Teorema e evidentă considerând identitatea:

$$\alpha_0^m \equiv \alpha_0^2 / \frac{1}{\alpha_0^{m-2}}$$

și care permite construirea tuturor potențialelor unui punct pornind dela potențialul de ordin 0 (care e G) și 1 (care e chiar P).

18. Revenirea la potențiale ne conduce la câteva observații asupra articolului d-lui M. GHERMĂNESCU «Asupra unei curbe remarcabile (G. M. XXVIII 46)». D-l GHERMĂNESCU consideră curba Γ , locul potențialelor de ordin K ale unui punct P $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, când K variază. Ecuația acestei curbe e

$$\alpha \lg (\beta_0/\gamma_0) \beta \lg (\gamma_0/\alpha_0) \gamma \lg (\alpha_0/\beta_0) = 1 \quad (15)$$

și D-l M. GHERMĂNESCU observă că curba trece prin G și e analgamatică transformării $\alpha \alpha' = 1$.

De asemenea, în cazul particular când trece prin I, e analgamatică transformării $\alpha \alpha' = a^2$.

Inversiunea generalizată ne permite să enunțăm:

Teorema XXVI. *Curba Γ e analgamatică transformării prin inversiune generalizată, pentru orice centru ce aparține curbei.*

19. Inversiunea generalizată, în afară de fecunde aplicații ca metodă de transformare, aplicații pe care exemplele de mai sus ne fac să le presimțim, e interesantă prin faptul că ea reduce studiul polarității trilineare la polaritate în raport cu o conică, explicând astfel observațiile făcute în prima parte a acestui articol, asupra paralelismului între D, C_c, C_t, Q_c (§ 6).

Transformările duale nu le putem face în coordonate trilineare, decât luând ca conică o conică căreia triunghiul de referință să-i fie autopolar. (Geometric, am putea lua drept conică directoare orice conică, analitic însă nu). Forma generală a acestor conice e :

$$(C_d) \quad \frac{\alpha^2}{m^2} + \frac{\beta^2}{n^2} + \frac{\gamma^2}{p^2} = 0. \quad (16)$$

Pentru a rezolvă problema propusă—reducerea polarității trilineare la polaritate în raport cu o conică C_d —vom considera două puncte θ_1, θ_2 , polarele lor trilineare Δ_1, Δ_2 și polarele lor în raport cu $C_d, \Delta'_1, \Delta'_2$

$$(\Delta) \quad \sum \frac{\alpha}{\alpha_1} = 0 \quad \Delta'_1 = \sum \frac{\alpha_1}{m^2} \alpha = 0$$

$$(\Delta_2) \quad \sum \frac{\alpha}{\alpha_2} = 0 \quad \Delta'_2 = \sum \frac{\alpha_2}{m^2} \alpha = 0$$

și vom identifica $\Delta_1 \equiv \Delta'_2, \Delta_2 \equiv \Delta'_1$, ceea ce conduce la

$$\alpha_1 \alpha_2 = m^2 \dots,$$

condiție ce ne arată :

Teorema XXVII. Dacă punctele θ_1 și θ_2 sunt astfel ca polara lui θ_1 , în raport cu triunghiul, e identică cu polara lui θ_2 , în raport cu conica (16), atunci și polara lui θ_2 , în raport cu triunghiul, e polara lui θ_1 , în raport cu conica (16).

Punctele θ_1 și θ_2 , sunt inverse generalizat în raport cu punctul (m, n, p) .

Potențialul de ord. II al centrului e centrul conicei directoare.

Problema propusă se poate rezolvă deci.

Fie, de pildă, două curbe polare reciproce în raport cu o conică directoare C_d .

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Curba $f(\alpha, \beta, \gamma)$ e înfășurătoarea polarelor în raport cu C_d a punctelor de pe $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, deci e înfășurătoarea polarelor trilineare a punctelor de pe

$$F(m^2/\alpha, n^2/\beta, p^2/\gamma) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

în care φ e invers generalizată a curbei F , în raport cu centrul $T(m, n, p)$.

Între curbele f și φ nu există reciprocitate.

20. Conica Γ_t e înfășurătoarea polarelor trilineare a punctelor de pe Δ , ea va fi înfășurătoarea polarelor în raport cu o conică C_d a punctelor inverse de pe Δ , în raport cu centrul T .

Dar, Δ și Γ_c (vezi § 1) se poate ușor constata că sunt inverse generalizat, centrul fiind chiar θ . Asemenea Γ_t și X_c .

Considerând conica directoare:

$$(\Gamma_d) \quad \sum \frac{x^2}{\alpha_i^2} = 0,$$

observăm între cele patru elemente ale unui sistem σ relațiile de derivare:

$$\begin{array}{ccc} \Delta \leftarrow (\text{inversiune centrul } \theta) \rightarrow \Gamma_c & & \\ & \uparrow & \\ & (\text{polaritate în raport cu conica } \Gamma_d) & \\ & \downarrow & \\ X_c \leftarrow (\text{inversiune centrul } \theta) \rightarrow \Gamma_t & & \end{array} \quad (17)$$

schemă care explică îndeajuns rezultatele și observațiile dela § 6.

21. *Nota I.* Conica Γ_d nu e reală, decât dacă parametrii $\alpha_1^2, \beta_1^2, \gamma_1^2$ nu sunt toți pozitivi, ceea ce cere ca unul din parametrii $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ să fie imaginari. Noi însă am considerat punctul θ real, avem deci a face cu o polaritate în raport cu o conică imaginară. Cele spuse însă își păstrează același înțeles.

Nota II. Peste o conică asemenea cu Γ_d am dat la paragraful 15. Acolo însă o obținem într'altfel. Acolo T era potențialul de ordinul $\frac{1}{2}$ al punctului de întâlnire al polarelor trilineare a punctelor reciproce potențialelor de ordin II, a centrelor de inversiune.

Ar fi desigur interesant de studiat, relațiile între elementele a două sisteme σ_1 și σ_2 inverse generalizat, în raport cu un centru oarecare, în particular cu un centru care e un punct remarcabil al triunghiului.

(Va urma)

GRIGORE C. MOISIL.

Liceul „Spiru Haret”, București.

NOTE MATEMATICE.

40. *Alte zece astronomii diverse.* (Vezi nota 14 pag. 86).
11. **Antică.** *Delambre.* — *Traité d'astronomie ancienne.* Paris 1817.
12. **Generală.** *Jones A. C.* — *General astronomy.* 1922.
13. **Geometrică.** *S. Ward.* — *Astronomia geometrica.* Londra 1656.
14. **Medievală.** *Delambre.* — *Histoire de l'astronomie du moyen age.* Paris 1819.
15. **Modernă.** *Delambre.* — *Histoire de l'astronomie moderne.* Paris 1821.
16. **Nouă.** *Proctor R. A. & Rangard A. C.* — *Old and new astronomy.* 1892.
17. **Orientală.** *Bailly.* — *Traité d'astronomie indienne et orientale.* 1787.
18. **Practică.** *André & Rayet & Angot.* — *Astronomie pratique.* Paris.
19. **Teoretică.** *Delambre.* — *Traité complet d'astronomie théorique et pratique.* Paris 1814.
20. **Veche.** Vezi No. 16.
(Va urmă)
- I. IONESCU.

41. În „*Biserica ortodoxă română*” din Iunie 1923 (Seria II, Anul 41), s'a publicat o dare de seamă a *Congresului interortodox* ținut în zilele de 10 — 18 Mai 1923, în vederea îndreptării calendarului iulian bisericesc. Conferința a hotărât între altele, intercalarea propusă de D-I Profesor MILANCOVICI din Belgrad, care revine a suprima 7 ani bisecți în o perioadă de 900 ani. O propunere de modificare în acest sens s'a citit și în Senatul nostru la 28 Decembrie 1923. Voesc să arăt aci numai că acest mod de rectificare este cunoscut de mai înainte.

În *Recréations mathématiques* de Ed. LUCAS, vol. IV pag. 5 (Anul 1894) găsim:

„La durée moyenne est donc de $365\frac{1}{4}$ jours solaires moyens. Mais cette durée est un peu trop grande, puisque l'année tropique, intervalle de deux équinoxes de printemps, se compose de 365,2422042 jours; cette différence fait à peu près 7 jours en neuf siècles”.

In *Unterhaltende Probleme und Spiele* de W. GROSSE (1897) pag. 101, găsim :

«Die mittlere Dauer eines Jahres war darnach $365\frac{1}{4}$ Tag. Nun ist aber die Zeit zwischen zwei Tag-und Nachtzeiten nur 365,2422042 Tage (Tropisches Jahr). Das julianische Jahr war daher in neun Jahrhunderten etwa um 7 Tage zu gross».

E probabil că observarea această să se fi făcut și mai înainte de reformatorii de calendare. In tot cazul, nu trebuie atribuită D-lui MILANCOVICI.

I. IONESCU.

42. *Asupra problemei 2073 (G. M. vol. XXIV pag. 43).*

In cele ce urmează, îmi propun să dau o soluție mai simplă acestei probleme.

Observăm că :

$$Ap^a = A^{kp} = Mp + A.$$

Condiția ca să avem : $\sum Ap^a = Mp$ este deci : $\sum A = Mp$.

Se mai observă că enunțul problemei eră complet, nu cum se afirmă în locul citat, căci dacă A nu e prim cu p, atunci $A = Mp$, iar condiția se reduce tot la $\sum A = Mp$.

Deasemenea, condiția ca suma :

$$A^{a!} + B^{b!} + C^{c!} + \dots + N^{n!}$$

să fie Mp , P fiind un număr oarecare, iar I indicatorul lui P, este tot $\sum A = Mp$.

Caz particular. Expresiunea :

$$E = A^{a!} + B^{b!} + C^{c!} + \dots + N^{n!}$$

se divide cu P, când $\sum A = Mp$.

ALEXANDRU TAUBER.

43. *Termeni de ordin negativ în șirul lui FIBONACCI.* In *Gazeta Matematică* Volumul XXVIII pag. 407, D-nul M. DAVIDESCU a arătat că termenul de rang u_n în șirul lui FIBONACCI este dat de

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (x^{n+1} - y^{n+1}), \quad (1)$$

în care :

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Dacă înlocuim n cu $(-n)$ în (1), avem :

$$u_{-n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{y^{n-1} - x^{n-1}}{(xy)^{n-1}} = (-1)^{n-2} u_{n-2}. \quad (2)$$

Vom zice că u_{-n} este termenul de rang $(-n)$ al șirului. Acești termeni sunt alternativ pozitivi și negativi. Șirul s'ar prezenta astfel :

rangul	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
numărul	...	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	...

Numerele de ordin negativ satisfac șirului lui FIBONACCI, căci se poate arăta ușor că avem :

$$u_{-n} = u_{-(n+1)} + u_{-(n+2)}$$

și înlocuind aici termenii cu valorile lor, date de (2), se obține :

$$(-1)^{n-2} u_{n-2} = (-1)^{n-1} u_{n-1} + (-1)^n u_n,$$

$$\therefore u_n = u_{n-1} + u_{n-2},$$

relațiunea fundamentală a șirului lui FIBONACCI.

Considerațiunea termenilor de ordin negativ ne permite a găsi unele proprietăți ale termenilor de rang pozitiv ai șirului. Astfel, în Anul XXI al *Gazetei Matematice*, D-1 GH. ZAPAN a stabilit, la pagina 125 și următoarele, că avem relația :

$$u_{n+s} = u_n u_s + u_{n-1} u_{s-1}. \quad (3)$$

Înlocuind s cu $(-s)$, avem :

$$u_{n-s} = u_{s-2} u_n - u_{s-1} u_{n-1}, \quad (4)$$

după ce înlocuim termenii de ordin negativ cu valorile lor.

Dacă aici avem $s = n + 2$, găsim :

$$u_{n+1} u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^{n+1}, \quad (5)$$

care este demonstrată prin inducţiune în *Culegere de probleme de aritmetică* (20, IV).

Dacă scoatem pe u_{n+1} din (3), pe u_{n-1} din (4) şi îi ducem în (5), găsim :

$$(u_n u_{s-2} - u_{n+s}) [u_n u_{s-2} - (-1)^s u_{n-1}] + u_{s-1}^2 u_n^2 = (-1)^n u_{s-1}^2,$$

$$u_n^2 (u_{s-2}^2 + u_{s-1}^2) - u_n u_{s-1} [u_{n+s} + (-1)^s u_{n-1}] = (-1)^n u_{s-1}^2.$$

Adunând (3) cu (4), găsim :

$$u_{n+s} + (-1)^s u_{n-s} = (u_s + u_{s-2}) u_n$$

şi făcând înlocuirile :

$$u_{n+s} u_{n-s} - u_n^2 = (-1)^{n+s} u_{s-1}^2,$$

care generalizează relaţia (5).

I. B. FLORESCU.

44. *Asupra unei chestiuni propuse la Concursul «Gazetei Matematice» din acest an.*

Chestiunea de algebră dată la clasa VI a fost următoarea :

Se dau numerele definite de relaţia

$$(1) \quad k_r^s = s k_{r-1}^s + k_{r-1}^{s-1},$$

presupunând

$$k_r^0 = 0, \quad k_r^r = 1, \quad k_r^s = 0 \quad (s > r).$$

Să se calculeze determinanţii :

$$\begin{vmatrix} k_2^1 & k_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ k_3^1 & k_3^2 & k_3^3 & 0 & 0 \\ k_4^1 & k_4^2 & k_4^3 & k_4^4 & 0 \\ k_5^1 & k_5^2 & k_5^3 & k_5^4 & k_5^5 \\ k_6^1 & k_6^2 & k_6^3 & k_6^4 & k_6^5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} k_3^2 & k_3^3 & 0 & 0 \\ k_4^2 & k_4^3 & k_4^4 & 0 \\ k_5^2 & k_5^3 & k_5^4 & k_5^5 \\ k_6^2 & k_6^3 & k_6^4 & k_6^5 \end{vmatrix}.$$

Cred că e interesant pentru corespondenţii «Gazetei» să dăm soluţiunea acestei chestiuni.

1. Să notăm

$$D_n^p = \begin{vmatrix} k_p^1 & k_p^2 & \dots & k_p^p & 0 & \dots & 0 \\ k_{p+1}^1 & k_{p+1}^2 & \dots & k_{p+1}^p & k_{p+1}^{p+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_n^1 & k_n^2 & \dots & k_n^p & k_n^{p+1} & \dots & k_n^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n+p-1}^1 & k_{n+p-1}^2 & \dots & k_{n+p-1}^p & k_{n+p-1}^{p+1} & \dots & k_{n+p-1}^n \end{vmatrix}$$

Din relația de recurență (1), ținând seamă de condițiile (2), deducem $k_r^1 = 1$, oricare ar fi r .

Așa fiind, putem scrie

$$D_n^p = \begin{vmatrix} k_{p-1}^1 & k_p^2 & \dots & k_p^p & 0 & \dots & 0 \\ k_p^1 & k_{p+1}^2 & \dots & k_{p+1}^p & k_{p+1}^{p+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n-1}^1 & k_n^2 & \dots & k_n^p & k_n^{p+1} & \dots & k_n^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n+p-2}^1 & k_{n+p-1}^2 & \dots & k_{n+p-1}^p & k_{n+p-1}^{p+1} & \dots & k_{n+p-1}^n \end{vmatrix}$$

Dacă scădem coloana întâia din a doua și ținem seama de relația de recurență (1), vedem că elementele coloanei a doua devin

$$2k_{p-1}^2, \quad 2k_p^2, \dots, \quad 2k_{n+p-2}^2.$$

Dăm pe 2 factor și repetăm operația de mai sus, adică scădem coloana doua din a treia, ..., vom obține :

$$D_n^p = n! D_n^{p-1}.$$

Dând lui p valorile 2, 3, ..., p și înmulțind relațiile obținute, deducem :

$$D_n^p = (n!)^{p-1} D_n^1.$$

Observând că

$$D_n^1 = k_1^1 k_2^2 \dots k_n^n = 1, \quad (k_i^i = 1)$$

valoarea lui D_n^p este:

$$D_n^p = (n!)^{p-1}.$$

Pentru $n=5$, $p=2$, avem determinantul din enunțul dat la concurs; valoarea lui este $s! = 120$.

2. Fie

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} k_3^2 & k_3^3 & 0 & \dots & 0 \\ k_4^2 & k_4^3 & k_4^4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_n^2 & k_n^3 & k_n^4 & \dots & k_n^n \\ k_{n+1}^2 & k_{n+1}^3 & k_{n+1}^4 & \dots & k_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Dacă înmulțim determinantul

$$D_{n-1}^2 = \begin{vmatrix} k_2^1 & k_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ k_3^1 & k_3^2 & k_3^3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n-1}^1 & k_{n-1}^2 & k_{n-1}^3 & \dots & k_{n-1}^{n-1} \\ k_n^1 & k_n^2 & k_n^3 & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

cu determinantul

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

obținem :

$$D_{n-1}^2 = \begin{vmatrix} k_2^1 + 2k_2^2 & k_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_3^1 + 2k_3^2 & k_3^2 + 3k_3^3 & k_3^3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n-1}^1 + 2k_{n-1}^2 & k_{n-1}^2 + 3k_{n-1}^3 & k_{n-1}^3 + 4k_{n-1}^4 & \dots & k_{n-1}^{n-2} + (n-1)k_{n-1}^{n-1} & k_{n-1}^{n-1} \\ k_n^1 + 2k_n^2 & k_n^2 + 3k_n^3 & k_n^3 + 4k_n^4 & \dots & k_n^{n-2} + (n-1)k_n^{n-1} & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

și ținând seama de relația (1), avem :

$$D_{n-1}^2 = \begin{vmatrix} k_3^2 & k_3^3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_4^2 & k_4^3 & k_4^4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_n^2 & k_n^3 & k_n^4 & \dots & k_n^{n-1} & k_n^n \\ k_{n+1}^2 & k_{n+1}^3 & k_{n+1}^4 & \dots & k_{n+1}^{n-1} & k_{n+1}^n - n \end{vmatrix}$$

Prin urmare,

$$D_{n-1}^2 = \Delta_n - n \Delta_{n-1}$$

și înlocuind D_{n-1}^2 prin valoarea lui $(n-1)!$, obținem următoarea relație de recurență:

$$\Delta_n = n \Delta_{n-1} + (n-1)!$$

Să dăm lui n valorile 3, 4, ... n și să observăm că $\Delta_2 = k_3^2 = 3$. Vom avea relațiile:

$$\Delta_2 = 2 + 1!$$

$$\Delta_3 = 3 \Delta_2 + 2!$$

$$\Delta_4 = 4 \Delta_3 + 3!$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta_n = n \Delta_{n-1} + (n-1)!,$$

din care deducem cu ușurință că:

$$\Delta_n = (n-1)! + n \cdot (n-2)! + n(n-1)(n-3)! + \dots$$

$$+ n(n-1) \dots 4 \cdot 2! + n(n-1) \dots 3 \cdot 1! + n!,$$

sau, în fine:

$$\Delta_n = n! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right).$$

Dacă facem $n=5$, obținem pentru determinantul dat la concurs, valoarea 274.

D. V. IONESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOALA POLITEHNICĂ DIN BUCUREȘTI

EXAMENUL DE ADMITERE ÎN ANUL I.

PROBELE SCRISE.

(Noemvrie 1923).

Mecanica. 1. Un punct material este acționat de 6 forțe egale fiecare cu 100, 200, 300, 400, 500 și 600 kgr, aranjate în ordinea indicată și făcând între ele unghiuri de câte 60° . Să se găsiască valoarea și direcțiunea rezultantei, cunoscând că toate forțele sunt dirijate ca în figură.

2. O fântână are adâncime de 12 m, măsurată dela nivelul ghizdurilor. Fusul pe care se înfășoară lanțul are 16 cm diametru. Greutatea găleții goale este de 20 kgr și poate ridica 10 litri de apă. Lanțul, cu care este legată găleata, cântărește 1 kgr pe metru și are o grosime totală de un centimetru. Pe același ax cu fusul, este o roată de 1,6 m diametru, cu ajutorul căreia se poate învârti fusul. Se cere:

a) Lucrul mecanic necesar pentru a ridica o găleată plină de apă, dela suprafața apei până la nivelul ghizdurilor.

b) Ce forță trebuie aplicată tangențial la obada roții, pentru a echilibra greutatea unei găleți pline cu apă, care se găsește imediat la suprafața apei?

c) Ce forță trebuie aplicată, în aceleași condițiuni, când găleata este goală, la nivelul ghizdurilor?

d) Un om care are o putere de 7,5 kgrm/sec în cât timp ridică o găleată plină cu apă, dacă numai 0,75 din lucrul mecanic cheltuit de el servește la ridicarea găleții pline cu apă, restul pierzându-se prin frecări.

Pentru chestiunile de sub a, b și c, presupunem că nu avem frecări.

Timpul acordat 3 ore.

Soluție. *Chestiunea 1.* Fie punctul material O. Sistemul celor șase forțe ce-l solicită fiind două câte două de aceeași direcțiune și de sens contrar, se poate înlocui prin altul numai de trei forțe, obținut prin diferența forțelor ce au aceeași direcțiune și au sensul contrar. Avem deci (fig. 1):

$$A = 400 - 100 = 300 \text{ kgr,}$$

$$B = 500 - 200 = 300 \text{ kgr,}$$

$$C = 600 - 300 = 300 \text{ kgr.}$$

Pentru a avea efectul acestor forțe, asupra punctului material, căutăm rezultanta lor. Incepem cu rezultanta parțială a forțelor A și C. Ele fiind egale, rezultanta lor va avea direcțiunea bisectoarei unghiului ce-l formează

aceste forțe în O. Unghiul fiind de 120° , urmează că bisectoarea se va așterne peste forța B, care face unghiuri egale de 60° , cu ambele forțe A și C.

Valoarea ρ a rezultantei parțiale a forțelor A și C se obține prin paralelogramul forțelor.

$$\rho^2 = A^2 + C^2 + 2AC \cos 120^\circ,$$

$$\rho^2 = 2A^2 [1 + \cos 120^\circ],$$

$$\rho^2 = 4A^2 \cos^2 60^\circ = 4 \times 300^2 \times \left[\frac{1}{2}\right]^2 = 300^2,$$

$$\rho = 300.$$

Rezultanta parțială ρ , având același punct de aplicare, aceeași direcțiune

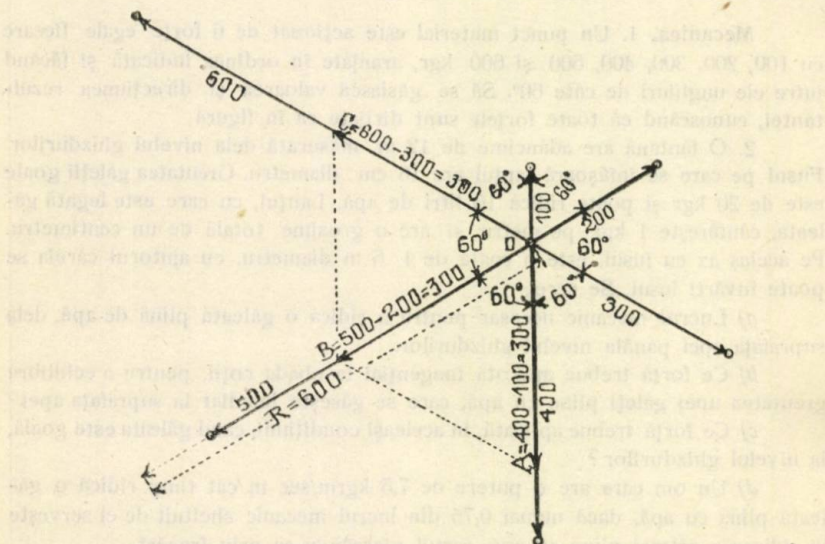


Figura 1.

și același sens cu forța B, se obține rezultanta generală R prin simpla adunare a forței B cu ρ . Deci:

$$R = \rho + B = 300 + 300 = 600 \text{ kgr.}$$

Conchidem deci, că rezultanta generală a sistemului dat de șase forțe, ce acționează punctul material O, este de 600 kgr și direcțiunea sa se confundă cu aceea a forței de intensitatea 500 kgr.

Notă. De obicei, astfel de probleme se fac în mod grafic. (Vezi fig 2). Se compune forța de 100 kgr cu forța de 200 kgr și se obține rezultanta parțială OR_1 ; apoi se compune aceasta rezultantă parțială OR_1 cu forța de 300 și se obține rezultanta parțială OR_2 ; apoi, compunând pe OR_2 cu forța de 400, obținem OR_3 ; apoi, compunând pe OR_3 cu forța de 500, obținem OR_4 ; apoi, compunând pe OR_4 cu forța de 600, obținem rezultanta generală OR_5 ; care măsurată la scară, ne dă valoarea de 600 kgr.

Chestiunea 2. a) Lucrul mecanic τ este produsul forței cu deplasarea. Forța conține greutatea găleții goale g_1 , greutatea a zece litri de apă g_2 și greutatea lanțului g_3 . Pentru a ține seamă de greutatea lanțului în timpul săvârșirii lucrului mecanic, trebuie să observăm că forța care produce lucrul

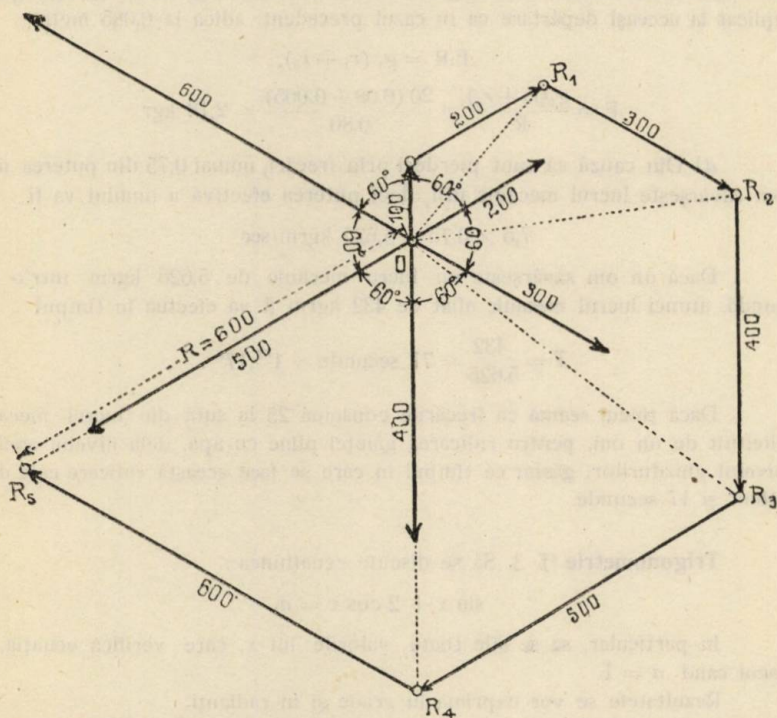


Figura 2.

meccanic datorit greutății lanțului variază liniar dela 12 kgr la zero, deci se va lua media $g_3 = \frac{12 + 0}{2} = 6$. Vom avea deci:

$$G = g_1 + g_2 + g_3 = 20 + 10 + 6 = 36 \text{ kgr.}$$

Deplasarea este adâncimea H a puțului dela nivelul apei la nivelul ghizdurilor. Aceasta, din datele problemei, este $H = 12 \text{ m}$.

Lucrul mecanic τ va fi deci:

$$\tau = G \times H = 36 \times 12 = 432 \text{ kgrm.}$$

b) Momentul forței F , aplicată tangențial la obada roții, adică la distanța $R = 1,60/2 = 0,80$, trebuie să fie egal cu acela produs de greutatea găleții plină cu apă și a lanțului, aplicat la o depărtare de axul fusului egală cu suma dintre raza fusului r_1 și jumătatea grosimei lanțului r_2 :

$$F.R = G (r_1 + r_2),$$

$$F = \frac{G (r_1 + r_2)}{R} = \frac{42 (0.08 + 0.005)}{0.80} = 4.46 \text{ kgr.}$$

c) Momentul forței F aplicat tangențial la obada roții, la distanța de 0,80 de axul fusului, trebuie să fie egal cu acela produs de greutatea găleții goale, aplicat la aceeași depărtare ca în cazul precedent, adică la 0,085 metri:

$$F.R = g_1 (r_1 + r_2),$$

$$F = \frac{g_1 (r_1 + r_2)}{R} = \frac{20 (0.08 + 0.005)}{0.80} = 2.13 \text{ kgr.}$$

d) Din cauză că sunt pierderi prin frecări, numai 0,75 din puterea unui om săvârșește lucrul mecanic util, deci puterea efectivă a omului va fi:

$$7,5 \times 0,75 = 5,625 \text{ kgrm/sec.}$$

Dacă un om săvârșește un lucru mecanic de 5,625 kgrm într'o secundă, atunci lucrul mecanic aflat de 432 kgrm il va efectua în timpul

$$T = \frac{432}{5.625} = 77 \text{ secunde} = 1^m, 17^s.$$

Dacă ținem seamă că frecările consumă 25 la sută din lucrul mecanic cheltuit de un om, pentru ridicarea găleții pline cu apă, dela nivelul apei la nivelul ghizdurilor, găsim că timpul în care se face această ridicare este de 1 minut și 17 secunde.

Trigonometrie ¹⁾. 3. Să se discute ecuațiunea :

$$\sin x + 2 \cos x = a.$$

În particular, să se afle toate valorile lui x , care verifică ecuația, în cazul când $a = 1$.

Rezultatele se vor exprima în grade și în radianți.

Soluție. Dacă în ecuația dată, înlocuiesc coeficientul 2 prin $\operatorname{tg} \varphi$, ea se pune sub forma următoare :

$$(1) \quad a = \frac{\sin (x + \varphi)}{\cos \varphi},$$

în care φ este o cantitate cunoscută și anume :

$$\varphi = 63^\circ 26' 5''.$$

Expresiunea (1) este :
maximă pentru :

$$x_1 + \varphi = 2 k \pi + \frac{\pi}{2},$$

minimă pentru :

$$x_2 + \varphi = 2 k \pi - \frac{\pi}{2}.$$

1) Discuțiunea cerută prin enunțul problemei ne fiind complet tratată la pag. 179 din No. 5 al G. M. chestiunea a fost reluată în N-rul de față.

De unde :

$$x_1 = 2k\pi + 90^\circ - 63^\circ 26' 5'' = 2k\pi + 26^\circ 33' 55'',$$

$$x_2 = 2k\pi - 90^\circ - 63^\circ 26' 5'' = 2k\pi - 153^\circ 26' 5''.$$

Introducând aceste valori în ecuațiunea dată,

$$a \text{ maxim} = 0,44722 + 2 \times 0,89444 = 2,2361$$

$$a \text{ minim} = -0,44722 - 2 \times 0,89444 = -2,2361$$

Această însemnează că pentru orice valoare reală a lui x , a nu poate obține o valoare absolută mai mare ca 2,2361 și invers, pentru orice valoare a lui a cuprinsă între $-2,2361$ și $+2,2361$, avem întotdeauna valori reale pentru x .

În particular, când $a = 1$, dacă înlocuim în ecuațiunea :

$$\sin x + 2 \cos x = 1,$$

$$\text{pe} \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x},$$

obținem următoarea ecuațiune de gradul al doilea :

$$5 \sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0.$$

Rădăcinile ecuațiunii sunt :

$$\sin x_1 = 1 \quad \text{și} \quad \sin x_2 = -\frac{3}{5}.$$

De unde :

$$x_1 = 90^\circ + 360^\circ x,$$

$$x_2 = -36^\circ 52' 11'' + 360^\circ x.$$

Rezultatele urmând să fie exprimate și în radianți, utilizăm pentru conversiune, valoarea în grade a unui radianț :

$$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44'' = 57^\circ.29555.$$

Deci valorile simple ale lui x_1 și x_2 sunt :

$$x_1 = \frac{90^\circ}{57^\circ.296} = 1,57 \text{ rad.}$$

$$x_2 = -\frac{36^\circ 52' 11''}{57^\circ.296} = -0,64 \text{ rad.}$$

Inginer-Şef C. D. ORĂŞANU.
Licențiat în matematici.

BIBLIOGRAFIE.

Bulletin of the American mathematical Society. Vol. XXIX No. 9 Noemvrie 1923. Lecțiuni asupra lui J. W. GIBBS, de R. G. D. RICHARDSON. Teoria electro-magnetică a liniilor-luminoase, de H. BATEMAN. Unele multiplicatoare de co-serii stânge și drepte pentru unele grupuri finite, de G. A. MILLER. Teorema celei de a doua valori medii a funcțiunilor sumabile, de M. B. PORTER. Analogii între u_n și v_n ai lui LUCAS și funcțiunile eliptice, de E. T. BELL. Singularități ale curbelor de ordin dat, de T. R. HOLLCROFT. Teoria funcțiunilor a lui HURWITZ COURANT, de O. D. KELLOG.

Idem. No. 10. Decemvrie 1923. A treizecea Adunare de vară a Societății, de R. G. D. RICHARDSON. O povestire introductorie a teoriei aritmetice a numerelor algebrice și a dezvoltărilor ei recente, de L. J. MORDELL. Soluțiile întregi ale ecuației $x^2 - my^2 = zw$, de L. E. DICKSON. Realitatea zerorilor determinantului λ de R. G. D. RICHARDSON. BOUTROUX asupra idealului matematicilor, de J. W. YOUNG.

Mathesis. Vol. XXXVII. No. 10. Decemvrie 1923. Bruxelles. Bibliografia triunghiului și a tetraedrului, de J. NEUBERG. Asupra pentaedrului și a pentagonului ortocentrice, de CL. SERVAIS. PASCAL și tratatul său de triunghi aritmetic de H. BOSMANS. Valori critice, privitoare la pondul unui număr prim și pondul total al unui număr compus de H. de MONTILLE. Note de algebră elementară de Ad. M.

Revista de matematicas y fisicas elementales. Anul V. No. 7. Noemvrie 1923. Buenos Aires. Progresiuni geometrice cu două, trei, sau mai multe rații, de B. IG. BAIDAFF.

Idem. No. 8, Decemvrie 1923. Rezultatul Concursului al IV al Revistei de B. IG. BAIDAFF. (Printre premii găsim și pe corespondenții noștri: I. COȘEREANU, T. DORDEA și A. MICLESCU). Câteva congruențe de CĂP. I. LINTES.

Journal des mathématiques élémentaires, publié, par H. VUIBERT. Anul 48. No. 7 Ianuarie 1924. Paris.

Foaia matematică. *Revistă lunară de matematici elementare pentru uzul școalelor secundare.* Apare la 1 ale fiecărei luni. Anul I. No. 1. Ianuarie 1924. Chișinău. Tipografia: Societatea „Glasul Țării”. Abonamentul 40 lei pe an pentru elevi, 80 lei pentru Autorități. Un număr 8 lei. Abonamentele se fac la D-l Inginer N. R. ȘTEFAN, strada Pușchin No. 30, Chișinău. Manuscrisele se pot trimite D-lui Inginer șef N. PROFIRI, strada Pușchin No. 30, Chișinău.

Un grup de opt ingineri și un licențiat în matematici, au luat inițiativa de a tipări o foaie lunară de matematici elementare, pentru uzul elevilor de licee și al școalelor secundare. Dânsi nu urmăresc „nici glorie, nici câștig”

și iau ca model „*întru toate, Gazeta Matematică din București*”. Aceleași cauze producând aceleași efecte, Comitetul de redacțiune va obține tot succesul moral și va reuși să ridice în România răsăriteană, cultura științifică a tineretului și va trimite de acolo, Universităților și Școalelor superioare tehnice și militare dela noi, tineri bine pregătiți și cu dragoste pentru studiu și pentru știință. Media *opt* cu care s'au admis anul acesta candidații la Școala Politehnică din București, la probele scrise, trebuie neapărat ridicată și aceasta nu se poate face fără pregătire serioasă la matematici în licee. Pentru aceasta, însă se cere Comitetului de redacție al noiei reviste, sacrificii mari materiale, căci matematica nu este o marfă curentă pe piață, nici de lux pentru a o cumpăra cei bogați. Redactorii de serviciu vor trebui să sacrifice multă muncă și timp, căci numai așa succesul le va fi asigurat din punct de vedere moral. Printre redactori sunt și dintre foștii corespondenți ai *Gazetei Matematice*, cari au strălucit în copilărie la această revistă și cari cunosc ce au de făcut ca să strălucească și la noua foaie matematică.

Primul număr cuprinde: Cuvânt înaintea, din partea Comitetului. Centrul de greutate al patruleterului, de N. PROFIRI. Câteva observații asupra mișcării unei figuri plane în planul său, de N. PROFIRI. Chestiunile de examen dela Școala de Conducători de lucrări publice din Chișinău. Exerciții. Probleme propuse.

I. I.

Jurnal matematic. Vol. I No. 2. 15 Ianuarie 1924. Arad. Asupra funcțiunilor pseudo-omogene, de T. POPOVICIU.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Vol. XCVI. No. 3—4. Septembrie—Octombrie 1923. Buenos-Aires. Ipoteza „*Quanta*” în teoria statistică a materiei și în teoria radiațiunii, de RAMON G. LOYARTE. Integrarea grafică a ecuațiunilor diferențiale ale cinetice chimice, de JOSE BABINI. Calculul automat al sistemelor iperstatice, de OTTO GOTTSCHALK.

Vlăstarul. Revista Liceului „Spiru Haret”. Apare bilunar. Anul I. No. 1. 25 Decembrie 1923. București. Institutul de arte grafice „*Lucia*”. Preț 5 lei.

Elevii Liceului Spiru Haret din București, încurajați de profesorii lor, au început scoaterea unei reviste în care se publică articole literare și științifice, jocuri, etc. Vom semnală numai articolele care pot interesa învățământul matematicilor. Astfel, primul număr cuprinde un articol, cu o fotografie, în memoria lui „*Spiru Haret*” și probleme propuse de D-l EMIL ȘTEFĂNESCU, elev la acel liceu.

Idem. No. 2. Ianuarie 3. Anul 1924. Tipografia „*Răsăritul*”, București. Un program și un apel, de I. BANCUI. Probleme rezolvate. Exerciții. Probleme propuse. Versuri matematice.

Chestiunile de ordin științific se vor trimite D-lui E. ȘTEFĂNESCU, elev clasa VIII a Liceului „Spiru Haret”, București.

Buletinul Asociației de matematică pură și aplicată, Anul III No. 2. Octombrie 1923. București. Învățământul mecanicii în licee și în școlile tehnice medii (Procese verbale ale ședințelor). Asupra noțiunii de derivată, de E. ABASON.

Revista Artileriei. Anul XXXVI. No. 10, 11, 12, 1, 2. Ianuarie-Mai 1923. București.

Școala politehnică din Timișoara. Anuarul. Anul III. 1922—1923. Timișoara.

ENRIQUE HERRERO DUCLOUX. *Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina* III. *Las ciencias químicas*. 1923. Buenos-Aires. (Publicată cu ocazia cincuantenarului Societății).

CRISTOBAL M. HICKEN. *Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina* VIII. *Los estudios botánicos*. Buenos-Aires 1923.

J. NEUBERG. *Propriété de deux tétraèdres polaires réciproques par rapport à une conique centrée*. Supliment la *Mathesis*.

J. NEUBERG. *Généralisation de la theorie des foyers des coniques*. Extras din *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*. Decembrie 1923.

M. KRITCHICK. *Equations binomes*. Resumat al comunicării făcute la Societatea matematică din Bruxelles la 24 Martie 1823. Supliment la *Mathesis*.

Buletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine. Anul VIII No. 9. 1922 — 1923. București. Observațiuni asupra unei lucrări a D-lui ONICESCU, de E. LANDAU și K. GRANDJOT. Observatorul de astronomie fizică din Duboșarii vechi, de N. DONICI. Asupra unei noi metode de investigare în fenomenele solare, de N. DONICI.

GEORGES TITZÉICA. *Géométrie différentielle projective des réseaux*. București 1924. „Cultura națională”. Paris. *Gauthier Villars*. (Imprătată de Academia română).

C E R E R I.

108. Ce matematicieni români au dat Ardealul, Bucovina și Basarabia?

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2887. A, B, C fiind unghiurile unui triunghi, să se demonstreze relația :

$$\sum \frac{\cotg 2m B + \cotg 2m C}{\tg m B + \tg m C} = -1,$$

m fiind un număr întreg oarecare.

M. SARIAN.

I. Soluție dată de D-nii : DOBRESCU-BĂBICI (Caracal), N. GEORGESCU-ROEGEN, T. I. POPA (Lic. Cantemir-București), FL. LĂZĂRESCU (Liceul Maiorescu-Giurgiu) și M. ADAM (Constanța).

Ținând seamă de formulele :

$$\begin{aligned} \cotg 2m B + \cotg 2m C &= \frac{\sin 2m (B + C)}{\sin 2m B \cdot \sin 2m C} \\ &= \frac{\sin m (B + C) \cdot \cos m (B + C)}{2 \sin m B \cdot \sin m C \cdot \cos m B \cdot \cos m C} \end{aligned}$$

și

$$\tg m B + \tg m C = \frac{\sin m (B + C)}{\cos m B \cdot \cos m C},$$

obținem :

$$\begin{aligned} \frac{\cotg 2m B + \cotg 2m C}{\tg m B + \tg m C} &= \frac{\cos m (B + C)}{2 \sin m B \cdot \sin m C} \\ &= \frac{\cos m B \cdot \cos m C - \sin m B \cdot \sin m C}{2 \sin m B \cdot \sin m C} = \frac{\cotg m B \cdot \cotg m C}{2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dar cum :

$\sum \cotg m B \cdot \cotg m C = 1$, (Culegerea de Probleme, Trigonometrie, VIII, 18) rezultă imediat :

$$\sum \frac{\cotg 2m B + \cotg 2m C}{\tg m B + \tg m C} = \sum \left(\frac{\cotg m B \cdot \cotg m C}{2} - \frac{1}{2} \right) = -1.$$

Observare. — Soluții analoge s'au primit de la D-nii : ATH. ILARION (învățător, Copou-Iasi), I. FLORESCU, AL. BRĂILEANU, A. POPEANU, I. RIZESCU și I. ȘERBĂNESCU.

II. Soluție dată de D-1 MIRCEA ADAM (Constanța).

Trecând la arce pe jumătate, avem :

$$\sum \frac{1 - \operatorname{tg}^2 m B}{2 \operatorname{tg} m B} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 m C}{2 \operatorname{tg} m C} = \sum \frac{1 - \operatorname{tg} m B \cdot \operatorname{tg} m C}{2 \operatorname{tg} m B \cdot \operatorname{tg} m C},$$

de unde rezultă : $\sum \cot g m B \cdot \cot g m C = 1$, relație cunoscută.

Notă. — 1. Au rezolvat problema și D-nii : I. S. ANTONIU, E. BALLAN, B. M. BARBĂLATT, E. BERCOVICI, C. I. BERDAN, D. BLUMENFELD, MARTINIAN BOGDAN (Caracal), ADR. BUȘILĂ, I. CONSTANTINESCU, I. COȘEREANU, V. COȘNIȚĂ, S. CULIANU, V. DAN, M. G. DUMITRESCU (Slatina-Olt), A. FIȚESCU, M. GĂTAN, C. E. GEORGESCU, C. I. GEORGESCU, F. GEORGESCU, ST. GEORGESCU-GORJAN, V. GHÎTESCU, CR. GOILAV, M. GRÜNBAUM, V. HARET, I. HUBER, E. ILIESCU, I. ILIESCU, I. ILIESCU-BREZUICA, LONGIN IONESCU, I. IOSIF, G. JUJESCU, P. KATZ, A. MICLESCU, A. T. NICOLAU, AL. NICULESCU, B. D. NICULESCU, T. POPA, OV. POPEA, GH. D. POPESCU, T. POPOVICI, CR. RIGANI, EDG. RUSSU, D. SAMOILĂ, M. SĂVESCU, D. SCHILERU, CONRAD SCHÖNFELD, A. SOLOMON, W. SOLOMON, N. STĂNESCU, I. AL. STOENESCU, MARIN ȘTEFAN, E. ȘTEFĂNESCU, I. TEODORESCU, I. D. VASILESCU, M. D. VASILESCU, L. WEISS și G. MATEESCU.

2. D-nii : N. ARCADIAN și ȘT. SOLACOGLU au rezolvat problema numai pentru cazul particular când $m = 1$.

3. D-nii : I. B. FLORESCU, V. HARET și M. ADAM observă că relația din problema 2887 subzistă și când $A + B + C = k\pi$.

4. Parte din corespondenți arată că dacă $A + B + C = k\pi$, analog se pot stabili relațiunile :

$$\sum \frac{\cot g 2m B - \cot g 2m C}{\operatorname{tg} m B - \operatorname{tg} m C} = -2 \cdot \left(\begin{array}{l} \text{ADR. BUȘILĂ} \\ \text{C. I. GEORGESCU} \\ \text{I. ȘERBĂNESCU} \end{array} \right)$$

$$\sum \frac{\cot g m B + \cot g m C}{\operatorname{tg} m B + \operatorname{tg} m C} = 1. \quad (\text{I. ILIESCU})$$

$$\sum \frac{\cos m A}{\sin m B \cdot \sin m C} = 2. *) \quad (\text{I. Constantinescu})$$

$$\sum \frac{\cot g m A + \cot g m B}{\cot g \frac{m}{2} A + \cot g \frac{m}{2} B} = -1. \quad (\text{M. Adam})$$

*) Această relațiune generalizează exercițiul 21 din „Culegerea de Probleme”. (Trigonom., XVII).

Această ultimă relațiune subzistă și când $A + B + C = \frac{1}{2} \pi$.

5. D-l M. ADAM mai arată că dacă $A + B + C = 0$, există relația :

$$\sum \frac{\cotg 2m (A+B) + \cotg 2m (B+C)}{\tg m (A+B) + \tg m (B+C)} = -1.$$

6. S'a primit și o soluție neiscălită.

CĂPITAN GR. ZAPAN.

PROBLEMA 3025. $f_1(x)$ și $f_2(x)$ fiind două funcțiuni continue, să se găsiască ce reprezintă funcțiunea.

$F(x) = |f_1(x)| + |M_1 - f_1(x)| + |M_2 - f_2(x)| + |f_2(x)|$,
când x variază dela $-\infty$ la $+\infty$. M_1 și M_2 sunt constante pozitive.

P. SERGESCU.

Expresia funcțiunei $F(x)$ conținând semnul *modul*, reprezintă lucruri deosebite, după cum fiecare din câtimile :

$$f_1(x) - M_1, \quad f_1(x), \quad f_2(x) - M_2, \quad f_2(x),$$

sunt pozitive sau negative pentru valoarea considerată a lui x .

Dacă așezăm cele două semne $+$ și $-$ în toate felurile posibile, ca să formăm grupe de câte 4 semne, avem $4^2 = 16$ grupe deosebite. Dar, pentru problema noastră, anume grupări de semne nu sunt posibile: $f_1(x)$ nu poate fi negativ în timp ce $f_1(x) - M_1$ e pozitiv. Acelaș lucru pentru $f_2(x)$. Rămân deci următoarele cazuri distincte pentru aranjarea semnelor celor patru câtimi scrise mai sus :

$$\begin{array}{lll} + + + + & - + + + & + + - + \\ - - - - & + + - - & - - + + \\ - + - + & - + - - & - - - + \end{array}$$

Se observă imediat că cele trei cazuri din coloana III se deduc din cele trei cazuri din coloana II prin permutarea câtimilor M_1 și $f_1(x)$ respectiv cu M_2 și $f_2(x)$. Ca atare, avem în realitate de studiat șase cazuri esențial deosebite. De altfel, o simplă inspecțiune ceva mai atentă a expresiei $F(x)$, arată că pentru cele trei cazuri din coloana I, $F(x)$ ia respectiv valorile :

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_1(x) - M_1 + f_2(x) - M_2 + f_2(x) &= 2[f_1(x) + f_2(x)] - (M_1 + M_2), \\ -f_1(x) + M_1 - f_1(x) + M_2 - f_2(x) - f_2(x) &= -2[f_1(x) + f_2(x)] + (M_1 + M_2), \\ [-f_1(x) + M_1] + [f_1(x)] - [f_2(x) - M_2] + [f_2(x)] &= M_1 + M_2. \end{aligned}$$

De asemenea, valorile lui $F(x)$ în fiecare din cazurile din coloana II, sunt:

$$\begin{aligned} [-f_1(x) + M_1] + [f_1(x)] + [-M_2 + f_2(x)] + [f_2(x)] &= 2f_2(x) + (M_1 - M_2), \\ [f_1(x) - M_1] + [f_1(x)] + [M_2 - f_2(x)] + [-f_2(x)] &= 2[f_1(x) - f_2(x)] - (M_1 - M_2), \\ [M_1 - f_1(x)] + [f_1(x)] + [M_2 - f_2(x)] + [-f_2(x)] &= -2f_2(x) + (M_1 + M_2). \end{aligned}$$

Pentru a efectua reprezentarea funcțiunei $F(x)$ în intervalul dela $-\infty$ la $+\infty$, vom descompune acest interval în mai multe intervale parțiale, așa ca în fiecare interval parțial să avem unul din grupurile de semne considerate mai sus. Aceste intervale parțiale se obțin considerând rădăcinile ecuațiilor:

$$f_1(x) - M_1 = 0, \quad f_1(x) = 0, \quad f_2(x) - M_2 = 0, \quad f_2(x) = 0.$$

De oarece atenția noastră se îndreptează numai asupra schimbărilor de semn, e clar că numai rădăcinile de *ordin impar* ne interesează în tot ceea ce va urma.

Vom însemna cu $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ rădăcinile de ordin impar, așezate în ordine crescândă, ale ecuației $f_1(x) - M_1 = 0$ și cu $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots$ rădăcinile de ordin impar, așezate în ordine crescândă, ale ecuației $f_1(x) = 0$. Se asigură foarte ușor, dintr'o simplă inspecțiune a reprezentărei grafice a funcțiilor $y_1 = f_1(x) - M_1$ și $y_2 = f_1(x)$, că între două rădăcini consecutive α_{p+1} și α_{p+2} pentru care y_1 schimbă semnul, trebuie să fie un număr *pereche* de rădăcini α' .

În sfârșit, însemnăm cu $\beta_1, \beta_2, \dots$ rădăcinile de ordin impar, așezate în ordine crescândă, ale ecuației $f_2(x) - M_2 = 0$ și cu $\beta'_1, \beta'_2, \dots$ rădăcinile de ordin impar așezate în ordine crescândă, ale ecuației $f_2(x) = 0$. Se observă, ca mai sus, că între două numere β consecutive, trebuie să fie un număr par de câtimii β' .

După ce am găsit toate numerele $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, le vom așeza într'un singur șir, în ordine crescândă dela $-\infty$ la $+\infty$. Fiecare din aceste câtimii vom prelungi-o cu o bară verticală, iar sub linia în care am scris valorile de mai sus pentru x , vom completa un tablou cu încă cinci linii: pentru semnele câtimilor $f_1 - M, f_1, f_2 - M, f_2$

x	$f_1'(x) - M_1$	$f_1(x)$	$f_2(x) - M_2$	$f_2(x)$	$F(x)$
$\alpha_p \dots \beta_q \dots \beta'_s \dots \beta'_{s+1} \dots \beta_{q+1} \dots \alpha_{p+1} \dots \alpha'_r \dots \alpha'_{r+1} \dots \alpha_{p+2} \dots \alpha_{p+3} \dots \beta_{q+2} \dots \beta'_{s+2} \dots \alpha'_{r+2} \dots \beta'_{r+3} \dots \alpha'_{r+3} \dots \beta_{q+3} \dots \alpha_{r+4} \dots$	0	+	+	+	$2[f_1(x) + f_2(x)] - (M_1 + M_2)$
	+	+	0	+	$2f_1(x) - (M_1 - M_2)$
	+	+	0	+	$2[f_1(x) - f_2(x)] - (M_1 - M_2)$
	+	+	0	+	$2f_1'(x) - (M_1 - M_2)$
	+	+	0	+	$2[f_1(x) + f_2(x)] - (M_1 + M_2)$
	0	+	+	+	$2f(x) + (M_1 - M_2)$
	+	+	0	+	$-2[f_1(x) - f_2(x)] + (M_1 - M_2)$
	+	+	0	+	$2f_2(x) + (M_1 - M_2)$
	0	+	+	+	$2[f_1(x) + f_2(x)] - (M_1 + M_2)$
	0	+	+	+	$2f_2(x) + (M_1 - M_2)$
	+	+	0	+	$(M_1 + M_2)$
	+	+	0	+	$-2f_2(x) + (M_1 + M_2)$
	+	+	0	+	$-2[f_1(x) + f_2(x)] + (M_1 + M_2)$
	+	+	0	+	$-2f_1(x) + (M_1 + M_2)$
	+	+	0	+	$(M_1 + M_2)$
	+	+	0	+	$2f_1'(x) + (M_1 - M_2)$
	0				

și pentru expresia lui F . În afară de aceste semne, (pentru claritatea tabloului): în linia lui $f_1 - M$, înscriem 0 peste liniile verticale pornite din dreptul câtimilor α ; în linia lui f_1 înscriem 0 peste liniile verticale pornite din dreptul câtimilor α' ; etc. După ce am efectuat toate aceste operațiuni preliminare, o simplă inspecție a semnelor cuprinse între două linii verticale consecutive, ne arată în cazul cărei grupări de semne (studiată la începutul soluției) ne aflăm și deci care e valoarea lui $F(x)$, pe care o înscriem în linia cea din urmă a tabloului nostru. Tabloul astfel constituit permite să ne dăm seama de variația funcțiunei $F(x)$, când x variază dela $-\infty$ la $+\infty$. E evident că $F(x)$ e o funcțiune continuă.

Pentru a face să se înțeleagă mai bine cele ce preced, se dă un model de tablou, în care ne ocupăm de intervalul α_r, α_{r+4} , iar distribuția semnelor câtimilor: $f_1, f_1 - M$, etc. e luată, pentru fixarea ideilor, cea din liniile respective ale tabloului. Valorile lui $F(x)$ corespunzătoare, sunt înscrise în ultima linie.

PROBLEMA 3088. Fie R raza cercului circumscris și d distanța OH dintre centrul cercului circumscris și ortocentrul unui triunghi ABC . Să se demonstreze că dacă avem:

$$2R \cos A = R \pm d,$$

triunghiul e isoscel sau dreptunghic.

AL. ȘCODRANO.

I. Soluție dată de D-nii: PETRE A. MIRESCU (Elev în cl. VIII, Liceul Gheorghe Lazăr, București), BOGDAN P. MARTINIAN și P. KATZ.

Relația din enunț ne dă prin ridicare la patrat

$$(1) \quad d^2 = 4R^2 \cos^2 A - 4R^2 \cos A + R^2.$$

Unghiul OAH fiind egal cu diferența unghiurilor B și C , în triunghiul OAH avem:

$$OH^2 = AO^2 + AH^2 - 2AO \cdot AH \cos (B-C).$$

Dar $AO = R$, $AH = 2R \cos A$ și $OH = d$, deci:

$$(2) \quad d^2 = R^2 + 4R^2 \cos^2 A - 4R^2 \cos A \cos (B-C).$$

Comparând pe (1) cu (2), obținem imediat relația :

$$(3) \quad \cos A [1 - \cos (B-C)] = 0,$$

care se descompune în următoarele două :

$$\cos A = 0, \quad \therefore A = 90^\circ, \quad \text{triunghi dreptunghic};$$

$$\cos (B-C) = 1, \quad \therefore B = C, \quad \text{» isoscel}.$$

D-nii MIHAIL I. STAMATIU, DUMITRU M. TEODORESCU, MIRCEA I. ADAM, C. BERDAN, LEON WEISS, GH. GH. MIHOC, SOLOMON WEISS, MARIN ȘTEFAN ȘT. FL. LĂZĂRESCU, LAURENȚIU L. VLAȚIU, EMIL ȘTEFĂNESCU, M. I. FOCȘENEANU și VIRGIL COȘNIȚĂ, au dat o foarte bună soluție analoagă cu precedenta, servindu-se de cunoscuta formulă

$$d^2 = R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C),$$

cu ajutorul căreia au ajuns la relația (3).

II. Soluție dată de D-nii: B. M. BARBĂLATT, N. P. ARCADIAN, ILIE IONESCU-BREZUICA, ADRIAN A. BUȘILĂ, OVIDIU G. POPEA, ȘTEFAN EPURE, VIRGIL GHÎTESCU, C. D. MIHĂESCU, PAUL I. IONESCU, EMILIAN I. POPP, TRAIAN N. ANGELESCU, ȘT. FL. LĂZĂRESCU, M. I. FOCȘENEANU, ROMEO MIHĂILESCU, MIRCEA ADAM, TRAIAN I. UDRISKY.

Se știe că avem $AH = 2R \cos A$. Relația din enunț se poate deci scrie

$$AH = OA \pm OH,$$

care ne arată că punctele A, O, H sunt colineare sau că două din ele coincid.

Dacă A, O, H sunt colineare, se demonstrează ușor că triunghiul ABC este isoscel.

Punctul O nu poate coincide cu A. Trebuie deci ca H să coincidă sau cu A, sau cu O. În primul caz, triunghiul ABC e dreptunghic, iar în al doilea caz, e echilateral.

Notă. În prima soluție, s'a găsit că triunghiurile care corespund problemei sunt cel isoscel și cel dreptunghic. Cum însă triunghiul echilateral este un caz particular al celui isoscel (când $AO = AH$), cele două soluții sunt concordante.

Dreptele AO și AH sunt isogonale, iar $\sphericalangle OAH = \pm (B-C)$. Deci, dacă punctele A, O, H sunt colineare, unghiul OAH este nul și deducem imediat că trebuie să avem $\sphericalangle B = \sphericalangle C$.

(V. C.).

PROBLEMA 3105. *Se dă un cerc fix cu centrul O și altul variabil cu centrul pe cercul O și trecând printr'un punct fix P. Care este locul geometric al intersecției liniei centrelor, cu coarda comună?*

I. IONESCU.

Soluție geometrică dată de D-I MICU GRÜNBAUM (Lc. Bârlad).

Fie O_1 centrul cercului trecând prin P și MN coarda comună. Fie P_1 proiecția lui P pe linia centrelor O_1OO_1 și I intersecția acesteia cu MN. Triunghiul O_1PO ne dă:

$$OP^2 = O_1O^2 + O_1P^2 - 2 O_1O \times O_1P_1. \quad (1)$$

Triunghiul dreptunghic O_1MO_1 , în care $O_1M = O_1P$, ne dă:

$$O_1M^2 = O_1P^2 = O_1O' \times O_1I = 2 O_1O \times O_1I. \quad (2)$$

Adunând aceste relațiuni, scoatem:

$$OP^2 = O_1O^2 - 2 O_1O \times (O_1P_1 - O_1I) = O_1O^2 - 2 O_1O \times P_1I.$$

Aci OP este constantă, căci O și P sunt fixe; O_1O este raza cercului dat; deci P_1I este constantă. Dar P_1I măsoară depărtarea lui P la coarda MN. Prin urmare, când O_1 se mișcă pe cercul O, raza $O_1M = O_1N$, fiind constantă și egală cu OO_1 , coarda MN rămâne constantă și înfășoară deci un cerc, cu centrul în P și cu raza $(O_1O^2 - OP^2)/2O_1O$. Deci I este locul proiecțiunilor unui punct fix O pe o tangentă MN la un cerc fix cu centrul P. Locul căutat este deci un *melc* al lui PASCAL.

Soluție analitică dată de D-nii: I. COȘEREANU (Timișoara); I. GOLDSTEIN (Bârlad); G. BASACOV, M. FOȘENEANU, B. BARBĂLATT.

Luăm ca axe de coordonate două perpendiculare trecând prin O. Fie a, b coordonatele lui P. Ecuațiile cercurilor O, O' , a dreptei OO' și a coardei comune sunt:

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = a^2 + b^2 - 2\alpha a - 2\beta b \quad (2) \text{ cu } \alpha^2 + \beta^2 = r^2. \quad (3)$$

$$\alpha y = \beta x, \quad (4)$$

$$2\alpha x + 2\beta y + a^2 + b^2 - r^2 = 2\alpha a + 2\beta b. \quad (5)$$

Din (3) și (4), scoatem :

$$\alpha = \frac{rx}{\sqrt{r^2+x^2}}, \quad \beta = \frac{ry}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Introducând în (5), găsim :

$$(r^2-a^2-b^2)\sqrt{x^2+y^2}=2r(x^2+y^2-ax-by),$$

$$\therefore (x^2+y^2-ax-by)^2 = \left(\frac{r^2-a^2-b^2}{2r}\right)^2 (x^2+y^2),$$

care reprezintă un *melc al lui PASCAL*.

Dacă $r^2=a^2+b^2$, adică P este pe cercul O, atunci ecuația se reduce la :

$$x^2+y^2-ax-by=0,$$

adică locul devine un *cerc*, care trece prin P și al cărui centru este la mijlocul lui OP.

Au studiat numai cazul când P este pe cercul O, D-nii : I. VASILIU, I. GEORGESCU VAL. I. HIRSCH. M. DAVIDSOHN, I. IONESCU-BREZUICA, M. GHELBER, A. ENE.

Generalizare de D-I B. BARBĂLATT. Se dă un cerc O și un punct P fix în planul cercului O. Un cerc variabil O', se mișcă astfel ca punctul fix P să aibă putere constantă în raport cu el și centrul său să descrie un cerc concentric cu O. Intersecția axului radical al cercurilor O,O', cu linia centrelor OO', descrie un *melc al lui Pascal*.

Deasemenea un melc al lui PASCAL descrie proiecția oricărui punct fix P₁ în raport cu axul radical al cercurilor O și O'.

PROBLEMA 3124. *Să se demonstreze că raza unui cerc este medie geometrică între laturile dodecagoanelor regulate înscrise în cerc, convex și stelat.*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-nii : G. SIMIONESCU (Lc. Mănăstirea Dealului); S. KATZ (Lc. Botoșani); D. M. TEODORESCU (Lc. Mihai).

Viteazul, București); I. GOLDSTEIN (Bârlad); V. GABRIELESCU (Lc. Brăila); D. ZAGHER, F. MARCU, N. ARCADIAN, M. ADAM, T. ANGELESCU, G. PĂTRAȘCU, B. REINHORN.

Fie $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8 A_9 A_{10} A_{11} A_{12}$ dodecagonul regulat convex, înscris în cercul cu raza OA_1 . Cum dintre numerele inferioare lui 12, numai 5 și 7 sunt prime cu 12, iar $7 + 5 = 12$, reese că avem numai un dodecagon regulat stelat cu latura $A_1 A_6$. Dreapta $A_1 A_7$ este un diametru, iar coarda $A_6 A_8$ este latura exagonului regulat înscris în cerc, egală cu raza OA_1 . Fie I intersecția dreptelor $A_1 A_7$ și $A_6 A_8$. Coarda $A_6 A_7$ este una din laturile dodecagonului regulat convex.

Triunghiul $A_1 A_6 A_7$ fiind dreptunghic în A_6 și $A_1 A_7$ perpendiculară pe $A_6 A_8$ în mijlocul ei, căci raza OA_7 este dusă la mijlocul arcului $A_6 A_8$, avem:

$$A_1 A_6 / A_6 I = A_1 A_7 / A_6 A_7, \therefore \overline{A_1 A_6} \times \overline{A_6 A_7} = \overline{A_6 I} \times \overline{A_1 A_7}.$$

Dacă R este raza cercului, atunci $A_6 I = \frac{1}{2} A_6 A_8 = \frac{1}{2} R$; $A_1 A_7 = 2R$ și avem:

$$\overline{A_1 A_6} \times \overline{A_6 A_7} = R^2. \quad \text{c. c. e. d. d.}$$

Soluția dată de D-nii: G. SIMIONESCU, I. VASILIU, E. I. POPP, P. I. IONESCU, G. HUZUNEANU (Lc. Mănăstirea Dealului); O. BOLGIU (Lc. Cantemir, București); A. TAUBER, S. KATZ, D. BLUMENFELD (Lc. Botoșani); S. LĂZĂRESCU (Lc. Giurgiu); V. GABRIELESCU (Lc. Brăila); I. COȘEREANU (Timișoara); D. M. TEODORESCU, C. CIORĂNESCU, B. REINHORN, L. VLATIU, G. D. IONESCU ZANE, N. G. BOTEZ, M. ADAM, T. ANGELESCU, M. BRĂTESCU, S. WEISS, G. PĂTRAȘCU.

Expresiunile laturilor celor două dodecagoane regulate înscrise în cerc sunt cunoscute și anume: $\frac{1}{2} R \sqrt{2} (\sqrt{3} - 1)$ și $\frac{1}{2} R \sqrt{2} (\sqrt{3} + 1)$. Produsul lor este R^2 .

Soluțiuni trigonometrice de Dnii: L. WEISS (Lc. Galați); E. PĂLĂRIERU (Lc. Spiru Haret, București), O. POPEA, P. KATZ.

Observațiuni. 1) Latura dodecagonului stelat este înădăitulu celeilalte (A. TAUBER).

2) Suma patratelor celor două latură este egală cu patratul diametrului (D. BLUMENFELD).

3) Raza mai este medie geometrică și între laturile decagoanelor regulate convex și stelat (D. BLUMENFELD, P. IONESCU, S. LĂZĂRESCU, I. VASILIU, D. M. TEODORESCU, G. PĂTRAȘCU).

4) Diferența dintre laturile decagoanelor regulate este raza cercului (D. BLUMENFELD).

5) Raza este medie geometrică între cele patru laturi ale celor patru poligoane regulate de 15 sau de 20 laturi (P. IONESCU, I. VASILIU, D. M. TEODORESCU).

6. În *Exercices de Trigonometrie* par F. J., se găsesc mai multe relații de acest fel (L. WEISS, D. TEODORESCU, I. VASILIU).

EXERCITII.

54. Care este cel mai mic număr de forma $1000 \dots 01$ divizibil cu 17?

ST. A. MIGLESCU.

R. Trebuie căutat n cel mai mic care face $10^n + 1 = M 17$. Dividem $1000 \dots$ prin 17 până eșe restul 16. Găsim 100000001.

55. Pentru ce valori ale lui m fracția $(7m^2 + 8m + 3)/18$ poate deveni un întreg?

E. ȘTEFĂNESCU.

R. Numărătorul trebuie să fie nepereche, deci $m = 2n + 1$ și fracția se reduce la $(14n^2 + 22n + 9)/9$. Trebuie ca $(5n^2 + 4n)$ să se dividă cu 9, sau $(10n^2 + 8n)$ să se dividă cu 9, ori $n(n - 1)$ să se dividă cu 9. Deci, $n = M 9$ sau $n = M 9 + 1$. Deci $m = M 18 + 1$, sau $m = M 18 + 3$.

56. Fie AB coarda de contact a 2 cercuri, cu centrele în O_1 și O_2 . Unind un punct mobil M de pe cercul O_1 cu A și B, dreptele MA și MB taie cercul O_2 în C și D. Se cere locul proiecției punctului O_1 pe CD.

M. FOCȘENEANU.

R. Unghiul AMB e constant, căci are ca măsură $\frac{1}{2}$ arcAB. Măsura lui față de cercul O_2 este $\frac{1}{2}(\text{arcAB} + \text{arcCD}) = k$ (const). Dar, arcAB e constant. Urmează că arcCD e și el constant, deci și coarda subîntinsă CD.

Prin urmare CD e tangentă mereu unui cerc cu centrul în O_2 . Locul proiecției punctului O_1 pe CD va fi deci un *melc al lui PASCAL*.

57. În triunghiul ABC, bara BC este fixă, iar unghiul A constant. Se duc înălțimile BB' și CC'. Să se demonstreze că dreapta B'C' este necentenit tangentă la un cerc fix.

EUGEN BALLAN.

R. Fie M mijlocul laturei BC. Patrulaterul BC'B'C este înscris în cercul descris pe BC ca diametru, iar coarda B'C' este de lungime constantă în acest cerc. În adevăr, $\sphericalangle BMB' = 180^\circ - 2B$, $\sphericalangle CMC' = 180^\circ - 2C$; deci unghiul la

centru $B'MC' = 180^\circ - 2A = \text{const.}$ Coarda $B'C'$ este deci tangentă unui cerc fix cu centrul M .

58. Pe latura AC a unui triunghi oarecare ABC , se ia un punct D prin care se duc paralele la AB și BC , care taie laturile considerate respectiv în F și E . Dacă P este un punct de pe BC astfel ca $PE^2 = PB \times PC$ și H intersecția dreptelor PA și DE , atunci avem $DE^2 = AF \times HD$.

CONSTANTIN I. GEORGESCU.

R. Relația dată ne dă $PB/PE = PE/PC$, iar HE fiind paralelă cu AP , avem

$$PB/PE = PA/PH = PE/PC,$$

deci AE e paralelă cu CH ; triunghiurile ADE , CDH sunt asemenea și nedau: $HD/DE = HC/AE$.

Apoi: $AF/FB = AF/DE = AD/DC = AE/HC$, etc.

59. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}} + \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2}{i\sqrt{3}}.$$

VIRGIL COȘNIȚĂ.

R. Eliminând numitorii, făcând reducerile și ridicând apoi la patrat, se găsește $x = 0$, $x = \frac{1}{4}$, ultima fiind admisibilă.

PROBLEME PROPUSE

3141. *Legea Statutului Funcționarilor* prevede ca sărbători, în afară de Duminici: 6, 7, 8, 9, 14, 19, 20 Ianuarie; 6, 15 Februarie; cinci zile la Paște; 7 Aprilie; 6, 23 Mai; Înălțarea; Sft. Treime două zile; 3 Iunie; 12 Iulie; 28 August; 21 și 27 Septembrie; 8, 21 Noembrie; 19 Decembrie. Care este numărul maximum și minimum de sărbători anuale?

I. IONESCU.

3142. Să se găsiască numerele de forma $2^n + 1$, care se pot scrie $aa\,bb\,cc\,aa$.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

3143. Se cer patratele de patru cifre, la care prima cifră este suma celorlalte cifre.

C. D. MIHĂESCU.

3144. Fie E centrul unui cerc (C) ce trece prin două puncte fixe A și B. Polara unui punct fix P, în raport cu cercul (C), taie dreapta EP în M. Să se arate că perpendiculara pe mijlocul dreptei MP taie pe AB într'un punct fix, când cercul (C) variază.

N. ABRAMESCU.

3145. Un cerc O', de rază constantă, se rostogolește pe o dreaptă fixă Δ. Știind că O este centrul unui cerc fix, se cere să se găsiască: 1) locul geometric al proiecției lui O pe axa radicală a cercurilor O și O'; 2) locul polurilor acestei axe față de fiecare din cele două cercuri; 3) locul centrelor de asemănare a celor două cercuri și 4) învelitoarea axei lor radicale.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

3146. În triunghiul ABC, latura BC e fixă, iar unghiul A constant. Se cere locul ortopolului unei drepte fixe Δ, în raport cu triunghiul ABC.

M. GHERMĂNESCU.

3147. Să se stabiliască identitatea:

$$4 \begin{vmatrix} \alpha & c & b \\ c & \beta & a \\ b & a & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta + \gamma + 2a & \gamma & \beta \\ \gamma & \alpha + \gamma + 2b & \alpha \\ \beta & \alpha & \alpha + \beta + 2c \end{vmatrix},$$

dacă:

$$a + b + c = 0.$$

Avem de asemenea:

$$4 \begin{vmatrix} \alpha & c & b \\ c & \beta & a \\ b & a & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta + \gamma - 2a & -\gamma & \beta \\ -\gamma & \alpha + \gamma + 2b & -\alpha \\ \beta & -\alpha & \alpha + \beta - 2c \end{vmatrix}.$$

ALEX. GUȚU.

3148. Să se demonstreze identitatea :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p n^p (n+2)^p} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p (n+1)^{2p}}.$$

După aceea, să se rezolve ecuația :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p (x+1)^{2p}} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{p (x+1)^p} + a = 0.$$

Câte soluții reale avem în general ? Problema e totdeauna posibilă ?

P. SERGESCU.

3149. Să se studieze natura seriei, al cărui termen general este :

$$U_n = \frac{(k_1 + k_2) (2k_1 + k_2) \dots (nk_1 + k_2)}{(k_1 + k_2 + 1) (2k_1 + k_2 + 1) \dots (nk_1 + k_2 + 1)}$$

și să se însumeze în cazul particular

$$k_1 = \frac{1}{2};$$

k_1 și k_2 sunt două constante reale.

CONST. E. GEORGESCU.

3150. Intr'un plan vertical, se dă :

Punctele ABCE așezate în ordine pe o dreaptă orizontală ; o bară AB, omogenă, de greutate pe P, liberă în A, articulată în B ; o bară CD, de greutate Q, articulată în C, liberă în D, unde este fixat și un scripete. Un fir flexibil, inextensibil, fără greutate, AD, este legat în A de bara AB, iar capătul D trece pe după scripete dealungul barei CD ; în C firul este trecut după un trolu. Un fir flexibil, inextensibil, fără greutate, DE, este fixat în D de bara CD și ancorat în E. Cu ajutorul troluului din C bara AB este ridicată în pozițiune verticală.

Să se găsiască, pentru o pozițiune oblică a barei AB, tensiunile în firele AD, DE, compresiunea în bare, reacțiunea în B.

CR. MATEESCU.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (2849, 3067, 80, 97, 111, 16, 19, 23, 37, 39, N, P); Angelescu Traian (3119, 20, 23, 37, 39, E, N); Arcadian N. (3101, 11, 37, 39, E); Ballan E. (2898); Barbălăti M. B. (3115, 25, N, P); Bercowitz E. (3080, 97, 123); Berdan C. (3116); Blaha N. (P); Bleiweiss I. P. (3097, 117, 19, 23); Blumenfeld D. (3123, 37, 39); Bogdan G. (3059, 97, 137, 39); Bolgiu Ovidiu (3097, 119, 23); Botea N. (3101, 19, 23); Brătescu Danubiu M. (3077, 119, 37, 39); Brüll Leon (3059, 47, 97, 119, 23); Bușilă Adrian (3120, P); Cădere Radu (3097, 117, 20, 37); Ciorănescu I. C. (3064, 123, 37, 39, E); Coșereanu I. (3101, 23); Coșniță V. (3101, 37, 39); Cristea I. (3119); David Gh. (3101, P, R); Dumitrescu Marin (3123, 37, 39); Epure Ștefan (3097, 115, 16, 37, 39); Focșeneanu I. M. (2841, 3120, 39, P); Georgescu I. C. (3115, 17); Gheller M. (3123); Goldstein I. (3101, 20, 23, P); Grofșoreanu I. G. (3123, 37, 39); Gulian E. (3067); Huzuncanu Gh. (3137, 39); Ianculescu Octavian (3137); Ionescu-Brezuica Ilie (3123, 37, 39, N, P); Ionescu Corneliu (E); Ionescu Paul (3123, 37, 39); Ionescu-Zane Gh. (3097, 101, 17, 19, P); Katz P. (2922, 3047, 59, 67, 77, 97, 101, 16, 17, 20, 23); Katz S. (3123, 37, 39); Lăzărescu S. (3101); Marcus Froim (3101, 37, 39); Martinian Bogdan (3116, 19, 20); Mendelsohn M. (3117, 37, 39); Mihăilescu Romeo (3101, 16, 20); Mihoc G. (3101); Miu I. (R); Niculescu S. D. (3097, 117, 19, 23); Oprescu I. G. (3137); Pălărieru E. (3101, 17, 23, 37, 39); Panătescu G. A. (2922, 3097, 119, 20, E); Pătrașcu G. (N, R); Popeea O. (3111, 37, 39, N, P); Popescu N. C. (3123); Popescu M. I. (3101); Popovici I. (R); Popoviciu T. (3132); Popp Emilian (3137, 39); Rabinovici F. (3101, 23); Rabinovici S. (3117); Rădulescu T. (3123); Reinhorn B. (3059, 97, 117, 19, 23); Ringler I. S. (3097, 120, 37, 39); Rüssu Edgar (3059, 117, 19, 20, 37, 39); Samoilă D. (3137, 39); Schönfeld H. C. (3067, 97, 117, 37); Segărceanu N. (3059, 117, 23, R); Sergheiev A. I. (3119, R); Simionescu D. G. (3101, 20, 23, 37, 39); Simionescu I. M. (3097, 117, 20, 37, 39); Solomon I. Danilo (3123, 37, E); Spacu P. (3097, 119); Stamatiu M. (3123); Stănculescu G. (3097, 116, 23); Stănculescu I. C. (3117, N); Ștefan M. (3117); Ștefănescu E. (3059, 116, 23, P); Șușeșcu I. (3123); Țântăreanu P. (3123); Tulea G. (R); Udrisky Traian (3084, 85, 116, 17, 19, 20); Vârlan V. (3117); Vasiliu I. (3123); Vlațiu Laurențiu (3097, 116, 19, 20, 37, 39); Weiss L. (3123, N, R); Weiss S. (2974, 3120, 37); Zagher D. (3137, 39, E).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2031, 108, 16, 318, 29, 54, 77, 81, 96, 428, 91, 575, 640, 43, 51, 82, 835, 38, 56, 61, 64, 72, 79, 91, 95, 902, 29, 46, 69, 71, 72, 78, 91, 93, 96, 3013, 19, 34, 43, 48, 53, 62, 63, 71, 72, 83, 84, 85, 86, 87, 91, 92, 93, 96, 102, 04, 09, 13, 18, 22, 26, 28, 30, 35 și 38 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

28 VOLUME

Colecțiunea întreagă Lei 1500,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 70 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI și XXV, care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie*. (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

2. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. N. Abramescu, *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăugită*, 1921. (Epuizată).

4. A. G. Ioachimescu și G. Țițeica, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. Tr. Lalescu, *Tratat de Geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăugită*, 1923 Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice Lei 20,—

7. Gh. Lazăr, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) Lei 5,—

8. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăugită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme Lei 60,—

9. G. Enj. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, *Vocabular Matematic* Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăoga taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul*. Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele, numerice practice, pentru proiectarea construcțiilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septembrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimite D-lui: I. D. Teodor, Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București.



*Max Asociația pentru cultura și
literatură poporului român
în*

Sibiu

GAZETA MATEMATICĂ

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXIX.

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1924

SUMARUL

1. Elemente a calcului practic I. Ionescu.
2. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului
de matematici aplicate la științele militare pe
intervalul 1 septembrie 1922 — 1 august 1923.
3. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului
„Inginer H. Capriel“ pe intervalul 1922—23.
4. Note Matematice: 45—51.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Probleme rezolvate: 2613, 3008, 3010, 3023, 3064, 3066, 3116,
3119.
8. Exercițiul: 60—67.
9. Probleme propuse: 3151—3160.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET

1924

SPRE ȘTIINȚA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică”** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXIX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politehnică din București, **Tr. Lalescu**, Doctor în Matematici, Profesor Universitar și **I. D. Teodor**, Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Școala Politehnică, Directorul General al Reșiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice” se vor trimite D-lui GEORGE BORNEANU, Inginer, Directorul Fabricilor de chibrituri și timbre, București.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor redița în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela D-l Cassier *I. D. Teodor*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poștă.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evita confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

În vederea sporirii taxelor poștale, corespondenții pot trimite de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsa spații albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecință.

Nu se admite însă a se trata pe aceeași foale mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ”, trebuie să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 56, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 53, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 16, 26, 36, 47, 53, 56, 61, 95, 3005, 08, 13, 19, 42, 45, 55, 60, 69, 75, 89, 90, 95, 96, 100, 07, 09, 10, 12, 14, 21, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 38, 40, 41, 42, 44, 45, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60.

ELEMENTE A CALCULUI PRACTIC.

PARTEA ÎNȚĂIU.

Probleme în numere deslegate prin algebră.

Acesta este titlul unui manuscris de probleme de algebră, care se găsește în Biblioteca Seminarului Veniamin din Iași, și de care a vorbit D-l C. CLIMESCU la pag. 193 a Anului XXII al acestei reviste. În timpul războiului, stând câtvă timp la Iași, am văzut acest manuscris interesant, și am crezut folositor a spune aci ceva despre dânsul.

Manuscrisul este scris cu litere cirilice și are 84 de pagini, conținând probleme numerice de gradul I și II. Literile care intră în ecuații sunt scrise cu litere latine. Hârtia pe care este scris poartă în filigramă anii 1827 și 1828 și No. 2 ORLAT. Prin urmare, el a fost scris cam pe acele vremuri sau cu un an, doi, în urmă.

Autorul manuscrisului a adunat problemele sale din manuscrise englezești mai mult, de oarece în probleme găsim, în afară de unități moldovenești, ca *lei, parale, coturi, vedre, oca, dimirlui*, numai unități engleze ca *livra, soldii, guinii, miluri*, și nici o altă măsură streină. Ca nume de localități streine prin probleme, nu găsim de cât de prin Englitera, ca *London, Greenviș*. În fine, enunțul problemei 50 arată că el a fost conceput de către un englez, căci pentru el un rachiu care nu este englezesc este strein. Iată acel enunț:

«*Un spirtariu propune de a amesteca rachiu strein de câte 1 liv. 4 sol. cu rachiu englezesc de câte 9 sol. oka, în acest chip de proporție cât să poată câștiga 30 livre la suma vânzării, amestecătura câte 1 liv. 7 sol. Se cere a se ști ce sumă de oka să puie din fieștecare feliu de rachiu*»

Cu toate acestea, găsim urme ale influenței franceze în expresiuni și cuvinte, ca *ecsperiența, fermagiu, ipotезului, respectivicește, etc.* precum și romanizarea unor cuvinte, făcute de alți autori mai înainte, ca *innaintepășitoriu și următoriu* în loc de *antecedent și consecuent* la proporții, *mijlocitele și mărginitele* în loc de *medii și extremii*; *potriviri* în loc de *ecuații, etc.* Se mai găsesc, pe aci pe colo, și cuvinte scăpate dela vechea influență greacă a fanarioților, ca *analoghie* în loc de *proporție, etc.*

Autorul nu și-a prea dat osteneala ca să adapteze la țara

noastră enunțurile problemelor; a schimbat însă, pe ici pe colo, unitățile streine cu unități moldovenești, fără însă a le calcula echivalența; la altele, a lăsat unitățile de valori și a înlocuit pe cele de alte mărimi; unele localități streine au fost înlocuite cu orașe din Moldova, ca Eși, Focșani, Bârlad, fără a se schimba distanțele, așa că dela Eși la Bârlad ar fi numai 17 miluri!.

Problemele sunt gradate ca dificultate de rezolvare și au câte o soluție, rar două, fiind mai dezvoltate la început și din ce în ce mai sumare spre sfârșitul manuscrisului. Alegerea necunoscutelor se face cu multă dibăcie, fie pentru a înlezni rezolvarea, fie pentru a reduce numărul ecuațiilor necesare, fie pentru a se scobori gradul ecuațiilor. Problemele sunt, sau *pur numerice*, cerându-se a se găsi numere care să îndeplinească anumite condițiuni; sau de *natură practică*, cum se găsesc și astăzi prin culegeri analoage, ca împărțiri de averi și câștiguri, probleme de curieri, de amestecături, de loterii, de jocuri de cărți, de pierderi în bătălii, de etăți, de umplere de buți, de preparate industriale, de plăți de *sineturi* (polițe); sau probleme *artificiale*, în care enunțul are numai o înbrăcămintă practică, dar care nu se pot ivi în practică sub acele forme. Lipsesc probleme *algebrice*, adică cu datele în litere, deși în rezolvarea problemelor se dă uneori soluția generală algebrică și se deduce soluția particulară prin înlocuirea literilor cu numere. Lipsesc însă soluții cu discuții, probleme nedeterminate și imposibile, iar la ecuații de gradul al doilea se dă totdeauna numai o soluție, ca și cum nu ar exista nici odată o a doua, și nu există nici un exemplu care să conducă la imposibilitate, adică la rădăcini imaginare. Există însă exemple de rădăcini iraționale. Ecuațiile de gradul al doilea se rezolvă prin completarea patratului și scoaterea numai a rădăcinii pozitive.

Mărimile cunoscute se însemnează cu a, b, c, d , iar necunoscutele cu x, y, z, u . În expresiunile algebrice, nu se întrebuință paranteze, de și ele se văd prin text. În unele cazuri un exponent pus la urma unui termen se referă la tot termenul, așa că $16x^2$ este de fapt $256x^2$ iar $2x^3$ este de fapt $8x^3$. Pentru binoame se pune o liniuță pe deasupra lor, așa că $a+x \times a-x$ înseamnă $(a+x)(a-x)$, iar $x-y^3$ înseamnă $(x-y)^3$. Radicalele sunt însemnate prin $\sqrt{\quad}$ pus la început numai, ca de exemplu $\sqrt{a-x}$ și $\sqrt{900}$. La fracțiile zecimale, se întrebuințează virgula.

Soluțiile găsite nu sunt nici odată verificate.

Primele 50 de probleme sunt de gradul I cu o necunoscută; cele 10 următoare cu două sau mai multe necunoscute, iar restul de gradul II. La finele manuscrisului, mai sunt și alte probleme simple scrise mai neglijent de o altă mână, dându-se la unele din ele soluțiuni, la altele numai răspunsuri și la unele și verificări. Printre acestea, este și o problemă nedeterminată fără soluție, luată de la noi din popor, și anume:

«Cu 20 parale s'au cumpărat 20 de ouă și ereau de găscă, de rață și de găină. Cele de găscă s'au cumpărat cu 3 parale oul; cele de rață câte 2 parale oul și cele de găină câte 30 ouă la o para».

Ca exemple de probleme și de rezolvarea lor, dăm următoarele: Prima problemă este următoarea.

A afla numărul, la îndoitul căruia adăogând 16, soma să fie 188.

Deslegare. Când x arată numărul cerut, $2x$ arată îndoitul acestui număr, și așa după condiția problemei $2x + 16 = 188$, și stămutând avem $2x = 188 - 16 = 172$, apoi împărțind avem $x = 172/2 = 86$.

Ca reducere a numărului necunoscutelor, reproducem problema 7:

A afla două numere a căror deosăbire să fie 7 și soma să fie 33.

Deslegare. Fiind x cel mai mic număr, $x + 7$ va fi cel mai mare și $2x + 7 = 33$, deci $2x = 33 - 7 = 26$ și $x = 26/2 = 13$ care este cel mai mic și $x + 7 = 20$ este cel mai mare.

Ca exemplu de artificii la alegerea necunoscutelor, dăm problema 21:

A afla două numere în analoghie de 1 la 2, încât ca 12 fiind adăogăt la fiștecare, somile să fie în analoghie de 5 la 4.

Deslegare. Fiind x cel mai mic număr, $2x$ va fi cel mai mare, și așa $x + 12 : 2x + 12 :: 5 : 7$ prin condiție, și $2x + 12 \times 5 = x + 12 \times 7$, adică $10x + 60 = 7x + 84$, de unde se scoate $3x = 24$ și $x = 8$. Deci cele două numere cerute sunt 8 și 16.

Aci a uitat să pună linii drepte peste $(2x + 12)$ și $(x + 12)$.

Ca exemplu de reducerea gradului prin o bună alegere a necunoscutelor, avem problema:

A afla două numere în proporție de 9 la 7 încât ca pătratul somilor și cubul diferenței lor să fie de o potrivă.

Deslegare. Dacă $9x$ este cel mai mare număr și $7x$ va fi cel mai mic, și $16x^2 = 2x^3$ prin condiția a doua, adică $256x^2 = 8x^3$, și așa $x = 256/8 = 32$. Deci cele două numere cerute sunt 288 și 284.

La unele probleme, datele sunt alese cu oarecare îngrijire iar nu oricum, spre a se obține probleme mai estetice. Iată enunțurile problemelor 33, 44, 45:

A împărți 100 în două părți încât ca deosăbirea patratelor lor să fie 10000.

A împărți pe 36 în trei părți, încât ca jumătatea celei dintâi, a treia parte a celei de a doua și a patra parte a celei de treia să fie de o potrivă între dăsele.

A se împărți numărul 50 în patru părți, încât ca cea dintâi adăogată cu 5, a doua micșorată cu 4, a treia înmulțită cu 3 și a patra împărțită cu 2 să dea desăvârșit acelaș eșit în toate întâmplările.

Ca exemplu de problemă cu două necunoscute, dăm următoarea:

A afla două numere în proporție de 4 la 5, din care fiind trase alte două care să fie în proporție de 6 la 7 respectivicește (înaintepășitori din înaintepășitori și următori din următori) rămășițele să fie de 2 la 3, soma acestor două rămășițe să fie deopotrivă cu 20.

Deslegare. Fie $4x$ și $5x$ cele două numere dintâi și $6x$ și $7y$ cele două depe urmă, atunci $4x - 6y : 5x - 7y :: 2 : 3$, și $4x - 6y + 5x - 7y$ sau $9x - 13y = 20$ după condiți; înmulțind mărginiți și mijlociți proporții să va avea $12x - 18y = 10x - 14y$, sau $6x - 9y = 5x - 7y$ și $x = 2y$ care substituindu-să în cealaltă potrivire va da $18y - 13y = 20$ și așa $y = 20/5 = 4$ și $x = 2y = 8$. Deci cele două numere dintâi sunt 32 și 40 și cele de al doilea 24 și 28.

Ca exemplu de problemă cu soluție literală, dăm următoarea:

A afla trei numere acest fel ca cel întâiu și cu jumătatea celorlalte două, cel de al doilea și cu a treia din celelalte două și cel deal treile mai mult a patra din celelalte să fie toate deopotrivă cu 51.

Deslegare. Fie $a = 51$, și x, y, z cele trei numere căutate, atunci după spunerea teoremei avem $x + \frac{y+z}{2} = a$, $y + \frac{x+z}{3} = a$,

$z + \frac{x+y}{4} = a$, care scoțându-se din frânger, avem $2x + y + z = 2a$,
 $3y + x + z = 3a$, $4z + x + y = 4a$ și substrăgând pe a două
 din treia și pe întâia din înădăitul celei de al doilea rămășițele vor
 fi $-2y + 3z = a$ și $5y + z = 4a$, scăzând pe cea dintâi din
 întreitul cestielette, să va avea $14y = 11a$. Deci $y = 11a/14 = 33$,
 $z = 4a - 5y = 13a/14 = 39$ și $x = 3a - 3y - z = 5a/14 = 15$.

Prima problemă de gradul al doilea este următoarea :

A afla un număr a căruia rădăcină pătrată să fie la rădăcina cubă în raport de 5 la 2.

Deslegare. Fie x^6 numărul cerut, x^3 va fi rădăcina pătrată și x^2 rădăcina cubă ; acum prin spusele problemei $x^3 : x^2 :: 5 : 2$, deci $2x^3 = 5x^2$, sau $2x = 5$ și $x = 5/2 = 2,5$, așa dară $x^6 = 244,140625$ care este numărul căutat.

Prin artificio întrebuințat rezolvarea s'a redus la gradul întâiu.

Ca exemplu de ecuațiune având rădăcini iraționale, dăm următoarea :

A afla două numere acărora productul să fie de o potrivă pătratului diferenții lor.

Pentru rezolvare se ia ca necunoscută raportul x a celor două numere și se găsește $x = (3 + \sqrt{5})/2 = 2,618...$

Din cele ce preced, se poate vedeă ce fel de algebră, și ce fel de aplicație se făceă la dânsa, în Iași, acum vreo sută de ani.

I. IONESCU.

RAPORTUL COMISIUNEI

PENTRU

acordarea premiului de matematici aplicate la științele militare, pe intervalul 1 Septemvrie 1922 — 1 August 1923.

Subsemnații, formând comisiunea pentru acordarea premiului de matematici aplicate la științele militare, pe intervalul 1 Septemvrie 1922 — 1 August 1923 inclusiv, am constatat următoarele :

Din publicațiunile, tipărite sau litografiate, apărute în cursul acestui an, și de care am putut lua cunoștință, am găsit că aceea care răspunde cel mai apropiat condițiilor prescrise de regulamentul

publicat în «*Gazeta Matematică*» vol. XXIII pag. 10, este *Cursul de Tragerile Artileriei* de LOCOT.-COL. A. GHEORGHIȘ, curs litografiat la Școala Specială a Artileriei, în primăvara anului 1923.

Acest curs este conținutul dezvoltat al lecțiunilor de Tragerile Artileriei, predate în mai mulți ani de d-l LOCOT.-COL. A. GHEORGHIȘ la numita școală. În cursul acesta, se face o largă aplicare a matematicelor elementare, în special Geometria, Trigonometria și Calculul Probabilităților, la rezolvarea problemelor ce se întâlnesc pe câmpul de trageri.

Toate aceste considerațiuni ne îndreptătesc să propunem ca premiul «GENERAL SC. PANAITESCU», pe anul 1922—1923, să fie acordat d-lui LOCOT.-COL. A. GHEORGHIȘ, fost corespondent al «*Gazetei Matematice*» și actualmente comandant al Divizionului II de Munte, Codlea, lângă Brașov.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU,
INGINER N. GEORGESCU, INGINER-ȘEF C. D. ORĂȘANU.

Acest raport s'a citit și aprobat în adunarea extraordinară din 30 Ianuarie 1924.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII
I. D. TEODOR, TR. LALESCU.

RAPORTUL COMISIUNEI PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „INGINER H. CAPRIEL” PE INTERVALUL 1922—23.

Subiectul propus a fost: *O paralelă între metodele și rezultatele ce se obțin în Rezistența Materialelor și în Electrotehnică.* Pornind dela constatarea că în diferite chestiuni de Electricitate și Electrotehnică, se găsesc teoreme și formule absolut analoage cu acelea din Mecanica rațională și Rezistența Materialelor, s'a cerut:

1. — Să se aprofundeze aceste analogii, căutând substratul lor comun.

2. — Să se cerceteze, dacă aplicarea diferitelor metode proprii uneia din cele două științe, la cealaltă nu ar conduce la rezultate noi.

Comisiunea a primit spre examinare o singură lucrare, a Domnului TUDOR TĂNĂSCU, elev în anul IV-lea la Școala Politehnică din București.

Lucrarea D-sale se împarte în 3 părți: Prima, cuprinde considerațiuni principiale, în care D-sa arată că dacă aplicăm în Electricitate principiul *conservării energiei* și principiul *suprapunerii efectelor*, care stau la baza Rezistenței Materialelor, se obțin cele două legi fundamentale ale lui KIRCHOFF; prima, relativă la suma curenților cari intră sau ies dintr'un nod sau dintr'o secțiune a unei rețele electrice, corespunde cu *teorema forțelor tăetoare*, iar a doua lege a lui KIRCHOFF, dedusă din legea lui OHM, corespunde cu *legea lui HOOKE*.

D-nul T. TĂNĂSCU, stabilește apoi corespondența dintre forță și intensitate de curent, deplasare elastică și cădere de tensiune, între grinzi și conductorii electrice. În partea doua a lucrării, D-sa studiază analogiile dintre barele încărcate axial și conductorii electrice alimentați la un capăt și distribuind o sarcină la celalt capăt, între barele ramificate și conductorii ramificați, între barele articulate la două extremități și conductorii alimentați la ambele capete, etc.

În ultima parte a lucrării, D-nul TĂNĂSCU studiază analogia între metodele celor 2 științe, cu aplicațiune la rețelele electrice și sistemele de grinzi cu zăbrele.

Lucrarea D-lui T. TĂNĂSCU dovedește că autorul a studiat în mod serios și cu multă conștiințiozitate subiectul propus și a reușit adeseaori să obțină rezultate interesante.

Comisiunea apreciind meritele lucrării Domnului T. TĂNĂSCU, propune în unanimitate premiarea și publicarea ei în «Gazeta Matematică».

GHI. EM. FILIPESCU, ERNEST ABASON.

Acest raport s'a citit și aprobat în adunarea extraordinară din 30 Ianuarie 1924.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII

I. D. TEODOR, TR. LALESCU.

NOTE MATEMATICE.

45. *O generalizare a șirului lui FIBONACCI.* Fie șirul :

$$p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$$

în care :

$$p_0 = 1, p_1 = p, \dots \quad p_n = pp_{n-1} + qp_{n-2}.$$

Se poate stabili ca și pentru șirul lui FIBONACCI, relațiunea :

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 4q^2}} (x^{n+1} - y^{n+1}),$$

în care x și y sunt rădăcinile ecuației

$$z^2 - pz - q = 0.$$

Se pot apoi demonstra următoarele relațiuni :

$$p_{n+s} = p_n p_s + q p_{n-1} p_{s-1},$$

$$(-q)^{s-1} p_{n-s} = p_{n-1} p_{s-1} - p_n p_{s-2},$$

$$p_{n+1} p_{n-1} - p_n^2 = -(-q)^n,$$

$$p_{n+s} p_{n-s} - p_n^2 = -(-q)^{n-s+1} u_{s-1},$$

u fiind termenul din șirul lui FIBONACCI.

Expresiunea termenilor de ordin negativ este dată de

$$p_{-n} = -\frac{p_{n-2}}{(-q)^{n-1}}.$$

I. B. FLORESCU.

46. *Calculul sumei puterilor a n^a a numerelor naturale.*

Plecând dela o identitate extrem de simplă, se poate calculă, din aproape în aproape, suma puterilor asemenea a numerelor întregi și pozitive.

În adevăr, avem identitatea evidentă :

$$n = \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Dacă se scrie aceasta, pentru valori succesive dela 1 la n și dacă se adună toate aceste egalități, se găsește :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2^2}{4} \\ 2 &= \frac{3^2}{4} - \frac{1^2}{4} \\ 3 &= \frac{4^2}{4} - \frac{2^2}{4} \\ &\dots \dots \dots \\ n-1 &= \frac{n^2}{4} - \frac{(n-2)^2}{4} \\ n &= \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2}{4} \\ 1 + 2 + \dots + n &= \frac{(n+1)^2 + n^2 - 1}{4} = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Din identitatea de mai sus, se deduce, prin operația inversă derivărei, identitatea :

$$n^2 = \frac{(n+1)^3}{6} - \frac{(n-1)^3}{6} - \frac{1}{3}.$$

Procedând ca mai sus, se găsește :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{(n+1)^3 + n^3 - 1}{6} - \frac{n}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Se deduc apoi, prin procedeul indicat mai sus, identitățile :

$$n^3 = \frac{(n+1)^4}{8} - \frac{(n-1)^4}{8} - n,$$

$$n^4 = \frac{(n+1)^5}{10} - \frac{(n-1)^5}{10} - \frac{10n^2 + 1}{5},$$

din care se deduce $\sum n^3$ și $\sum n^4$ și așa mai departe. Se poate calcula, din aproape în aproape, orice putere întreagă și pozitivă.

DOBRESCU-BĂBICI.

47. *Rezolvarea cuadraturei cercului de D-1* CHARLES NORDMANN.

Această problemă fiind una din celebrele chestiuni nerezol-

vate în matematici, credem că nu va fi fără folos a rezumă cum D-l CHARLES NORDMANN ¹⁾ a observat că această problemă este rezolvată în Natură și de către Natură.

Se știe că această problemă constă în a găsi latura pătratului echivalent cu un cerc de rază dată. Cum aria cercului este egală cu a unui triunghi dreptunghic, una din catete fiind raza, cealaltă catetă lungimea cercului, problema s'ar putea considera rezolvată dacă s'ar afla exact lungimea unui cerc de rază dată, sau, mai clar, raportul lungimei cercului către diametru (numărul π), ceea ce se știe că este imposibil de găsit în geometria clasică (euclidiană).

Dar geometria euclidiană, care se bazează pe postulatul lui EUCLIDE, că printr'un punct se duce numai o paralelă la o dreaptă dată, este numai una din geometriile posibile, ca, de ex., geometria rimaniană, care se bazează pe faptul că nu se poate duce nici o paralelă la o dreaptă dată.

Însă, în natură, o linie dreaptă, după definiția lui POINCARÉ, este drumul urmat de o rază luminoasă, mai clar; linia dreaptă este drumul parcurs de lumină într'un mediu omogen.

S'a crezut că geometria euclidiană este cea mai conformă lumii în care trăim. Nu se știa însă, faptul, descoperit de EINSTEIN, că lumina nu se propagă în linie dreaptă în spațiu și că este ușor deviată de gravitație (ceea ce s'a putut verifica cu ocazia recentelor eclipse totale de soare).

Rezultă deci, că în universul real, nu există două drepte situate în acelaș plan, care să nu se întâlnească nici o dată, căci două raze paralele sunt deviate și deviate neegal de gravitația astrelor și deci sfârșesc prin a se întâlni dacă rămân în acelaș plan (ceea ce este principala condiție de a fi paralele). Deci, universul real nu este euclidian, ci rimanian; faptul că lumina nu se propagă în linie dreaptă este proba.

Efectele maselor schimbând proprietățile spațiului, modifică raportul π al lungimei cercului către diametru, cum a fost definit în geometria clasică (unde spațiul este considerat liber de mase gravitante), astfel că acest raport va diferi mai mult sau mai puțin de valoarea clasică (cum e în geometria rimaniană). Așa fiind, greutatea are ca efect de a da numărului π o valoare mai mică decât

1) *Revue des deux Mondes*, 15 Fev. 1923, p. 924.

cea clasică. Deci, în univers, cercurile reale trase în jurul maselor de materie au, față de diametrul lor, o lungime mai mică decât în geometria euclidiană.

Prin urmare, raportul lungimei cercului către diametru fiind modificat în vecinătatea materiei, este clar că, deplasându-ne pe suprafața pământului și în raport cu soarele și luna, se modifică în mod real și continuu raportul lungimei cercului către diametru. Cuadratura cercului este rezolvată în Natură și de Natură, căci acest raport, care diferă puțin de valoarea sa euclidiană incomensurabilă, trece printr'o serie de valori reale comensurabile, ce au o comună măsură. Există deci, pe suprafața pământului, un mare număr de împrejurări de timp și loc, unde un observator, chiar armat cu instrumente perfecte și trăgând linii fără greșală, va putea rezolva cuadratura cercului cu linia și compasul.

N. A.

48. Teorema ortopolului.

1. Fie P un punct arbitrar pe latura BC a triunghiului ABC , b și c proiecțiile lui pe AC și AB . Fie AA' , BB' , CC' cele trei înălțimi care se întâlnesc în H . Din B' și C' , se duc perpendiculare pe AP , care intersectează pe AA' în β și γ . Dreapta $b\beta$ este perpendiculară pe AB , iar $c\gamma$ pe AC .

Pentru a demonstra aceasta, se observă că patrulaterul $AcPA'$ este inscriptibil și deci se deduce că :

$$\sphericalangle C'aA' + \sphericalangle c'\gamma A' = 90^\circ - \sphericalangle PaA' + 90^\circ + \sphericalangle A'AP,$$

sau :

$$\sphericalangle C'cA' + \sphericalangle c'\gamma A' = 180^\circ,$$

adică patrulaterul $C'cA'\gamma$ este inscriptibil. Rezultă că :

$$\sphericalangle Ac\gamma = \sphericalangle C'A'H = \sphericalangle ABH,$$

prin urmare, dreptele BB' , $c\gamma$ sunt paralele.

2. Fie ABC un triunghi, Δ_A o dreaptă trecând prin A , B_a și C_a proiecțiile punctelor B și C pe Δ_A . Să se arate că perpendiculara dusă din B_a pe CA și perpendiculara dusă din C_a pe AB se întâlnesc pe înălțimea AA' .

Pentru a demonstra aceasta, să notăm cu I intersecția lui CC_a cu AA' și cu P intersecția lui Δ_A cu BC . I este ortocentrul

triunghiului APC. Dacă notăm cu φ_A punctul unde perpendiculara, dusă din C_A pe AB taie pe AA' , după proprietatea precedentă rezultă că $B_A \varphi_A$ este perpendicular pe AC.

Teorema ortopolului este demonstrată deci în acest caz particular.

3. Fie Δ o dreaptă oarecare, α, β, γ proiecțiile vârfurilor A, B, C ale triunghiului ABC pe Δ . Perpendicularele duse din α, β, γ pe BC, CA, AB se întâlnesc într'un punct (teorema ortopolului).

Pentru a demonstra aceasta, fie Δ_A o paralelă dusă prin A la Δ , φ_A ortopolul lui Δ_A și φ intersecția perpendicularelor duse din α și β pe BC și AC.

Triunghiurile $\alpha \varphi \beta$, $A \varphi_A B_A$ sunt egale. Rezultă că $\alpha \varphi = \parallel A \varphi_A$ și, prin urmare, $\varphi \varphi_A$ este perpendicular pe Δ și egal cu αA . Observând că $\varphi \varphi_A = \gamma C_A$, deducem că $\gamma \varphi \parallel C_A \varphi_A$, adică $\gamma \varphi$ este perpendicular pe AB.

4. Din cele ce preced, rezultă că dacă o dreaptă Δ se deplasează paralel cu ea însăși, ortopolul ei descrie o dreaptă Δ' , perpendiculară pe Δ .

D. V. IONESCU.

49. O. generalizare. În tratatul de Algebră de Niewenglowschi, tom. II pag. 66, se găsește următorul exercițiu:

Se pune: $L \frac{1+x}{1-x} = f(x)$ și se cere derivata următoarelor funcțiuni:

$$y = f\left(\frac{a+x}{1+ax}\right), \quad z = f\left(\frac{a+b+x+abx}{1+ab+ax+bx}\right).$$

Să ne propunem a găsi derivata funcțiunei

$$u = f\left(\frac{S_1 + S_3 + S_5 + \dots}{1 + S_2 + S_4 + \dots}\right),$$

unde S_i este suma produselor câte i a cantităților $x, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Se remarcă imediat că avem:

$$u = L \frac{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)(1+x)}{(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)(1-x)}.$$

Deci u are aceeași derivată ca $L \frac{1+x}{1-x}$.

VILH. SOLOMON.

50. *Asupra Notei 26.* Cătimile numite de D-I CĂP. LINTESȚ :

imaginare de ordin superior sunt $i_n = \sqrt[n]{-1}$. Dar se știe că -1 se poate scrie $e^{(2k+1)\pi i}$, așa că cele 2^n cantități i_n se pot pune sub forma :

$$i_n = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2^n}} = e^{\theta i}$$

unde $\theta \neq \frac{1}{2}$ când $n > 1$; deci i_n e de forma $\alpha + \beta i$, când $n > 1$. Rezultă imediat :

$$(i_n)^i = e^{-\theta} = \text{real} \quad \sqrt[i]{i_n} = e^{\theta} = \text{real}$$

$$(i_m)^{i_n} = (e^{\theta m i})^{(\alpha + \beta i)} = \text{imaginar.}$$

Se obțin astfel — și se generalizează — rezultatele din nota 26. Observăm că, dacă n crește către infinit, afixele punctelor $i_1, i_2, \dots, i_n$ se găsesc repartizate pe întreg cercul de diametru $-1, +1$, așa încât există cel puțin un punct pe fiecare arc din acest cerc de lungime ε_n , care tinde către 0, când n tind către infinit.

P. SERGESCU.

51. *Asupra problemei 2336.* În această problemă, se cereă : «Să se determine suprafața triunghiului ABC, în funcție de laturile b și c , știind că tangentele unghiurilor sunt în progresie armonică».

Suprafața triunghiului a fost dată prin formulele :

$$\left. \begin{array}{l} (7) \quad S = \frac{1}{8} \sqrt{16b^2c^2 - (b^2 + c^2)^2} \\ (8) \quad S = \frac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 - (2c^2 - b^2)^2} \\ (9) \quad S = \frac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 - (2b^2 - c^2)^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Pagina 24-26} \\ \text{volum. 29 «G.} \\ \text{Matematică»}. \end{array}$$

La aceste formule putem ajunge și pe altă cale.

I. Din enunțul problemei :

$$2/\text{tg}A = 1/\text{tg}B + 1/\text{tg}C,$$

scriem :

$$2\cotg A = \cotg B + \cotg C,$$

relație care caracterizează triunghiul automedian.

Se știe că între laturile triunghiului automedian există o relație de forma :

$$2a^2 = b^2 + c^2. \quad (1)$$

Pentru determinarea suprafeței, putem pleca de la cunoscuta relație:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(p semiperimetrul).

Avem succesiv:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{1}{16}(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{16}[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]} \\ S &= \frac{1}{4} \sqrt{[2bc + (b^2 + c^2) - a^2][a^2 - (b^2 + c^2) + 2bc]} \quad (2) \end{aligned}$$

Ținând seamă de (1), relația (2) devine:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \sqrt{\left[2bc + \frac{b^2 + c^2}{2}\right] \left[2bc - \frac{b^2 + c^2}{2}\right]} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 - \frac{(b^2 + c^2)^2}{4}} \\ &= \frac{1}{8} \sqrt{16b^2c^2 - (b^2 + c^2)^2}. \quad (3) \end{aligned}$$

II. Deasemenea, din:

$$2/\operatorname{tg} B = 1/\operatorname{tg} A + 1/\operatorname{tg} C,$$

obținem:

$$2b^2 = a^2 + c^2,$$

sau:

$$2b^2 - c^2 = a^2.$$

Relația (2) devine:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \sqrt{[2bc + (2c^2 - b^2)][2bc - (2c^2 - b^2)]} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 - (2c^2 - b^2)^2}. \quad (4) \end{aligned}$$

III. Deasemenea, din:

$$2/\operatorname{tg} C = 1/\operatorname{tg} A + 1/\operatorname{tg} B,$$

obținem:

$$2c^2 = a^2 + b^2,$$

sau:

$$2c^2 - b^2 = a^2$$

și:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 - (2b^2 - c^2)^2}. \quad (5)$$

Formulele (3), (4), (5) sunt formulele (7), (8), (9) din soluția dată problemei 2336, păstrându-se condițiile de valabilitate respective.

C. AVRAMESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOALA MILITARĂ DE ARTILERIE (ANUL II).

LUCRARE SCRISĂ LA BALISTICA EXTERIOARĂ.

1) *Un tun trage în vid un proiectil cu o viteză inițială de 500 m/sec. În cât timp acest proiectil va parcurge 1000 m. distanță orizontală și 10 m. distanță verticală ?*

2) *Care sunt defectele traectoriei în aer și cum se pot înlătura ?*

3) *Cum se poate mări bătaia tunului de 76,2m/m ?*

(Timp acordat : 1 oră).

Soluția chestiunii 1-a. Această problemă constituind și pentru corespondenții G. M. o bună aplicațiune analitică, îi voi da soluțiunea mai jos. Știm că, în vid, ecuația traectoriei unui proiectil este :

$$1) \quad y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad (\text{o parabolă})$$

iar durata traectului este dată de formula :

$$2) \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha},$$

unde x, y sunt coordonatele proiectilului în momentul t , α unghiul de tragere, v_0 viteza inițială a proiectilului și g accelerația gravitației.

Eliminând pe α din 1) și 2), rezultă t în funcție de elementele cunoscute ale problemei :

$$x = 1000; y = 10; v_0 = 500 \text{ și } g = 9,805.$$

Eliminarea se face ținând seamă că :

$$1/\cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

și scriind ecuația 1) sub forma :

$$3) \quad \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2 v_0^2}{gx} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2 v_0^2 y}{gx^2} - 1 = 0,$$

de unde, rezolvând pe α , îl introducem în 2) și vom obține două valori pentru t : una corespunzătoare *traectoriei normale* și alta corespunzătoare *traectoriei complementare*.

CĂPITAN I. L.

BIBLIOGRAFIE.

Societatea română de Științe. Anul XXVI No. 4—6. Iulie—Decembrie 1923. București. Asupra distribuției zerurilor unei funcțiuni analitice în vecinătatea unui punct singular, de I. SOULA. Tricinetismul, de A. LARTIGUE. Asupra adunării sâmburilor neortogonali, de T. LALESCU. Scalari, vectori, tensoari, de T. LALESCU. Asupra unei proprietăți funcționale a spiralelor logaritmice, de A. ANGELESCU. Asupra integralei lui POISSON, de M. GHERMĂNESCU. Procese verbale.

Mathesis. Vol. XXXVIII, No. 1, Ianuarie 1924, Bruxelles. Bibliografia triunghiului și a tetraedrului, de J. NEUBERG. Demonstrarea elementară a unei teoreme asupra conicelor, de M. d'OCAGNE. Asupra unei transformări geometrice a cărei curbă de bază este o cubică unicursală, de R. DEAUX. Formule relative la punctele lui BROCARD, de J. NEUBERG. Asupra mișcării finite a unui corp solid, de E. HENRIOT. Demonstrarea unei teoreme a lui AIVAR, de F. V. MORLEY. Note de algebră elementară, de AD. M.

Mathesis. Vol. XXXVIII No. 2. Februarie 1924. Bruxelles. Asupra unei legături involuntive (2,2), de J. NEUBERG. Asupra tetraedrelor reciproce, de CL. SERVAIS. Asupra locurilor centrelor conicelor înscrise într'un triunghi și trecând printr'un punct fix, de ROLAND DEAUX. Teoremă asupra tetraedrului, de R. GOORMAGHTICH.

Revista științifică „V. Adamachi“. Vol. X. No. 1. Noembrie 1923. Iași. Asupra variațiunii diametrului stelei *Alfa Orionis*, de M. E. HEROVANU.

Revista de matematicas y fisicas elementales. Anul V. No. 9. Ianuarie 1924. Buenos Aires. Probleme.

Journal de mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 48. No. 9 și 10. Februarie 1924. Paris.

Revista matematică din Timișoara. Anul III. No. 11. Ianuarie 1924. Asupra unor limite, de AL. I. STOENESCU.

Revista matematică din Timișoara. Anul III. No. 12. Februarie 1924. Timișoara. Patrulater remarcabile de T. LALESCU.

Foaia matematică. Anul I. No. 3¹⁾. Martie 1924. Chișinău. Asupra unor ecuații reciproce, de N. PROFIRI. Asupra unor triunghiuri ortologice în spațiu, de B. M. BARBĂLATT.

Jurnal matematic. Vol. I. No. 4. Februarie 1924. Arad. Generalizarea teoremelor lui FRANKÉ și KARYA, de T. POPOVICIU. O generalizare, AL. I. STOENESCU.

Revista Artileriei. Anul XXXVI. No. 3—6. Iunie—Septembrie 1923. Timișoara. Concentrarea focurilor, de Căpitan I. LINTEȘ. Rezistența țevelor, de Lt. Col. GEORGESCU PION.

¹⁾ Numărul 2 nu s'a primit.

A. ANGELESCO. *Sur les zéros de certaines fonctions*. Extras din *Journal de mathématiques pures et appliquées*. Paris. 1923.

A. ANGELESCO *Sur les fonctions génératrices des polynomes d'HERMITE*. Extras din *Buletinul Societății de științe din Cluj*. Vol. II. Decembrie 1923, Cluj.

A. ANGELESCO. *Sur certaines équations différentielles linéaires*. Extras din *Buletinul Societății de științe din Cluj*. Vol. II. Octombrie 1923. Cluj.

A. ANGELESCO. *Sur une propriété de Stieltjes*. Extras din *Buletinul Societății de științe din Cluj*. Vol II. Decembrie 1923. Cluj.

P. SERGESCO. *Extension aux noyaux symétrisables des théorèmes de M. WEYL*. Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie de sciences*, din Paris. Ședința din 7 Ianuarie 1924.

G. NANEȘ. *Le Calendrier*. (Réforme scientifique). Bucarest 1923. Tipografia „Speranța” Prețul 10 lei.

Anuarul Societății „Matematica Bărlădeană”. Bărlad. 1923.

Vlăstarul. Anul. I. No. 3. Februarie 1924. București. Despre numărul π , de E. ȘTEFĂNESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2613. *Fie M un punct mobil pe dreapta fixă DM și A un punct fix în planul acestei drepte. Pe bisectoarea unghiului AMD se ia punctul N, pentru care MN are o lungime constantă. Se cere locul geometric al punctului N.*

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-I I. COȘEREANU (Școala Politehnică din Timișoara).

Se iau ca axe dreapta DM și perpendiculara din A pe ea. Fie M ($\lambda, 0$) și A ($0, a$). Ecuația dreptei MA fiind:

$$ax + \lambda y - a\lambda = 0,$$

bisectoarea unghiului AMD va avea ca ecuație

$$(1) \quad y = \frac{ax + \lambda y - a\lambda}{\varepsilon \sqrt{a^2 + \lambda^2}} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Fie R lungimea constantă MN . Cercul de centru M și de rază MN având ecuația

$$(2) \quad (x - \lambda)^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

ecuația locului geometric se va obține eliminând pe λ între (1) și (2), ceea ce se face cu mare ușurință. Din (2) se scoate

$$\lambda = x - \varepsilon \sqrt{R^2 - y^2},$$

care se introduce în (1). După efectuarea calculelor se găsește că ecuația locului căutat este :

$$(3) \quad 2x = \frac{(y^2 - R^2)(a - 2y) + ay^2}{\varepsilon \sqrt{R^2 - y^2}}.$$

Notă. Construcția curbei (3) poate servi la rezolvarea unuia din cazurile ce se întâlnesc la rezolvarea problemei 1991, propusă la pagina 38 Vol. XIX din *Gazeta Matematică*.

G. B.

PROBLEMA 3008. *Cât trebuie să fie α pentru ca integrala*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \sin t - t \cos t}{t^3} \right)^3 dt$$

să aibă un sens și în acest caz, să se calculeze valoarea ei.

TH. ANGHELUȚĂ.

Pentru $t = \infty$, se vede că integrala are un sens, oricare ar fi α , căci funcția de sub integrală e comparabilă cu $1/t^3$. Însă pentru ca integrala să aibă un sens, pentru $t = 0$, trebuie ca numărătorul

$$\alpha \sin t - t \cos t,$$

să aibă un zero triplu, deci trebuie ca

$$\alpha = 1.$$

Să calculăm deci integrala :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t - t \cos t}{t^3} \right)^3 dt = 2 \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t - t \cos t}{t^3} \right)^3 dt.$$

Deci avem de calculat integrala :

$$I_1 = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t - t \cos t}{t^3} \right)^3 dt.$$

Integrala aceasta se poate calculă prin mai multe metode. Voiu reveni într'un articol asupra calculului integralelor de această speță, prin o altă metodă, într'un număr viitor al Gazetei. Voiu calculă acum integrala I, prin mijloace elementare.

Pentru aceasta, voiu calculă întâi câteva integrale cunoscute presupunând cunoscută integrala¹⁾:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Integrând prin părți avem :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Procedând într'un chip analog, se găsește :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3} dt = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t \cos t}{t^2} dt = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt - \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t} dt.$$

Inlocuind în ultima integrală $\sin^3 t$ prin sinusul arcului multiplu, avem :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3} dt = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt - \frac{9}{8} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt + \frac{3}{8} \int_0^{\infty} \frac{\sin 3t}{t} dt.$$

Prin urmare, avem :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3} dt = \frac{3}{4} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{3\pi}{8}.$$

1) E. GOURSAT, Cours d'An. tome I. pag. 416.

Se observă totodată că am calculat și integrala:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t \cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Se găsește tot astfel și integrala:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t \cos^2 t}{t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Să calculăm în fine și integrala:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t - t \cos t}{t^3} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Trecând acum la calculul integralei I_1 , pe care o integrăm prin părți, obținem:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t - t \cos t}{t^3} \right)^3 dt = \frac{3}{8} \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2 \sin t}{t^7} dt.$$

Revine deci a calcula integrala I_2 :

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2 \sin t}{t^7} dt.$$

Procedând la fel, avem:

$$I_2 = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t) \sin^3 t}{t^5} dt + \frac{1}{6} \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2 \cos t}{t^5} dt.$$

Pentru prima integrală, avem:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t) \sin^3 t}{t^5} dt = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3} dt + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t) \sin 2t}{t^4} dt.$$

Prima integrală din membrul al doilea am găsit-o mai sus, rămâne deci să calculăm integrala:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t) \sin 2t}{t^4} dt = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{\sin t \sin 2t}{t^3} dt$$

$$+ \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t) \cos 2t}{t^3} dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)(1 - 2 \sin^2 t)}{t^3} dt.$$

Prin urmare:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t) \sin 2t}{t^4} dt = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{\sin t - t \cos t}{t^3} dt$$

$$- \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3} dt + \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t \cos t}{t^2} dt.$$

Toate aceste integrale au fost calculate mai sus, deci avem, înlocuind prin acele valori:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t) \sin 2t}{t^4} dt = \frac{\pi}{6}.$$

Prin urmare, prima integrală din I_2 este astfel aflată, căci avem:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t) \sin^2 t}{t^5} dt = \frac{1}{4} \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{13\pi}{96}.$$

Ne rămâne să calculăm a doua integrală din I_2 , adică integrala:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2 \cos t}{t^6} dt = \frac{1}{5} \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t) \sin 2t}{t^4} dt$$

$$- \frac{1}{5} \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2 \sin t}{t^5} dt.$$

Prima integrală o avem calculată mai sus; rămâne integrala:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2 \sin t}{t^5} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t) \sin^2 t}{t^3} dt \\ + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2 \cos t}{t^4} dt,$$

sau, descompunând prima integrală:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2 \sin t}{t^5} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t \cos t}{t^2} dt \\ + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2 \cos t}{t^4} dt.$$

Înlocuind integralele calculate, avem;

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2 \sin t}{t^5} dt = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2 \cos t}{t^4} dt.$$

Avem însă pentru integrala din partea a doua:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2 \cos t}{t^4} dt = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t) \sin 2t}{t^2} dt \\ - \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2 \sin t}{t^3} dt = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t \cos t}{t^2} dt - \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{\sin t \cos^2 t}{t} dt \\ - \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3} dt + \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t \cos t}{t^2} dt - \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{\sin t \cos^2 t}{t} dt.$$

Făcând reducerile, se găsește:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2 \cos t}{t^4} dt = \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t \cos t}{t^2} dt$$

$$- \int_0^{\infty} \frac{\sin t \cos^3 t}{t} dt - \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3} dt.$$

$$\dots \int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^3 \cos t}{t^4} dt = -\frac{\pi}{24}.$$

Prin urmare, avem :

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^3 \sin t}{t^5} dt = \frac{5\pi}{96}.$$

Inlocuind aceasta mai sus, găsim :

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^3 \cos t}{t^6} dt = \frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{96} = \frac{11\pi}{180}.$$

Pentru integrala I_2 avem deci :

$$I_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{13\pi}{96} + \frac{1}{6} \cdot \frac{11\pi}{480},$$

$$\dots I_1 = \frac{\pi}{8} \left[\frac{13}{96} + \frac{1}{2} \frac{11}{480} \right].$$

Deci :

$$I = 2 I_1 = \frac{\pi}{4} \left[\frac{13}{96} + \frac{11}{2 \cdot 480} \right].$$

Integrala căutată este, prin urmare :

$$I = \frac{141\pi}{2^8 \cdot 3 \cdot 5}.$$

Procedeul a constatat în reducerea puterii lui t dela numitor pânăla trei sau inferior lui, ca astfel să putem descompune integrala în integralele calculate la început.

TH. ANGHELUȚĂ.

PROBLEMA 3010. Se dă drumul din repaus unei sănii de 0,8 tone greutate, pe o coastă de deal acoperită cu zăpadă, dintr'un punct A și ea se oprește, din cauza frecării, într'un punct B, astfel că diferența de nivel între A și B e de 125 m.

1. Să se găsiască greutatea cea mai mare de zăpadă ce s'a putut topi între A și B, datorită frecării, temperatura zăpezii fiind 0° .

2. Dacă în loc de zăpadă, drumul ar fi acoperit cu gheață perfect lucioasă, care este iuteala cea mai mare, ce ar putea avea sania în punctul B?

CR. MATEESCU.

Soluție dată de D-nul N. IORDANIAN.

1. Lucrul mecanic produs de 800 kg. ce cad dela o înălțime de 125 m. este de

$$125 \times 800 = 100000 \text{ kgm.}$$

Numărul maximum de calorii, care echivalează cu acest lucru mecanic, este de

$$\frac{100000}{427} = 234,2 \text{ calorii mari}$$

(427 este echivalentul mecanic al căldurii).

De oarece căldura latentă de topire a gheței este de circa

$$80 \text{ cal. mari / kg. apă,}$$

cantitatea maximă de zăpadă care s'a putut topi este :

$$\frac{234,2}{80} = 2,93 \text{ kg.}$$

S'a presupus neglijabilă frecarea saniei de aer.

2. Viteza maximă pe care ar putea-o atinge sania, presupunând frecarea de gheață și de aer neglijabile, este :

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 125},$$

$$v = 49,5 \text{ m/sec}$$

sau circa 180 km/oră. Pe pistele de bobsleigh, se atinge uneori 100 km/oră, pentru căderi cam de aceeași mărime; diferența se datorește în primul rând rezistenței aerului.

Notă. Problema a mai fost rezolvată și de D-nul EMIL T. ZAHARIA.

PROBLEMA 3023. În fața unui judecător, se prezintă în litigiu doi bâlbâiți. Ei încep să vorbască odată și termină tot odată... în timp ce judecătorul, uimit, aude următoarele silabe distincte :

— « Dom | nu | le | eu | plă | tesc | dar | nu | la | ju | de | de | că | tor |
ce | eu | am | a | rec | la | ma | bă | că | nu | mi-a | plă | tit | chi | ri | a | și | m'a |
bă | tut | ! ? »...

Știind că nu au fost alte silabe distincte suprapuse decât cea dintâi și cea din urmă, că primul a bâlbâit în progresie aritmetică, iar al doilea în progresie geometrică — socotit a câte o secundă fiecare silabă distinctă sau repetată — că primul a rostit de două ori mai multe silabe distincte consecutive decât al doilea și că această dublă pledoarie a durat fără întrerupere 34 minute și 8 secunde, se întreabă de partea cui cade dreptatea ?

GH. ZAPAN.

Socotind că silabele întâia și cea din urmă au fost suprapuse, în total cei doi bâlbâiți au rostit în fața judecătorului 36 silabe distincte consecutive. Deci primul bâlbâit — să-i zicem *Primus* — a rostit 24 silabe distincte, iar al doilea, *Secundus*, 12 silabe. Pledoaria dublă și în contradictoriu a durat 34 minute și 8 secunde, adică 2048 secunde.

Pentru *Primus*, chestiunea se reduce la a însera între termenii extremi, 1 și 2048, un număr de 22 medii aritmetice.

Din formula :

$$b = a + (n + 1) r,$$

avem :

$$r = \frac{b-a}{n+1} = \frac{2048-1}{23} = 83.$$

Deci *Primus* a rostit silabe distincte la următoarele intervale de timp, exprimate în secunde :

- (1) 1,90, 179, 268, 357, 446, 535, 624, 713, 802, 891, 980,
1069, 1158, 1247, 1336, 1425, 1514, 1603, 1692, 1781,
1870, 1959, 2048.

Tot astfel, pentru *Secundus*, înserăm între termenii 1 și 2048 un număr de 10 medii geometrice. Considerăm formula :

$$b = a r^{n+1},$$

de unde :

$$r = \sqrt[n+1]{b/a} = \sqrt[11]{2048/1} = 2.$$

Aşa încât *Secundus* a rostit silabe distincte la următoarele intervale de timp :

(2) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048.

Pentru a şti ce anume a pledat fiecare dintre părţi, vom considera ordinea de succesiune a silabelor distincte respectiv, după (1) şi (2) asupra pledoariei duble din enunţ. Se găseşte că *Primus* a glăsuît într'astfel : «*Domnu judecător eu am a reclama că nu mi-a plătit chiria şi m'a bătut!*». Iar *Secundus* s'a apărat fără să fi dat vre'o clipă de răgaz acuzaţiei : «*Domnule eu plătesc dar la de ce bătut?*»

După cum se vede, este vorba de un proces de chirie între un proprietar român şi un chiriaş străin. Proprietarul se plânge în faţa instanţelor judecătoreşti că chiriaşul său nu i-ar fi plătit chiria şi că s'ar fi făcut vinovat şi de delictul de lovire prevăzut şi pedepsit de art. 238 Codul Penal; chiriaşul, pe de altă parte, susţine că ar fi fost bătut şi el de către proprietar, iar în ceea ce priveşte chiria, recunoaşte că nu a plătit'o, din cauza atitudinii agresive a proprietarului, dar că este dispus să o achite imediat.

Din aceste afirmaţiuni, se desprind următoarele consideraţiuni juridice :

1. Că fiind vorba de două acţiuni diferite, atât ca natură juridică cât şi din punctul de vedere al obiectului şi cauzei, nu este locul a se aplica conexitatea, prevăzută de art. 110 Codul Civil, că prin urmare rău acţiunea penală pentru cauză de lovire a fost conexată cu o acţiune civilă.

2. Că proprietarul reclamant îşi va menţine, prin urmare, cererea principală asupra executării şi rezilierii contractului de locaţie, având facultatea de a redeschide separat acţiunea penală, în cazul că nu ar putea ajunge la o împăcaciune cu chiriaşul, adică dacă s'ar întâmpla să nu poată obţine evacuarea acestuia.

Judecătorul va constata dacă contractul de locaţie este prevăzut, în scris, cu pact comisoriu — adică dacă se prevede expres că neplata chiriei la termene atrage după sine rezilierea contractului,

fără somație sau judecată. În acest caz, el este chemat numai să constate această reziliere *ipso jure*.

Dacă însă judecătorul constată cu nu este pact comisoriu, va aprecia dacă este cazul să rezilieze contractul, potrivit spiritului art. 1439 al. 2 Codul Civil (A se vede Curierul Judiciar 56/903; 43/906), sau dacă nu cumva urmează să oblige numai pe chiriaș să execute contractul, potrivit articolelor 1020, 1021, 1365, 1370, 1439 Codul Civil, 67 Codul Comercial (A se vede și: D. ALEXANDRESCO VI, p. 90, 91, 102; LAURENT XVII, 164; AUBRY et RAU, IV, p. 85).

Din desbaterile orale ale părților în litigiu, nu rezultă că ele își întemeiază motive pe principiile decretelor-legi sau legilor actuale ale chiriilor.

Dacă chiriașul se bucură de prelungirea contractului pe baza acestor legi excepționale, prin neplata chiriei la termen el este decăzut din dreptul de prelungire și ca atare cată a fi evacuat. (Art. 1 Decretul-lege No. 1420/920).

Notă. Au rezolvat partea matematică a problemei, fără a discuta și fondul juridic, D-nii: P. MIRESCU (cl. VIII-a Lic. „Lazăr”), Șt. EPURE (cl. VIII-a Lic. „Buzău”), S. KATZ (cl. VI-a Lic. „Laurian”, Botoșani) și HERO PETREANU (cl. VIII-a secundară).

GH. ZAPAN.
Avocat.

PROBLEMA 3064. Fie H și I ortocentrul și centrul cercului înscris unui triunghi oarecare ABC . Fie A_1, B_1, C_1 intersecțiile înălțimilor AH, BH, CH și A', B', C' intersecțiile bisectoarelor AI, BI, CI cu cercul circumscris triunghiului ABC . Se cere să se demonstreze că:

- 1) I este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$;
- 2) Dreptele lui SIMSON ale punctelor A_1, B_1, C_1 în raport cu triunghiul $A'B'C'$ sunt paralele cu diametrele cercului circumscris ce trec prin vârful I al triunghiului ABC .

Șt. FL. LĂZĂRESCU.

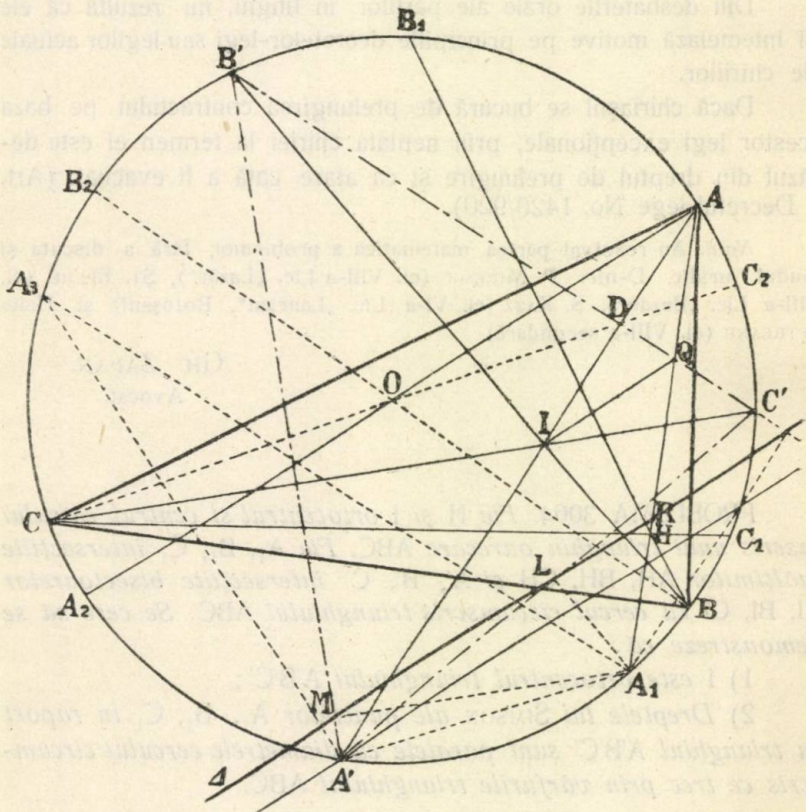
I. Soluție dată de D-nii: ION C. VASILIU și SERGIU GH. VASILACHE (Elevi Liceul Mănăstirea Dealului) și ȘTEFAN T. EPURE (Elev cl. VII Liceul Buzău).

Fie D punctul de intersecție al bisectoarei AI cu B'C'. Avem
măs. $\sphericalangle A'DB' = \frac{1}{2}$ măs. arc. A'C + $\frac{1}{2}$ măs. arc. CB' + $\frac{1}{2}$ măs. arc. AC'

$$\therefore \text{măs. } \sphericalangle A'DB' = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} (A + B + C) = 90^\circ.$$

Unghiul A'DB' este drept și deci IA' este perpendiculară pe B'C'. Analog, demonstrăm că BB' și CC' sunt respectiv perpendiculare pe C'A' și A'B'. Deci I este ortocentrul triunghiului A'B'C'.¹⁾

Pentru a demonstra partea a doua a problemei, ne vom servi de următoarea proprietate clasică a dreptei lui SIMSON :



Dacă F este un punct al cercului circumscris unui triunghi ABC, H ortocentrul triunghiului, N punctul de intersecție al înăl-

¹⁾ Această proprietate este cunoscută. A se vedea:

E. CATALAN, *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, XXI, p. 46.

C. H. NICOLAU, *Proprietăți ale unui triunghi important*, *Gazeta Matematică*, Vol. XXV, p. 65.

țimei AH cu cercul ABC, P intersecția lui FN cu BC, atunci dreapta lui SIMSON a punctului F, în raport cu triunghiul ABC, este paralelă cu HP.²⁾

Fie Δ dreapta lui SIMSON a punctului A_1 în raport cu triunghiul $A'B'C'$, Q intersecția dreptei A_1A cu $B'C'$; atunci, după proprietatea precedentă, rezultă că Δ este paralelă cu IQ. Rămâne deci să demonstrăm că IQ este paralelă cu AO. Dreptele AH și AO fiind isogonale, AI este bisectoara unghiului HAO. Însă I fiind ortocentrul triunghiului $A'B'C'$, punctele A și I sunt simetrice față de $B'C'$. Triunghiul QAI este isoscel și avem deci

$$\angle QIA = \angle QAI = \angle OAI,$$

de unde rezultă că dreptele QI și AO sunt paralele.

II. Soluție dată de D-nul ILIE IONESCU-BREZUICA (Elev cl. VIII Liceul Ioniță Asan, Caracal).

Prima parte aceeași soluție ca mai sus.

În ce privește partea a doua a problemei, ne vom servi de următoarele două proprietăți, prima aplicabilă figurei formate, iar a doua generală și anume:

1. Dreptele lui SIMSON ale unui aceluiaș punct în raport cu triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt perpendiculare;

2. Dreapta lui SIMSON, în raport cu un triunghi ABC, a punctului unde înălțimea corespunzătoare laturei BC taie a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC, este paralelă cu tangenta în A la cerc.

După ultima proprietate, dreapta lui SIMSON a punctului A_1 în raport cu ABC este paralelă cu tangenta în A la cerc și deci perpendiculară pe OA; iar după prima proprietate, dreapta lui SIMSON a punctului A_1 în raport cu triunghiul $A'B'C'$ (dreapta Δ) este perpendiculară pe prima, adică paralelă cu diametrul OA, ceea ce demonstrează chestiunea.

III. Soluție dată de D-nii: MIHAIL I. FOCȘENEANU și B. M. BARBĂLATT.

1) Prima parte ca la soluția de mai sus.

2) Fie A_3 punctul unde isogonala $A'A_3$ a dreptei $A'A_1$ în ra-

²⁾ ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, Géométrie plane, Nouvelle édition, p. 108.

port cu unghiul $B'A'C'$ taie cercul O . După o proprietate cunoscută a dreptelor isogonale *), dreapta lui SIMSON a punctului A_1 în raport cu triunghiul $A'B'C'$ este perpendiculară pe isogonală $A'A_3$. Va fi deci destul să arătăm că și AO e perpendiculară pe $A'A_3$.

Fie A_2, B_2, C_2 simetricele vârfurilor A, B, C în raport cu centrul O . Dreptele AA_1 și AA_2 fiind isogonale în raport cu unghiul BAC , avem:

$$\sphericalangle A'AA_2 = \sphericalangle A'AA_1.$$

Dar $\sphericalangle A'AA_1 = \sphericalangle A'A_3A_1$ ca având aceeași măsură; deci:

$$\sphericalangle A'AA_2 = \sphericalangle A'A_3A_1.$$

Pe de altă parte, dreapta A_1A_3 e paralelă cu $B'C'$ ca unind picioarele a două isogonale pe cerc. Dreapta AA' fiind perpendiculară pe $B'C'$, va fi deci perpendiculară și pe A_1A_3 . Unghiurile $A'AA_2$ și $A'A_3A_1$ fiind egale și având două laturi perpendiculare între ele, urmează că și celelalte două laturi sunt perpendiculare, adică AA_2 e perpendiculară pe $A'A_3$, ceea ce rezolvă chestiunea.

IV. Soluție dată de D-nii: EUGEN BALAN (Student, București), ION COȘEREANU, AL. ȘCODRANO (Siliștră), F. DOBRESCU-BĂBICI și MARTINIAN BOGDAN (Caracal), MIRCEA I. ADAM și MARIN ȘTEFAN (Constanța), OVIDIU POPEA (Chișinău), VASILE R. DUMITRIU (Iași), TRAIAN UDRISKY (Arad), SOLOMON WEISS și LEON WEISS (Galați), TRAIAN N. ANGELESCU (Cl. VI Liceul Giurgiu), CORNELIU N. POPESCU (Cl. IV Liceul Giurgiu), ALEXANDRU TAUBER (Cl. VIII, Botoșani), C. D. MIHĂESCU (Giurgiu), G. MATEESCU (Galați), CONST. I. CIORĂNESCU, PAUL I. IONESCU și D. POPOVICIU-PUIU (Elevi Liceul Mănăstirea Dealului), ION TH. POPOVICI.

1) Pentru prima parte aceeași soluție ca la precedentele.

2) Să considerăm dreapta lui SIMSON a vârfului A_1 în raport cu $A'B'C'$ (dreapta Δ). Se știe că obținem o dreaptă paralelă cu Δ în modul următor **):

*) ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, Nouvelle édition, Géométrie plane, p. 452.

**) A se vedea: TRAIAN LALESCU, *Dreapta lui SIMSON* din *Revista Matematică din Timișoara*, Anul II, p. 147;

E. CATALAN, *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, VI-e éd., Théorème IX, p. 36.

Proiectăm pe A_1 pe $B'C'$ și luăm intersecția A'' a acestei proiectante cu cercul O circumscris triunghiului $A'B'C'$. Dreapta $A'A''$ este paralelă cu Δ . Rămâne deci să demonstrăm că coarda $A'A''$ este paralelă cu diametrul AA_2 .

Avem $\text{arc. } AA'' = \text{arc. } A'A_1$, căci AA' și A_1A'' sunt paralele. Dar, $\text{arc. } A_1A' = \text{arc. } A'A_2$, căci jumătățile lor măsoară unghiurile egale HAI și OAI ; deci, $\text{arc. } AA'' = \text{arc. } A'A'' = \text{arc. } A'A_2$ și, prin urmare, $A'A''$ e paralelă cu AA_2 .

V. Soluție dată de D-nii: CONST. I. GEORGESCU, ADRIAN A. BUȘILĂ și VIRGIL GHÎTESCU.

1) Soluția primei părți a chestiunii, ca mai sus.

2) Fie L și M picioarele perpendiculelor scoborite din A_1 pe $C'A'$ și $A'B'$, R intersecția dreptei LM (a dreptei lui SIMSON Δ) cu înălțimea AA_1 . În triunghiul MRA_1 , avem:

$$\sphericalangle MRA_1 = 180^\circ - \sphericalangle MA_1A - \sphericalangle LMA_1.$$

Dar MA_1 fiind paralelă cu CI , unghiul MA_1A este egal cu unghiul pe care CI îl face cu AH , adică cu $(90^\circ + \frac{1}{2}C)$, iar patrulaterul A_1LMA' fiind inscriptibil, $\sphericalangle LMA_1 = \sphericalangle LA'A_1 = 90^\circ - B + \frac{1}{2}C$.

$$\therefore \sphericalangle MRA_1 = 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}C) - (90^\circ - B + \frac{1}{2}C) = B - C,$$

de unde conchidem că LM este paralelă cu AO .

Observații. 1°. Dreptele lui SIMSON ale punctelor A, B, C în raport cu $A'B'C'$ sunt paralele cu laturile triunghiului ABC , căci sunt perpendiculare respectiv pe isogonalele dreptelor AA', BB', CC' , adică pe OA', OB', OC' , care sunt perpendiculare pe BC, CA, AB .

2°. Dreptele lui SIMSON ale punctelor A', B', C' în raport ABC sunt paralele cu bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC .

3°. Dreptele lui SIMSON ale punctelor A', B', C' în raport cu $A_1B_1C_1$ sunt paralele cu bisectoarele interioare ale triunghiului ABC .

4°. Dreptele lui SIMSON ale punctelor A, B, C în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$ sunt paralele cu laturile BC, CA, AB ale lui ABC .

MIHAIL I. FOCȘENEANU.

PROBLEMA 3066. Fie Ω_1 punctul retrograd al lui BROCARD dintr'un triunghi $oarecare ABC$; XYZ triunghiul podar al punctului Ω_1 ; MNP triunghiul format prin intersecțiile perpendiculelor duse prin vârfurile X, Y, Z respectiv pe laturile XY, YZ, ZX ; T aria triunghiului MNP .

Fie $X_1Y_1Z_1$ triunghiul podar al lui Ω_1 în raport cu triunghiul XYZ; T_1 aria triunghiului $M_1N_1P_1$ format cu ajutorul lui $X_1Y_1Z_1$ după cum MNP s'a format din XYZ. Procedând tot astfel mai departe, obținem alte triunghiuri T_2, T_3, T_4 , etc.

Se cere să se demonstreze că limita sumei ariilor triunghiurilor $T, T_1, T_2, T_3, \dots$ astfel formate, este egală cu aria S a triunghiului ABC.

CONSTANTIN I. GEORGESCU.

Soluție dată de D-nii: ADRIAN A. BUȘILĂ (Elev Școala Politehnică, București) și WILHELM SOLOMON (Elev cl. VII Liceul Matei-Basarab, București).

Patrulateralele inscriptibile $X\Omega_1YC, Y\Omega_1ZA, Z\Omega_1XB$ ne arată că Ω_1 este punct retrograd al lui BROCARD și în triunghiul XYZ, că triunghiul XYZ este asemenea cu ABC, având $\sphericalangle X = \sphericalangle B, \sphericalangle Y = \sphericalangle C, \sphericalangle Z = \sphericalangle A$, iar triunghiul dreptunghic $AZ\Omega_1$ ne arată că raportul de asemănare $\Omega_1Z : \Omega_1A = \sin \omega$, ω fiind unghiul lui BROCARD. Prin urmare

$$\text{aria XYZ} = S \sin^2 \omega.$$

Triunghiurile MNP și XYZ sunt și ele asemenea, având $\sphericalangle M = \sphericalangle Y, \sphericalangle N = \sphericalangle Z, \sphericalangle P = \sphericalangle X$. Patrulateralele $X\Omega_1YM, Y\Omega_1ZN, Z\Omega_1XP$ fiind inscriptibile, ne dau

$$\sphericalangle \Omega_1MY = \sphericalangle \Omega_1NZ = \sphericalangle \Omega_1PX = \omega,$$

de unde reiese că Ω_1 este punct al lui BROCARD și în triunghiul MNP și anume tot punct retrograd (M este intersecția perpendicularelor duse prin X și Y respectiv pe XY și YZ, etc.). Triunghiul $NZ\Omega_1$, dreptunghic în Ω_1 , ne dă ca raport de asemănare

$$\Omega_1N : \Omega_1Z = \cotg \omega.$$

Rezultă deci că avem

$$T = \text{aria XYZ} \cdot \cotg^2 \omega = S \sin^2 \omega \cotg^2 \omega.$$

În mod analog, obținem :

$$T_1 = \text{aria } X_1Y_1Z_1 \cdot \cotg^2 \omega = \text{aria XYZ} \sin^2 \omega \cotg^2 \omega$$

...

$$T_1 = S \sin^4 \omega \cotg^2 \omega,$$

$$T_2 = S \sin^6 \omega \cotg^2 \omega, \text{ etc.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum T_n = S \cotg^2 \omega (\sin^2 \omega + \sin^4 \omega + \sin^6 \omega + \dots)$$

$$= S \cotg^2 \omega \cdot \frac{\sin^2 \omega}{1 - \sin^2 \omega}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum T_n = S.$$

Observație. Dacă triunghiul $X_1 Y_1 Z_1$ ar fi fost luat în raport cu MNP și dacă T_1 ar fi fost format din acest triunghi în modul cum MNP s'a format din ABC, etc., atunci, printr'un mers analog ca mai sus, găsim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum T_n = S \cdot \cos^2 \omega (1 + \cos^2 \omega + \cos^4 \omega + \dots) = S \cotg^2 \omega.$$

ADRIAN A. BUȘILĂ.

PROBLEMA 3116. Fie R, r, r_a, r_b, r_c raza cercului circumscris, a cercului înscris și a cercurilor exînscrise, p semiperimetrul unui triunghi oarecare ABC, d_a, d_b, d_c distanțele de la vârfurile A, B, C la centrele cercurilor exînscrise, r' raza cercului înscris în triunghiul ortic. Să se demonstreze relațiunea:

$$\frac{r' + 2R}{p^2} = \frac{r_a - r}{d_a^2} + \frac{r_b - r}{d_b^2} + \frac{r_c - r}{d_c^2}.$$

N. P. ARCADIAN.

Soluție dată de D-nii: B. M. BARBĂLATT (Cl. VII, Bârlad), P. A. MIRESCU (Cl. VIII Liceul Lazăr), ADRIAN A. BUȘILĂ, VIRGIL GHÎTESCU și P. KATZ (Elevi Școala Politehnică, București), ȘTEFAN T. EPURE (Buzău), MARTINIAN P. BOGDAN și ILIE IONESCU-BREZUICA (Elevi Cl. VIII Liceul Caracal), VIRGIL COȘNIȚĂ și C. BERDAN (Elevi Liceul Bârlad), MIRCEA ADAM și LAURENȚIU L. VLAȚIU (Elevi Liceul Constanța), D. M. BLUMENFELD (Elev Cl. VII, Botoșani), MARIN GH. DUMITRESCU (Elev Cl. VII, Craiova), ST. FL. LĂZĂRESCU, TRAIAN N. ANGELESCU și MIRCEA VASILESCU (Elevi Liceul Giurgiu), ROMEO MIHĂILESCU (R. Vâlcea), LEON WEISS și SOLOMON WEISS (Elevi Liceul Galați), D. M. TEODORESCU (Elev Cl. VII Liceul Mihai Viteazul), OVIDIU POPEA (Elev Cl. VII Liceul Chișinău), MIHAIL STAMATIU și GH. STĂNCIULESCU (Elevi Liceul Pitești), EMIL ȘTEFĂNESCU (Elev Cl. VIII Liceul Spiru Haret), TRAIAN UDRISKY (Elev Cl. VI Liceul Moise Nicoară, Arad), ION C. VASILIU, EMILIAN I. POPP, GH. HUZUNEANU, C. I. CIORĂNESCU, PAUL I. IONESCU și GH. D. SIMIONESCU (Elevi Cl. VI Liceul Mă-

năstirea Dealului), RADU CĂDERE, ED. C. RUSSU, MIRCEA I. SIMIONESCU și ION D. VASILESCU (Elevi Lic. Internat. Iași), CORNELIU C. IONESCU și N. G. BOTEA (Elevi Lic. Cantemir), ION TH. POPOVICI (Lic. Mihai Viteazul). M. BRĂTESCU-DANUBIU (Lic. Giurgiu), ION L. GRIGORESCU, GH. D. SIMIONESCU și M. I. PĂTROIANU (Elevi Lic. Mănăstirea Dealului).

Se știe că avem

$$d_a = p / \cos \frac{1}{2} A, \quad d_b = p / \cos \frac{1}{2} B, \quad d_c = p / \cos \frac{1}{2} C,$$

$$r_a - r = 4R \sin^2 \frac{1}{2} A, \quad r_b - r = 4R \sin^2 \frac{1}{2} B, \quad r_c - r = 4R \sin^2 \frac{1}{2} C.$$

Cu ajutorul acestor formule, membrul al doilea al relației propuse devine :

$$\sum \frac{r_a - r}{d_a^2} = \frac{R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{p^2}$$

sau, ținând seamă de relațiunile *)

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$r' = 2R \cos A \cos B \cos C,$$

obținem

$$\sum \frac{r_a - r}{d_a^2} = \frac{2R + r'}{p^2}.$$

Observații. 1. Fie R' raza cercului circumscris triunghiului ortic și r'_a , r'_b , r'_c razele cercurilor exinscrise.

Dacă ținem seamă că avem

$$R = 2R' \text{ și } 4R' + r' = r'_a + r'_b + r'_c,$$

relația propusă se poate scrie sub eleganta formă

$$\sum \frac{r_a - r}{d_a^2} = \frac{r'_a + r'_b + r'_c}{p^2}.$$

MIRCEA ADAM.

2. Avem relațiunile

$$\frac{r_a}{d_a^2} + \frac{r_b}{d_b^2} + \frac{r_c}{d_c^2} = \frac{1}{2R}.$$

MIRCEA ADAM și ST. FL. LĂZĂRESCU.

$$\sum \left(\frac{r_a}{d_a} \right)^2 = 1 - \frac{r}{2R}.$$

*) A se vedea: *Culegere de Probleme*, Trigonometria, XVII.3 și XIX.13.

$$(r_b + r_c) d_a^2 = (r_c + r_a) d_b^2 = (r_a + r_b) d_c^2 = 4Rp^2$$

$$\sum \frac{\sqrt{r_a - r}}{d_a} = \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

MIRCEA ADAM.

$$\sum \frac{bc}{d_a^2} = 1.$$

EMIL ȘTEFĂNESCU.

PROBLEMA 3119. Să se demonstreze relațiunea :

$$\cos^3 \frac{1}{3} \pi + \cos^3 \frac{2}{3} \pi + \cos^3 \frac{3}{3} \pi + \cos^3 \frac{4}{3} \pi = 0$$

și să se arate că ea subsistă pentru orice exponent întreg impar.

CONST. I. GEORGESCU.

Soluție și generalizare dată de D-nii : I. N. GEORGESCU-VAL, IOAN M. ȘERBĂNESCU, I. GOLDSTEIN, EMIL ȘTEFĂNESCU, C. D. MIHĂESCU, MIRCEA ADAM, LEON WEISS, SOLOMON WEISS, DAVID M. BLUMENFELD, I. P. ILIESCU, WILHELM SOLOMON, G. MATEESCU, C. BERDAN, VIRGIL COȘNIȚĂ, EDGAR C. RUSU, TRAIAN N. ANGELESCU, I. ST. CRISTEA, ION D. VASILESCU, DORIN POPESCU, MIRCEA A. VASILESCU.

Mai general, suma

$$\cos^m \frac{\pi}{n} + \cos^m \frac{2\pi}{n} + \cos^m \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos^m \frac{(n-1)\pi}{n},$$

în care n este un întreg oarecare, iar m un întreg nepereche, este nulă *).

Să presupunem mai întâi că n este nepereche; suma considerată are atunci un număr pereche de termeni. Observăm însă că arcele termenilor extremi și a termenilor egal depărtați de extremi sunt suplimentare :

$$\frac{\pi}{n} + \frac{(n-1)\pi}{n} = \pi, \quad \frac{2\pi}{n} + \frac{(n-2)\pi}{n} = \pi, \text{ etc.}$$

Cosinusurile lor vor fi egale și de semne contrare și ridicate

*) A se vedea : *Culegere de Probleme, Trigonometria*, XXV. 24.

la puteri impare cosinusurile rămân tot egale și de semne contrare; suma este deci nulă.

Dacă n este pereche ($n = 2p$), atunci suma considerată are un număr nepereche de termeni. Termenii extremi și cei egal despărtați de extremi dau sume nule, pentru același motiv ca mai sus, iar termenul din mijloc este și el nul, căci acest termen este

$$\cos^m \frac{p\pi}{2p} = \cos^m \frac{\pi}{2} = 0.$$

Suma considerată este deci nulă și în acest caz.

Au rezolvat bine problema, însă fără generalizare, D-nii: N. P. ARCADIAN, MARIN GH. DUMITRESCU, ȘTEFAN T. EPURE, MARTINIAN P. BOGDAN, ROMEO MIHĂILESCU, PAUL I. IONESCU, LAURENȚIU VLAȚIU (Constanța), FROIM I. MARCUS, C. I. CIORĂNESCU, V. VÂRLAN (Lic. Internat, Iași), C. C. BĂRBULESCU, D. M. TEODORESCU (Liceul Mihai Viteazul), ION C. VASILIU, P. A. MIRESCU, ȘT. FL. LĂZĂRESCU, MICU GRÜNBAUM, EUGEN PĂLĂRIERU, DUMITRU SAMOILĂ, ION A. SERGHEIEV (Cl. VIII Liceul Chîșinău), AL. TAUBER, AUREL GH. PANAITESCU (Liceul Brăila), GH. D. IONESCU-ZANE, A. B. REINHORN, OVIDIU BOLGIU, N. BOTEA, D. S. NICULESCU, PAUL I. BLEIWEISS, LEON BRÜLL (Elevi Cl. VI Liceul Cantemir-Vodă), EMIL A. BERCOVICI, M. H. BRĂTESCU-DANUBIU (Giurgiu), GH. GH. ANDRIEȘESCU (Cl. VII particulară, Dorohoi), PETRU GH. SPACU (Cluj), GH. P. BOGDAN, OCTAV H. BURSTIN (Liceul Internat, Iași), I. TH. POPOVICI, GH. D. SIMIONESCU, GH. F. GRADINY (Liceul Cămpina).

Mulți din corespondenți au arătat că problema generalizată se află în *Culegere de Probleme*, loc. cit., unde se găsește schițată și soluția de mai sus.

EXERCIIU.

60. Să se arate că suma cubului numărului $10a + b$ și a cubului răsturnatului său este divizibilă cu $11(a + b)d^2$, iar diferența e divizibilă cu $9(a - b)d^2$; d fiind cel mai mare divizor comun al numerelor a, b .

CĂPITAN GR. ZAPAN.

R. Fie $N = 10a + b$ și $N' = 10b + a$.

Avem succesiv:

$$N^3 \pm N'^3 = 10^3(a^3 \pm b^3) \pm (a^3 \pm b^3) + 30ab(a \pm b)(10 \pm 1).$$

$$\therefore N^3 \pm N'^3 = (10^3 \pm 1)(a^3 \pm b^3) + 30ab(a \pm b)(10 \pm 1).$$

$$\therefore N^3 \pm N'^3 = (10 \pm 1)(a \pm b)[(10^3 \mp 10 + 1)(a^2 \mp ab + b^2) + 30ab].$$

$$\therefore N^3 \pm N'^3 = \mathcal{M}(10 \pm 1)(a \pm b)d^2.$$

Observare. Diferența mai este divizibilă încă și cu 3, deoarece $(10^3 + 10 + 1)$ și $30ab$ sunt $\mathcal{M} 3$, așa că putem spune:

$$N^3 - N'^3 = \mathcal{M} 27(a - b)d^2.$$

61. Se cere un număr de trei cifre divizibil cu 17, așa ca suma puterilor a 17-a a celor trei cifre să se dividă cu 17.

E. ȘTEFĂNESCU.

R. O cifră a fiind primă cu 17, reese după teorema lui FERMAT, că a^{17} divizat cu 17 dă restul a . Deci suma celor trei cifre este 17. Diferența dintre număr și suma cifrelor, divizată cu 9 se va divide cu 17. Reese că de 6 ori cifra sutelor micșorată cu a zecilor, trebuie să dea un multiplu de 17, adică 0, 17, 34, sau 51. Prima ipoteză duce la cifra unităților peste 9; a doua la numărul 476, a treia la numerele 629 și 782, iar ultima la numărul 925.

62. Fie A și B intersecțiile cercurilor C_1 și C_2 . Dacă coardele AC și BD, din cercurile C_1 și C_2 , fac între ele un unghi constant φ , punctul P de întâlnire al dreptelor AD, BC descrie un cerc trecând prin A și B și reciproc.

MIRON NICULESCU.

R. Fie N intersecția dreptelor AC și BD. Notând cu θ unghiul APB, avem :

$$\theta = 180^\circ - \widehat{ACB} - \widehat{CAD}.$$

Dar unghiul ACB este constant, iar :

$$\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD}$$

și :

$$\widehat{CAB} = \widehat{ABD} - \varphi$$

...

$$\widehat{CAD} = \widehat{ABD} + \widehat{BAD} - \varphi = 180^\circ - \widehat{ADB} - \varphi$$

deci :

$$\theta = \widehat{ADB} - \widehat{ACB} + \varphi = \varphi + \text{const.}$$

63. Să se demonstreze relația

$$\frac{a^2}{r_b + r_c} + \frac{b^2}{r_c + r_a} + \frac{c^2}{r_a + r_b} = (2R - r).$$

EMIL ȘTEFĂNESCU.

$$\text{Avem } \cotg \frac{1}{2}A = \frac{p}{r_a} = \frac{p-a}{r} = \frac{a}{r_a - r}, \quad \therefore \quad \frac{a(p-a)}{r} = \frac{a^2}{r_a - r}$$

$$\text{Dar } r_b + r_c = S \left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right) = \frac{S \cdot a}{(p-b)(p-c)}$$

$$\therefore r_b + r_c = a \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} = a(p-a) \sqrt{\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{a(p-a)}{r}.$$

$$\text{Deci } \frac{a^2}{r_b + r_c} = r_a - r; \quad \sum \frac{a^2}{r_b + r_c} = r_a + r_b + r_c - 3r = 4R + r - 3r = 2(2R - r).$$

64. Să se arate că în orice triunghi, avem relațiunea

$$\sum \frac{b+c}{r_a} = 4 \cotg \omega,$$

ω fiind unghiul lui BROCARD al triunghiului.

TR. A. DORDÉA.

R. Avem: $\cotg B + \cotg C = a/h_a$, etc.

$$\therefore 2 \cotg \omega = \sum a/h_a.$$

Însă: $1/h_a = 1/2 (1/r_b + 1/r_c)$, $\therefore 2 a/h_a = a/r_b + a/r_c$, etc.

65. Să se calculeze:

$$\sqrt[ei]{i}.$$

L. WEISS.

R. Din

$\cos x + i \sin x = e^{ix}$, când $x = \pi/2$, scoatem:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}},$$

sau

$$\sqrt[ie]{i} = e^{\frac{\pi}{2e}}.$$

Deci

$$\sqrt[ie]{i} = \frac{\pi}{2e} = 0,5777 \dots$$

și

$$\sqrt[ei]{i} = 0,685 \dots$$

66. Se dau funcțiunile

$$y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \quad u = L \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \quad \text{să se demonstreze relațiunea}$$

$$\frac{1}{u'} + E \frac{1}{y'} = \frac{f_2(eu + \varepsilon)}{f_1' - f_2' eu}, \quad \text{unde } \varepsilon = \pm 1.$$

B. M. BARBĂLATT.

R. Se va observa că

$$y' = \frac{f_1' f_2 - f_2' f_1}{(f_2)^2}, \quad u' = \frac{f_1' f_2 - f_2' f_1}{f_1 f_2}, \quad \text{iar } eu = \frac{f_1}{f_2}.$$

67. Să se demonstreze că funcțiunea

$$f(u) = \frac{\sigma(3u)\sigma(4u)}{\sigma(5u)}.$$

este eliptică.

M. GHERMĂNESCU.

R. Se ține seamă de relația

$$\sigma(u + 2\omega) = e^{-2\gamma(u+\omega)} \cdot \sigma u \quad \text{Se găsește } f(u + 2\omega) \equiv f(u).$$

PROBLEME PROPUSE.

3151. Dacă un număr întreg este suma a două patrate perfecte, orice putere întreagă a sa va fi suma a două patrate perfecte.

M. GHERMĂNESCU.

3152. Un număr este scris numai cu cifra a , iar indicatorul lui numai cu cifra $(a-1)$; care este acel număr?

CĂPITAN I. LINTEȘ.

3153. Fie I centrul cercului înscris unui triunghi ABC dreptunghic în A . Pe laturile BA și CA , se iau punctele C_1 și B_1 așa ca:

$$BC_1 = CA \quad \text{și} \quad CB_1 = BA.$$

Dacă M este mijlocul lui B_1C_1 , să se demonstreze că bisectoarele unghiului AIM întâlnesc laturile triunghiului ABC și înălțimea AH în 6 puncte N, P, Q, N', P', Q' , așa fel în cât:

$$BN = CP = AQ \quad \text{și} \quad BN' = CP' = AQ'.$$

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

3154. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, în care AB e latura perpendiculară pe baze. Paralela dusă la baze prin intersecția I a diagonalelor trapezului, întâlnește latura AB în E . Să se demonstreze că dreapta EI este bisectoara unghiului CED .

N. IONESCU-ZANE.

3155. Să se demonstreze că triunghiul format de centrele a trei cercuri oarecare este ortologic cu triunghiul format de polarele centrului radical al acestor cercuri, în raport cu fiecare din ele.

ILIE IONESCU-BREZUICA.

3156. Să se verifice identitatea:

$$\sum \frac{a^2(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} = \left[\sum \frac{a(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} \right]^2,$$

sumele fiind întinse la permutările circulare între a, b, c .

EMIL ȘTEFĂNESCU.

3157. Să se demonstreze că determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 40^{146} & -41^{146} & 9^{146} \\ -41^2 & 9^2 & 40^2 \\ 40^{290} & -41^{290} & 9^{290} \end{vmatrix}$$

este divizibil cu 29393.

F. NEGRETZU.

3158. Să se rezolve ecuația

$$(1+i)^x + x = 0,$$

i fiind unitatea imaginară.

M. FOCȘĂNEANU.

3159. Fie R raza cercului circumscris unui triunghi ABC și d_a , d_b , d_c porțiunile din diametrele cercului circumscris cuprinse între vârfuri și laturile opuse a , b , c . Să se demonstreze relațiile

$$\frac{a^2}{d_a} + \frac{b^2}{d_b} + \frac{c^2}{d_c} = 6R,$$

$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} = \frac{2}{R}.$$

MIRCEA ADAM.

3160. Pe o stradă îngustă, este instalată o linie dublă, pe care circulă tramvaiele în cele două sensuri. Pe o linie, un tramvai merge cu 12 km/oră; din partea opusă, vine un altul cu 18 km/oră, iar în urma acestuia, un automobil cu 38 km/oră. La un moment dat, conducătorul automobilului se decide să o ia înaintea tramvaiului, în urma căruia se găsiă, ca să se strecoare printre cele două tramvaie. În acest moment, distanța liberă între cele două tramvaie eră de 90 m, iar între automobil și cel de al doilea tramvai, 40 m. Știind că lungimea tramvaiului este 9 m, a automobilului 6 m și că distanța liberă între tramvaie, când ele se încrucișează, este de 50 cm, iar lățimea celor 3 vehicule 2 m, se cere:

1. Cât timp a durat între decizia conducătorului automobilului și întâlnirea celor trei vehicule, presupunând că vitezele rămân constante și sunt cele indicate mai sus?

2. Dacă s'a întâmplat vre-un accident, presupunând că conducătorul automobilului a condus cu cea mai mare abilitate?

GH. EM. FILIPESCU.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (2838, 971, 3034, E, P); Angelescu Tr. (2978, 3059, 97, E); Antoniu I. (3037); Arcadian N. (2354, 77, E); Barbălat M. B. (3126, E); Bercoșici Emil (3120, 37, 39); Berdan C. (2891); Bernstein M. (P); Blaha N. (3146); Bleiweiss P. (3072, 139, 43); Blumenfeld David (2864, 3137, 43, 49, E); Bocancia K. (3137); Bogdan G. (P); Boju Rosetel (3137, 39); Bolgiu Ovidiu (3103); Botea N. (2354, 81, 3047, 57, 62, 67, 72, 97, 120, 37, 39, 43, E, P); Brătescu H. (3143); Brătescu Danubiu M. (3149); Brüll Leon (3047, 72, 117, 43); Burstin O. (3037, 117); Bușilă A. (3097); Cădere R. (3097, 139); Căldăraru L. (3059, 97, 137, 39); Ciorănescu I. C. (3067, 117, E, P); Coca Adella (3143); Constantinescu Arghir (3137, 39); Constantinescu N. N. (3137, 39); Constantinescu P. (3059); Coșniță V. (3037, 149, E, N); Costăchescu I. (3137, 39); Dâmboianu G. (3143, P); David Gh. (3097, E, P, R); Dragomir M. I. (2694, 3137, 39, P); Dumitrescu Al. (3137, 39); Dumitrescu G. M. (3120); Ene Alex. (3137, 39); Florescu O. (P); Focșeneanu M. (2512, 996, 3044, 126, 36, 46, A, E, N, P); Gabrielescu V. (3120, 37); Gataianu B. (3143); Georgescu Chiriac (3117); Georgescu E. (3117, 37); Georgescu-Vat N. I. ((3097); Ghelber M. (3117, 39, E); Ghinsberg E. (3097); Goldstein I. (3126); Goldstein M. (3117, 37, 43, P); Grădiny Gh. (3139); Grigorescu L. Ion (3117, 37, 39); Groșoreanu Gh. (3046, 62); Grünbaum M. (3126, 46, P); Gulian Emil (3031, 137); Hirsch Ion (3137); Huzuneanu G. (3143); Iliescu Petre (3137); Ionescu Angelo (3120, 37, 39); Ionescu-Brezuica Ilie (2575, 3034); Ionescu C. Corneliu (3120, 43); Ionescu Paul (3062, 67, 137, E, P); Ionescu-Zane Gh. (3137, 39, 43); Ionescu-Zane N. (3115); Katz Pincu (3043, 72); Katz S. (E); Lăzărescu T. I. (3117, 37, E); Lăzărescu Șt. (3043, 67, 97, 122, 39, 43); Lăzărescu V. (3143); Marcus Fr. (P); Marin Șt. (2978, 3043, 120, 47); Marinescu I. (3143); Mihăilescu Romeo (3137, 39); Mihoc Gh. (3117, 37, 39); Miu I. (3143, E); Novac A. (3097, 117, 37, 39); Opran Al. (3137, 39, E); Oprescu Gh. (3139); Orănescu Octav (2459); Pălărieru E. (3059); Panătescu Aurel (3117, 39); Pătroianu M. (3117, 37, 39, 43); Popea O. (3097, N); Popescu C. (3047); Popescu Dorin (3067, 87, 97, 127, 20, 37, 39); Popescu F. (3143, E); Popescu Marin (3137); Popescu Nicolae (3117); Popovici Th. I. (3062, 64, 117, 20, 37, 39, E, R); Popoviciu Tib. (3108); Popp E. (3143); Rabinovici F. (3072, 97); Rădulescu S. (3143); Rădulescu T. (R); Reinhorn B. (3021, 47, 137, E); Reinhorn M. (3143, P); Reiss I. B. (3137, 39); Samoilă D. (3097, E); Schächter O. (3117, 37, 39); Schönfeld C. (2864, 56, 3034); Sergheiev I. (3059); Simionescu G. (3143, E, P); Smărăndescu D. (3067); Spacu G. P. (3120, 37, 39); Staicu D. I. (3137); Stamatiu M. (3073); Stănculescu C. (E); Stăvrat M. (3137, 39); Stoica A. (3143, P); Șuselescu I. (3137, 39); Tailer G. (3143); Tauber Alex. (3137, 39, 49); Teodorescu M. D-tra (3137, 39); Tomescu Al. (3039); Tunaru Tr. (3120, 37, 39); Udrisky Tr. (3115, 25, 37, 39); Urzică A. (3137, 39); Vasilescu A. M. (3059, 120, 39, 43); Vasilii C. I. (2922, 3072, 97, 137, 39, 43, E, P); Weiss Leon (2298, 3024, 117, 26, 36, 37, 39, 46, E, N, R); Weiss S. (2856, 3083, 137, E).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2031, 35, 108, 16, 278, 95, 318, 29, 47, 54, 77, 94, 95, 428, 40, 56, 58, 61, 87, 640, 43, 51, 75, 82, 83, 89, 701, 19, 73, 827, 35, 56, 61, 64, 72, 79, 95, 902, 10, 13, 29, 32, 46, 69, 71, 72, 78, 80, 91, 93, 3007, 13, 17, 19, 53, 54, 70, 71, 77, 84, 85, 86, 87, 91, 92, 93, 96, 101, 02, 03, 04, 09, 10, 11, 13, 18, 21, 23, 28, 30, 31, 32, 33, 35, 38, 40, 42, 44 și 45 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

28 VOLUME

Colecțiunea întreagă Lei 1500,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 70 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI și XXV, care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie*. (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

2. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. N. Abramescu, *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăugită*, 1921. (Epuizată).

4. A. G. Ioachimescu și G. Țițeica, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. Tr. Lalescu, *Tratat de Geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăugită*, 1923 Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice Lei 20,—

7. Gh. Lazăr, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) Lei 5,—

8. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăugită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme Lei 60,—

9. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, *Vocabular Matematic* Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăuga taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul*. Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septembrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca „Gazetei Matematice“, se vor trimite D-lui: I. D. Teodor, Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la casierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București.

Asociațiunea pentru cultura
și literatură poporului Român din



Sibiu

GAZETA MATEMATICĂ

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXIX.

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1924 .

SUMARUL

1. Teoreme asupra triunghiului Grigore C. Moisil
2. Asupra dreptelor lui Simson tangente
la cercul celor nouă puncte Alexanaru I. Guțu.
3. Note Matematice : 52—59.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri 109.
7. Probleme rezolvate : 2644, 2693, 2743, 3048, 3063, 3080, 3087,
3130, 3137, 3143.
8. Exerciții : 68—77.
9. Probleme propuse : 3153, 3161—3170.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET

1924

SPRE ȘTIINȚA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică”** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXIX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politehnică din București, **Tr. Lalescu**, Doctor în Matematici, Profesor Universitar și **I. D. Teodor**, Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Școala Politehnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice” se vor trimite D-lui GEORGE BORNEANU, Inginer, Directorul Fabricilor de chibrituri și timbre, București.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor redia în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela D-l Cassier *I. D. Teodor*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poștă.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evita confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

În vederea sporirii taxelor poștale, corespondenții pot trimite de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsa spații albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecință.

Nu se admite însă a se trata pe aceeași foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, creațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ”, trebuie să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 56, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 53, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 16, 26, 36, 47, 53, 56, 61, 95, 3005, 08, 13, 19, 42, 45, 55, 60, 69, 75, 89, 90, 95, 96, 100, 07, 09, 12, 14, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 40, 41, 48, 50, 52, 53, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70.

GAZETA MATEMATICA

ANUL XXIX

SUPLIMENT

No. 8

RECREAȚIUNI

1. **Importanța numărului 12.** În „Eroi” de THOMAS CARLYLE, editura „Luceafărul” la pagina 36, se poate citi:

„Numărul *doisprezece*, cel mai divizibil dintre toate, care poate fi împărțit în două, în trei, în patru, în șase, numărul cel mai însemnat, — acest lucru a fost suficient ca să determine *Semnele zodiacului*, numărul fiilor lui ODIN și nenumărați alți *doisprezece*. Orice șvon nesigur de număr avea trebuința să se fixeze la *Doisprezece*. Tot așa și pentru orice altă materie”.

Observ că pagina dela care este luată citația aceasta este un număr mai divizibil decât 12 și mă întreb, ce s’ar putea spune despre divizibilitatea lui $n!$ atunci când se consideră 12 ca numărul cel mai divizibil!

G. B.

* * *

2. **Numere de patru cifre sub 1000.** Existența unor asemenea numere reese imediat din enunțul și răspunsul la Exercițiul 32 Anul XXVIII pag. 236. Enunțul cere numere de patru cifre, căci vorbește de a treia și de ultima. Apoi răspunsul spune: „Nu poate fi vorba de matematică română înainte de anul 1000”. Cu alte cuvinte ar putea exista numere de patru cifre ale anilor înainte de anul 1000!

L. WEISS.

* * *

3. **Diverși dublodecalitri!** La un examen:

- *Profesorul.* Câți litri are un dublodecalitru?
- *Elevul.* În matematică are douăzeci.
- *Profesorul.* Există cazuri când nu are 20 de litri?!
- *Elevul.* Da, după trebuință.
- *Profesorul.* Unde ai văzut asta?
- *Elevul.* Tata are două rânduri, unele mai mari și altele mai mici ca 20 de litri.
(Elevul erea fiul unui cerealist!)

* * *

4. **Soluția problemei 2899.** În fine! S’a găsit un corespondent transdanubian care a rezolvat această problemă. Iată soluția completă:

„Numărul 1 îndeplinește condițiunile problemei, și de oarece enunțul îmi spune: *un număr este media aritmetică...* și mai apoi mă întreabă: *Care este acel număr?* reese imediat că unul este singurul număr admisibil”.

Un sfat aceluia corespondent: Apucă-te de avocatură!

I. I.

* * *

5. **Proprietatea fundamentală a triunghiului isoscel.** Această proprietate este: Într’un triunghi isoscel, la laturile egale se opun unghiuri egale.

Pentru a demonstra această, considerăm triunghiul ABC, în care avem :

$$AB \neq AC$$

Suprimând factorul comun A, ne rămâne :

$$B = C,$$

ceea ce era de demonstrat.

M. ADAM.

* * *

6. **O nedomirire.** La o lecțiune de fixică se explică :

— *Profesorul.* La oglinzile concave, când corpul luminos este în focar, imaginea este la infinit.

— *Un elev.* Vă rog, Domnule profesor, imaginea este reală sau virtuală ?

— *Profesorul.* Știe cineva să dea răspunsul ?

— *Alt elev.* Depinde după cum imaginea este la plus infinit sau la minus infinit.

— *Profesorul.* Așa este ; continuăm mai departe lecțiunea !

M. ADAM.

* * *

7. **Interpretarea soluțiilor negative.** Pe când se învătă la algebră interpretarea soluțiilor negative, se anunță o excursiune, pentru care s'a făcut o reducere de 75% pe Căile ferate. Un elev, fiu de funcționar, mai avea, ca atare, 50% reducere. El socotește dar că i se va acorda în total 125% reducere, și că deci are de plătit pentru drum numai—25%. A plecat la drum fără nici un ban, socotind că i se va da de către Căile ferate dreptul său de 25% cu care să poată întâmpina cheltuielile de mâncare.

Socoteala ereă bine făcută a casă, dar nu s'a potrivit cu cea din gară !

F. NEGRETZU.

* * *

8. **Matematica în anatomie.** Același manual de anatomie, care ne-a procurat formula dentară :

$$\frac{10}{10} = 20,$$

mai spune în altă parte :

a) La pagina 104 : „...suma și rezultanta imaginilor sau reprezentărilor eșite din percepțiunea simțurilor“.

b) La pagina 105 : „Inteligența este o funcție a substanței cenușii“.

c) La pagina 101 : „fibre de proecțiune“.

E. ILIESCU,

* * *

9. **Matematica și feminismul.** O anonimă cititoare a *Gazetei Matematice*, mi-a trimis următoarea demonstrație asemănătoare aceleia ce am dat în Suplimentul No. 1. D-sa pornește dela identitatea :

$$NA = NA,$$

ii înmulțește ambele părți cu U și cu egalitatea $1 = O!$ și obține :

$$UNA = NOUA!$$

Anonima pare a conchide de aci că o femeie face cât nouă bărbați.

Nimic însă nu ne împiedică să zicem „nouă femei”. Fiecare poate admite soluția care îi convine. Eu însă deduc de aici: „Ce mi-i una, ce mi-i nouă!”

M. G.

10. **Zestre eternă.** Matematicianul indian BHASKARA a scris o carte de matematică, căreia i-a dat numele ficei lui, *Lilavati*. În scrisoarea prin care o anunță despre acest lucru, zice:

„Am scris o carte care va purta numele tău și care va viețui în secolele viitoare. Un bun renume este o a doua viață și baza vieții eterne”.

L. I.

11. $3 = 0$. Se știe că avem:

$$\frac{u_1}{1+u_1} + \frac{u_2}{(1+u_1)(1+u_2)} + \dots + \frac{u_n}{(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)} = 1.$$

Facem $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3, \dots, u_n = n, \dots$ și vom avea:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{n}{2 \cdot 3 \dots (n+1)} = 1,$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{n}{2 \cdot 3 \dots (n+1)} = 3,$$

$$\sum \frac{n}{(n+1)!} = 3.$$

Dar avem:

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = e - e = 0.$$

Deci:

$$3 = 0.$$

F. NEGRETZU.

12. **Nimic decât zero.** Să presupunem că a nu ar fi zero. Avem evident:

$$a \cos \pi + a \sin \pi = -1,$$

$$a(1 + \cos \pi + \sin \pi) = 0,$$

$$a(2 \cos \pi/2 + 2 \sin \pi/2 \cos \pi/2) = a(\cos \pi/2 + \sin \pi/2) = 0,$$

$$a(\sin \pi/2) = 0$$

și cum $\sin \pi/2$ este 1, reiese $a = 0$, ceea ce eră de demonstrat.

F. MARCUS.

13. **O problemă propusă.** Un corespondent ne trimete pentru propus o problemă de trigonometrie, pe care o reproducem întocmai, cu soluția autorului:

În orice triunghi:

$$S = \sum h_a^2 \operatorname{tg} A.$$

X. Y.

Fie ABC un triunghi cu oarecare și O centrul cercului circumscris lui. Unim pe O cu A, B, C. Înălțimile triunghiurilor astfel formate fiind:

$$\frac{a}{2 \operatorname{tg} A}, \frac{b}{2 \operatorname{tg} B}, \frac{c}{2 \operatorname{tg} C},$$

aria triunghiului va fi:

$$S = \frac{a^2}{4 \operatorname{tg} A} + \frac{b^2}{4 \operatorname{tg} B} + \frac{c^2}{4 \operatorname{tg} C},$$

$$\therefore \frac{1}{S} = \frac{4 \operatorname{tg} A}{a^2} + \frac{4 \operatorname{tg} B}{b^2} + \frac{4 \operatorname{tg} C}{c^2},$$

$$\therefore S = \frac{4S^2 \operatorname{tg} A}{a^2} + \frac{4S^2 \operatorname{tg} B}{b^2} + \frac{4S^2 \operatorname{tg} C}{c^2} = \sum h_a^2 \operatorname{tg} A. \quad \text{Q E D.}$$

V. C.

14. $0 = 1$. Avem:

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi,$$

$$i = \frac{-1 - \cos \pi}{\sin \pi},$$

care este $0/0$. Aplicăm regula lui L'HOSPITAL și avem:

$$i = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \operatorname{tg} \pi = 0,$$

$$\therefore i^2 = 0, \therefore -1 = 0, \therefore (-1)^2 = 1 = 0.$$

E. ȘTEFĂNESCU.

15. **Mecanica în literatură.** JULES VERNE în „Ocolul pământului în 80 de zile“, se leagă pe ici, pe colo, de matematică. Așa găsim:

„Matematicăste voiu sări“.

„Cizmele și ghetetele descriau în aer niște traiectorii foarte matematice și se auzi“.

16. **Elogii Algebrei.** „O știință bine tratată nu este decât o limbă bine făcută... Algebra este o limbă bine făcută și este singură“.

CONDILLAC.

„Geometrul trebuie să se încrează în calculul algebric mai mult decât în propria lui judecată“.

EULER.

„E ușor ca algebra“.

LAGRANGE.

„Algebra, ca și toate limbile, are marii ei scriitori, cari știu să pună, în fiecare chestiune ce tratează, pecetea geniului lor“.

BERTRAND.

„Această scriitură ar fi un fel de algebră generală și ar da mijlocul să raționăm prin calcul, așa încât în loc să zicem „discutăm“ am zice „calculăm“, Și s'ar putea atunci ca erorile de raționament să nu fie decât erori de calcul, pe care le-am putea descoperi prin probe, ca în aritmetică“.

LEIBNIZ.

„Algebra planează, pentru a zice astfel, pe deasupra aritmeticei și geometrii“.

LAGRANGE.

I. I.

TEOREME ASUPRA TRIUNGHIULUI.

(Urmare și sfârșit *)

IV.

TRANSFORMAREA PRIN PUNCTE COMPLEMENTARE GENERALIZATE.

22. Noțiunea de puncte complementare și antecomplementare unui punct, așa cum a fost introdusă și cum s'a menținut, e cu mult prea restrânsă. O extindere a acestei noțiuni din geometria triunghiului o vom da aci, extindere corespunzătoare trecerii dela noțiunea de homotetie la cea de homologie din geometria proiectivă.

Fie ABC triunghiul de referință, θ un punct, Δ polara sa trilineară, $A'B'C'$ triunghiul pedal al lui θ , $M(\alpha, \beta, \gamma)$ un punct în plan. Îmi propun să determin punctul M_c , homologul lui M din ABC , în $A'B'C'$; cu alte cuvinte, homologul lui M , centrul de omologie fiind θ , axa Δ , A și A' puncte omoloage. Problema e astfel determinată. Construcția grafică e clasică și se găsește în orice manual. Punctul M_c se va găsi la intersecția dreptei $M\theta$ cu dreapta PA , în care P e punctul de intersecție al dreptei AM cu axa Δ . Analitic, vom proceda astfel:

Coordonatele lui A și M fiind:

$$(A) \quad 1, 0, 0,$$

$$(M) \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$$

acele ale oricărui punct de pe AM , vor fi de forma $\alpha_1 + \lambda, \beta_1, \gamma_1$. Dacă punctul se află pe Δ :

$$(\Delta) \quad \sum \frac{\alpha}{\alpha_0} = 0,$$

el va îndeplini condiția:

$$(\alpha_1 + \lambda)/\alpha_0 + \beta_1/\beta_0 + \gamma_1/\gamma_0 = 0,$$

$$\therefore \quad \lambda = -\alpha_0 (\alpha_1/\alpha_0 + \beta_1/\beta_0 + \gamma_1/\gamma_0),$$

iar coordonatele punctului P vor fi:

$$(P) \quad \alpha_1 - \alpha_0 (\alpha_1/\alpha_0 + \beta_1/\beta_0 + \gamma_1/\gamma_0), \beta_1, \gamma_1.$$

Coordonatele lui A' fiind $(0, \beta_0, \gamma_0)$, acele ale lui M_c , vor fi de forma:

$$\alpha_1 - \alpha_0 (\alpha_1/\alpha_0 + \beta_1/\beta_0 + \gamma_1/\gamma_0), \beta_1 + \mu\beta_0, \gamma_1 + \mu\gamma_0.$$

*) Gazeta Matematică, Vol. XXIX, pag. 161 și 205.

Dar orice punct de pe dreapta $M\theta$ va avea coordonatele sale de forma $\alpha_1 + \nu\alpha_0, \beta_1 + \nu\beta_0, \gamma_1 + \nu\gamma_0$, deci identificând aceste două expresii, căpătăm:

$$\mu = \nu = -(\alpha_1/\alpha_0 + \beta_1/\beta_0 + \gamma_1/\gamma_0),$$

iar coordonatele lui M_c devin:

$$(M_c) \quad \alpha_0(\beta_1/\beta_0 + \gamma_1/\gamma_0), \beta_0(\alpha_1/\alpha_0 + \gamma_1/\gamma_0), \gamma_0(\alpha_1/\alpha_0 + \beta_1/\beta_0). \quad (18)$$

Prin definiție, acest punct e numit *punct complementar generalizat* al punctului M , relativ la *centrul* θ ($\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$).

Vom numi *punct antecomplementar generalizat*, al unui punct $M(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, relativ la *centrul* $\theta(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, punctul M_a astfel ca M să fie complementarul lui M_a , relativ la centrul θ . Coordonatele lui M_a sunt:

$$(19) \quad (M_a): \alpha_0(-\alpha_1/\alpha_0 + \beta_1/\beta_0 + \gamma_1/\gamma_0), \beta_0(\alpha_1/\alpha_0 - \beta_1/\beta_0 + \gamma_1/\gamma_0), \gamma_0(\alpha_1/\alpha_0 + \beta_1/\beta_0 - \gamma_1/\gamma_0).$$

Punctele antecomplementare și complementare obișnuite sunt cazuri particulare pentru $\theta \equiv G, \alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 1$. În acest caz, numai triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt homotetice, centrul fiind G , axă, dreapta dela infinit.

23. Am văzut că punctele complementare generalizate admit o definiție geometrică din care decurge definiția analitică. Evident că și pentru punctele antecomplementare am putea găsi o definiție, care cere însă să definim un triunghi special relativ la punctul θ : *triunghiul antipedal*.

Definiția acestui triunghi nu am găsit-o, așa că e necesar s'o indic, arătând și câteva proprietăți ale lui. Nu e însă imposibil ca ele să fi fost menționate alt undevă, căci se prezintă foarte natural.

Numim *triunghiul antipedal al unui punct* θ , triunghiul $A''B''C''$, așa fel că, considerat în acest triunghi $A''B''C''$, triunghiul ABC de referință, e triunghiul pedal al lui P .

Evident că triunghiurile ABC și $A''B''C''$ sunt omologice, centru fiind θ , axă Δ . Putem construi triunghiul antipedal astfel: prelungim latura $A'B'$ a triunghiului pedal până când întâlnește pe AB în C_1 . Dreapta C_1C e latura $A''B''$ a triunghiului antipedal; la fel obținem celelalte laturi. Astfel, construcția de mai sus ne sugerează o nouă definiție:

Triunghiul antipedal al unui punct θ , e triunghiul format de punctele conjugate armonic ale lui θ , în raport cu triunghiul.

Considerând triunghiul antipedal, vom defini geometric punctul M_a , antecomplementarul lui M , ca fiind punctul omolog al lui M din ABC , considerând pe M_a în triunghiul antipedal $A''B''C''$ al centrului θ .

24. Două observații, de altfel foarte simple, care totuși s'ar putea considera ca generalizări ale problemei 2740 a d-lui Locot. I. LINTEȘ și a problemei 2885 a d-lui M. GHERMĂNESCU.

Teorema XXVIII. *Complementarul și antecomplementarul generalizat al unui punct, sunt colineare cu punctul considerat și cu centrul de transformare.*

Teorema XXIX. *Dacă trei drepte sunt concurente într'un punct, complementarele și antecomplementarele lor sunt concurente în complementarul și respectiv antecomplementarul punctului de concurență.*

Evident că dreptele complementara și antecomplementara dreptei considerate se vor considera tot ca drepte omoloage în ABC , $A'B'C'$ și $A''B''C''$.

25. Evident că transformarea prin puncte complementare generalizate poate fi o sursă de proprietăți noi. Acolo unde însă această transformare e extrem de interesantă, e studiul conicelor. Înainte de a arăta principiul, voi afla o proprietate a acestor conice, care, fără să fie demonstrată prin această transformare, mi-a fost sugerată de observarea, că putem considera cercul celor nouă puncte ca figura complementară obișnuit (în raport cu G), a cercului circumscris. Dar într'o Notă din G. M. (vol. XXVI pag. 173), d. ARGHIRIADI demonstrează, în chip geometric, teorema :

„Cele trei drepte ce unesc piciorul unei înălțimi cu punctele unde mediana, ce pleacă din acelaș vârf ca și înălțimea considerată, e tăiată de cercul celor nouă puncte, sunt concurente“.

Transformată omotetic în raport cu G , observând că omotetica laturei BC e mediana exterioară a vârfului A , iar mediana e propria-i transformată, putem enunța :

„ $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ fiind punctele unde medianele interioare și exterioare taie cercul circumscris, dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt concurente.

Generalizarea se prezintă imediat, considerând în loc de cercul circumscris o conică circumscrisă Γ_c , în loc de mediane, un sistem

oarecare de ceviane concurente într'un punct P și cevianele armonice conjugate lor.

Fie $\alpha_0 \beta \gamma + \beta_0 \alpha \gamma + \gamma_0 \alpha \beta = 0$,

ecuația conicei, iar $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$ punctul de întâlnire al cevienelor. Ecuațiile acestor ceviane și ale celor armonice conjugate vor fi :

$$(AA_1) \quad \gamma_1 \beta - \beta_1 \gamma = 0, \quad (AA_2) \quad \gamma_1 \beta + \beta_1 \gamma = 0$$

ș. a. m. d.

Punctul A_1 , unde dreapta AA_1 taie conica, va avea coordonatele :

$$-\alpha_0 \beta_1 \gamma_1, \quad \beta_1 (\beta_0 \gamma_1 + \gamma_0 \beta_1), \quad \gamma_1 (\beta_0 \gamma_1 + \gamma_0 \beta_1),$$

iar A_2 :

$$\alpha_0 \beta_1 \gamma_1, \quad \beta_1 (\gamma_0 \beta_1 - \beta_0 \gamma_1), \quad \gamma_1 (\beta_0 \gamma_1 - \gamma_0 \beta_1).$$

Ecuația dreptei $A_1 A_2$ va fi :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha_0 \beta_1 \gamma_1 & \beta_1 (\beta_0 \gamma_1 + \gamma_0 \beta_1) & \gamma_1 (\beta_0 \gamma_1 + \gamma_0 \beta_1) \\ \alpha_0 \beta_1 \gamma_1 & \beta_1 (\gamma_0 \beta_1 - \beta_0 \gamma_1) & \gamma_1 (\beta_0 \gamma_1 - \gamma_0 \beta_1) \end{vmatrix},$$

sau :

$$(A_1 A_2) \quad (\beta_0^2 \gamma_1^2 - \gamma_0^2 \beta_1^2) \alpha + \alpha_0 \beta_0 \gamma_1^2 \beta - \alpha_0 \gamma_0 \beta_1^2 \gamma = 0.$$

De asemenea :

$$(B_1 B_2) \quad -\beta_0 \alpha_0 \gamma_1^2 \alpha + (\gamma_0^2 \alpha_1^2 - \alpha_0^2 \gamma_1^2) \beta + \beta_0 \gamma_0 \alpha_1^2 \gamma = 0 \quad \text{și}$$

$$(C_1 C_2) \quad \gamma_0 \alpha_0 \beta_1^2 \alpha - \gamma_0 \beta_0 \alpha_1^2 \beta + (\alpha_0^2 \beta_1^2 - \beta_0^2 \alpha_1^2) \gamma = 0.$$

Dar determinantul coeficienților e identic nul :

$$\begin{vmatrix} \beta_0^2 \gamma_1^2 - \gamma_0^2 \beta_1^2 & \alpha_0 \beta_0 \gamma_1^2 & -\alpha_0 \gamma_0 \beta_1^2 \\ -\beta_0 \alpha_0 \gamma_1^2 & \gamma_0^2 \alpha_1^2 - \alpha_0^2 \gamma_1^2 & \beta_0 \gamma_0 \alpha_1^2 \\ \gamma_0 \alpha_0 & -\gamma_0 \beta_0 \alpha_1^2 & \alpha_0^2 \beta_1^2 - \beta_0^2 \alpha_1^2 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Deci putem enunța :

Teorema XXX. Dacă $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sunt punctele unde un sistem de ceviane concurente și conjugatele lor armonice înțepă o conică circumscrisă, dreptele $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$ sunt concurente.

Desigur că și alte proprietăți ale cercului celor nouă puncte, corespunzătoare unor proprietăți ale cercului circumscris, se pot generaliza conicelor circumscrise. De oarece însă nu acesta e obiectul acestei părți a studiului meu, mă mărginesc la această pildă.

26. Am revenit astfel la conice, și cu aceasta, vom încheia. O proprietate simplă a celor două elipse ale lui STEINER: E_{φ_1} și E_{φ_2} , aceea de a fi homotetice în raport cu centrul de omotetie G , ne conduce la o frumoasă generalizare. Proprietatea elipselor E_{φ_1} și E_{φ_2} o cred cunoscută, deși nu am găsit-o expusă, căci e cu totul simplă și se demonstrează substituind în ecuația lui E_{φ_1} lui α, β, γ pe $(-\alpha + \beta + \gamma), (\alpha - \beta + \gamma), (\alpha + \beta - \gamma)$, în care caz, căpătăm ecuația lui E_{φ_2} .

Generalizarea proprietății e dată de:

Teorema XXXI. *Conicele Γ_c și Γ_t , corespunzătoare unui punct θ (v. § 1), sunt homologice, centru de homologie fiind θ , axă Δ .*

Teorema se demonstrează ușor. În ecuația:

$$\alpha_1\beta\gamma + \beta_1\alpha\gamma + \gamma_1\alpha\beta = 0,$$

substituind lui (α, β, γ) , punctul său antecomplementar $[\alpha_1(-\alpha/\alpha_1 + \beta/\beta_1 + \gamma/\gamma_1); \text{etc.}]$ obținem locul complementarelor punctelor de pe Γ_c :

$$\sum \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 (\alpha/\alpha_1 + \beta/\beta_1 - \gamma/\gamma_1) (\alpha/\alpha_1 - \beta/\beta_1 + \gamma/\gamma_1) = 0,$$

$$\sum (\alpha^2/\alpha_1^2 - \beta^2/\beta_1^2 - \gamma^2/\gamma_1^2 + 2\beta\gamma/\beta_1\gamma_1) = 0,$$

$$\sum \frac{\alpha^2}{\alpha_1^2} - 2 \sum \frac{\alpha\beta}{\alpha_1\beta_1} = 0,$$

care e chiar ecuația conicei Γ_t .

Teorema e justificată. Un caz particular e:

Teorema XXXII. *Elipsa lui BROCARD e homologica cercului circumscris, în raport cu punctul și dreapta lui LEMOINE.*

Tot ca o consecință, e faptul că ω_c și ω_t , centrele conicelor Γ_c și Γ_t sunt colineare cu punctul θ , proprietate enunțată de d. CRISTEA-MATEESCU în articolul citat.

GRIGORE C. MOISIL.

Liceul „Spiru Haret,” București.

ASUPRA DREPTELOR LUI SIMSON TANGENTE LA CERCUL CELOR NOUA PUNCTE.

1. *Notățiuni.* Fie H ortocentrul, O centrul cercului circumscris, O_9 centrul cercului celor nouă puncte al unui triunghi ABC. Fie apoi:

A_1, B_1, C_1 punctele unde înălțimile AH, BH, CH întâlnesc a doua oară cercul circumscris;

A_2, B_2, C_2 punctele diametral opuse vârfurilor A, B, C;

Δ_M dreapta lui SIMSON a unui punct oarecare M de pe cercul circumscris;

ϑ_M unghiul pe care Δ_M îl face cu raza OM;

S mijlocul segmentului MH.

2. Se știe că punctul S aparține și cercului celor nouă puncte și dreptei lui SIMSON Δ_M . Deci dreapta lui SIMSON taie întotdeauna cercul celor nouă puncte, sau îi este tangentă.

Se mai știe apoi că raza SO_9 a cercului celor nouă puncte este paralelă cu raza MO a cercului circumscris, căci cercurile O_9 și O sunt figuri homotetice cu centrul de homotetie H. Rezultă de aici că unghiul pe care îl face Δ_M cu raza SO_9 este egal cu unghiul pe care îl face Δ_M cu raza OM, adică este egal cu ϑ_M .

Pentru punctul A_1 , acest unghi este ascuțit (figura presupune $\sphericalangle B > \sphericalangle C$, iar laturile unghiului ϑ luate în direcțiunile HB și OA_1); pentru punctul A_2 , acest unghi e obtuz, deci va exista un punct D pe arcul A_1A_2 pentru care $\vartheta_D = 90^\circ$ și pentru care deci Δ_D va fi tangentă la cercul O_9 .

Se observă pe figură că pentru un punct D, de pe arcul A_1A_2 , avem:

$$\vartheta_D = \sphericalangle DOA_2 + 180^\circ - \vartheta_{A_2} + \sphericalangle (\Delta_D, \Delta_{A_1}). \quad (1)$$

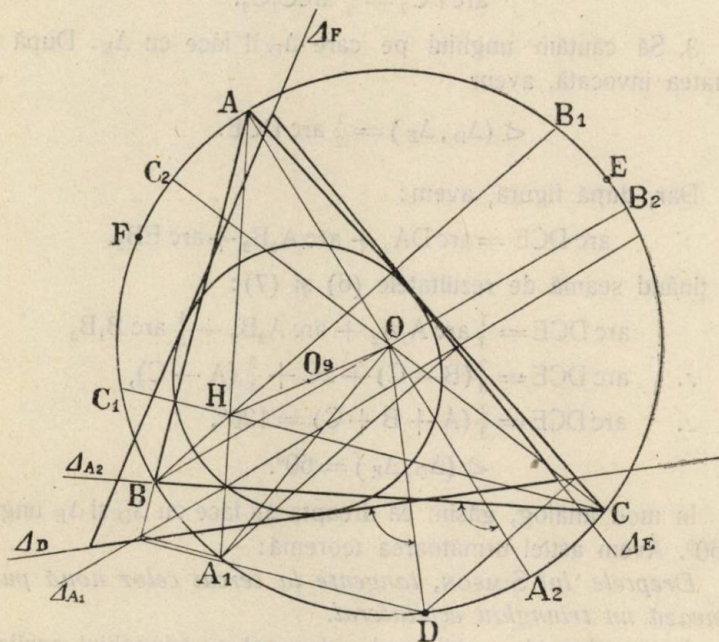
Dar pe figură se mai vede că

$$\vartheta_{A_2} = 90^\circ + \sphericalangle HAO = 90^\circ + (B - C), \quad (2)$$

căci dreapta lui SIMSON a punctului A_2 este chiar latura BC; iar

$$\sphericalangle DOA_2 = \text{măs. arc. } DA_2. \quad (3)$$

Se știe apoi că unghiul pe care'l fac între ele dreptele lui SIMSON a două puncte M și D de pe cercul circumscris, are ca măsură jumătatea arcului MD de pe acest cerc. Deci



$$\angle (\Delta_D, \Delta_{A_2}) = \frac{1}{2} \text{ măs. arc. } DA_2. \quad (4)$$

Înlocuind valorile date de (2), (3) și (4) în formula (1), obținem

$$\begin{aligned} \vartheta_D &= \frac{3}{2} \text{ arc } DA_2 + 90^\circ - (B - C) \\ \therefore \vartheta_D &= \frac{3}{2} \text{ arc } DA_2 + 90^\circ - \frac{1}{2} \text{ arc } A_1A_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Dacă în această relație facem $\vartheta_D = 90^\circ$, obținem

$$\text{arc } DA_2 = \frac{1}{3} \text{ arc } A_1A_2. \quad (6)$$

Avem deci următorul rezultat:

Punctul D de pe arcul A_1A_2 , pentru care dreapta lui SIMSON Δ_D este tangentă la cercul celor nouă puncte, se obține împărțind arcul A_1A_2 în trei părți egale și luând punctul cel mai apropiat de A_2 .

Fie E și F punctele analoage cu D situate respectiv pe arcele B_1B_2 și C_1C_2 . Avem în mod analog :

$$\text{arc } EB_2 = \frac{1}{3} \text{ arc } B_1B_2, \quad (7)$$

$$\text{arc } FC_2 = \frac{1}{3} \text{ arc } C_1C_2. \quad (8)$$

3. Să căutăm unghiul pe care Δ_D îl face cu Δ_E . După proprietatea invocată, avem

$$\sphericalangle (\Delta_D, \Delta_E) = \frac{1}{2} \text{ arc } DCE.$$

Dar, după figură, avem :

$$\text{arc } DCE = \text{arc } DA_2 + \text{arc } A_2B_2 + \text{arc } EB_2,$$

sau, ținând seamă de rezultatele (6) și (7) :

$$\text{arc } DCE = \frac{1}{3} \text{ arc } A_1A_2 + \text{arc } A_2B_2 + \frac{1}{3} \text{ arc } B_1B_2$$

$$\therefore \text{arc } DCE = \frac{2}{3}(B - C) + 2C + \frac{2}{3}(A - C),$$

$$\therefore \text{arc } DCE = \frac{2}{3}(A + B + C) = 120^\circ,$$

$$\text{deci} \quad \sphericalangle (\Delta_D, \Delta_E) = 60^\circ.$$

În mod analog, găsim că dreapta Δ_F face cu Δ_D și Δ_E unghiuri de 60° . Avem astfel următoarea teoremă :

Dreptele lui SIMSON, tangente la cercul celor nouă puncte, formează un triunghi echilateral.

Acest triunghi echilateral este egal cu triunghiul echilateral înscris în cercul O.

ALEXANDRU I. GUȚU.

NOTE MATEMATICE.

52. *Alte zece Algebre diverse.* (Vezi Nota 23 pag. 129).

41. *Antică.*

L. Mathiessen.— Grunzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. 1878.

42. *Descriptivă.*

A. Debauve.— Algèbre descriptive et applications, Paris.

43. **Formelor.** *W. Fiedler.*— Algebra der binaere Formen. Lipsca. 1862.
44. **Incepătoare.** *Smith.*— Algebra for beginners. Londra.
45. **Invariantilor.** *I. H. Grace.* — The algebra of invariants. Cambridge.
46. **Matriculară.** *W. Briggs.*— Matriculation advanced algebra and geometry.
47. **Relațiunilor.** *A. Macfarlane.*— Of the algebra of relations-ship. 1879.
48. **Tradițională.** The traditional college algebra. Vezi *Bulletin of the American mathematical Society* XXVI pag. 324.
49. **Tutorială.** *W. Briggs & G. H. Bryan.*— Tutorial algebra. 1903.
50. **Vocațională.** *G. Wentworth & D. E. Smith.* — Vocational algebra. Boston. 1911.

(Va urmă)

I. IONESCU.

53. *Asupra exercițiului 52, Anul XXVII pag. 261.* Se cerea să se arate că expresiunea :

$$3^{7n} + 7^{3n} - 10,$$

se divide cu 60. Demonstrația dată este greșită și de aceea s'a conchis că proprietatea este adevărată. De fapt se vede ușor că expresiunea se divide totdeauna cu 3 și cu 4, dar nu cu 5, afară de cazul când n este nepereche.

I. FLORESCU.

54. *Observare asupra combinărilor.* Imi propun să arăt cum se poate găsi numărul combinărilor cu repetiție pe o cale mai naturală decât acelea date prin tratatele de Algebră, plecând chiar dela modul de formare al grupelor. Dacă avem m obiecte așezate în o ordine oarecare :

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_m,$$

pentru a forma combinările ordinare ale acestor obiecte luate câte 2, se ia de ex. obiectul a_i și se pune pe rând la dreapta obiectelor $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$. Deci cu a_i se formează C_{i-1}^1 grupe. Procedând la fel cu toate obiectele afară de a_1 , vom avea deci :

$$C_m^2 = C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_{i-1}^1 + \dots + C_{m-1}^1.$$

Pentru a deduce această formulă în general, să ne închipuim că am format tabloul tuturor combinațiilor acelor m obiecte luate câte $n-1$. Va fi o grupă ce se termină cu a_{n-1} , vor fi grupe ce se termină cu $a_n, a_{n+1}, \dots, a_m$. Pentru a forma combinațiile câte n , vom proceda ca mai sus. De ex., obiectul a_{n+i} va fi pus la dreapta grupelor ce se termină cu $a_{n-1}, a_n, \dots, a_{n+i-1}$. Deci cu a_{n+i} , vom forma C_{n+i-1}^{n-1} grupe.

Prin urmare, vom avea:

$$C_m^n = C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1} + \dots + C_{n+i-1}^{n-1} + \dots + C_{m-1}^{n-1}.$$

Iată deci această formulă bine cunoscută, trasă din însuși modul de formare al combinațiilor.

Rezultă imediat formula:

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}.$$

S'ar putea obține, pe această cale, expresiunea simbolului C_m^n . Dar să trecem la determinarea simbolului k_m^n , adică numărul combinațiilor cu repetiție ce se pot face cu m obiecte luate câte n .

Vom proceda ca mai sus. Dacă vream să facem combinațiile cu repetiție luate câte 2, vom așeza obiectul a_i la dreapta obiectelor, $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i$.

Cu a_i , formăm deci k_i^1 grupe. Vom avea deci

$$k_m^2 = k_1^1 + k_2^1 + \dots + k_i^1 + \dots + k_m^1 = C_{m+1}^2.$$

Să presupunem că avem:

$$k_m^{n-1} = C_{m+n-2}^{n-1}$$

și să dovedim că formula e adevărată și pentru n . Pentru a forma combinațiile cu repetiție a m obiecte luate câte n , presupun format tabloul celor câte $n-1$. Aici vom avea grupe terminate cu $a_1, a_2, \dots, a_m$. Obiectul a_i trebuie să-l așezăm pe rând la dreapta tuturor grupelor terminate cu: $a_1, a_2, \dots, a_i$. Deci cu obiectul a_i , vom forma k_i^{n-1} grupe.

Prin urmare, vom avea:

$$k_m^n = k_1^{n-1} + k_2^{n-1} + \dots + k_i^{n-1} + \dots + k_m^{n-1}.$$

Sau, după cele admise :

$$k_m^n = C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1} + \dots + C_{m+n-2}^{n-1}.$$

În fine, după formula stabilită mai sus:

$$k_m^n = C_{m+n-1}^n.$$

TH. ANGHELUȚĂ.

55. *Asupra problemei 3094.* Se poate enunța proprietatea mai generală, următoarea :

Triunghiurile care au laturile în progresiune aritmetică, sunt asemenea, dacă raportul dintre latura mijlocie și rația progresiunii este același.

În adevăr, dacă punem :

$$a = b + r, \dots \dots \dots c = b - r,$$

și facem rapoartele a/b și c/b , găsim că sunt aceleași.

Se mai observă că în cazul triunghiului dreptunghic, rația progresiunii este raza cercului înscris în triunghi (A se vede la Culegere de probleme de Algebră de A. G. IOACHIMESCU, XVIII, 1).

AL. I. PANAITESCU.

56. *Asupra unor triunghiuri omologice.* 1. Fie ABC și A'B'C' două triunghiuri astfel ca paralelele duse din vârfurile primului triunghi la laturile celui de al doilea, să taie laturile primului în trei puncte în linie dreaptă. Se știe că A'B'C' se va bucura de aceeași proprietate față de ABC (Vezi «G. M.» vol. XXV, pag. 58, problema 2334, propusă de D-I N. ABRAMESCU). Să considerăm cazul când A'B'C' este triunghiul pedal al unui punct M față de ABC. Atunci, paralelele din A', B', C', la BC, CA, AB sunt chiar aceste laturi, care evident taie laturile corespunzătoare din A'B'C' în trei puncte colineare. De unde rezultă: *Paralelele din vârfurile unui triunghi la laturile unui triunghi omologic și înscris în el, taie laturile triunghiului în trei puncte colineare.*

În particular, când A'B'C' e triunghiul ortic al lui ABC, atunci dreapta obținută mai sus e chiar dreapta lui LEMOINE a triunghiului și deci proprietatea precedentă se poate considera ca o generalizare a dreptei lui LEMOINE.

2. Să iau acum perspectiva acestei figuri (*Rouché et Comberousse*, *Traité de Géométrie*, vol. II, p. 49 și 127) a acestei transformări. Obținem proprietatea: *Fie* A'_1, B'_1, C'_1 *punctele unde o dreaptă* Δ' *taie laturile* $BC', C'A', A'B'$. *Dreptele* AA'_1, BB'_1, CC'_1 *taie laturile triunghiului* ABC *în trei puncte* A_1, B_1, C_1 *colineare pe o dreaptă* Δ . Reciproca acestei chestiuni este evidentă.

3. Să transformăm acum teorema precedentă prin polare reciproce, luând ca cerc director sau ca conică directoare un cerc sau o conică oarecare a planului. Proprietatea precedentă se va transforma imediat în următoarea: *Fie* A'_1, B'_1, C'_1 *picioarele a trei ceviane concurente în* M' *în triunghiul* $A'B'C'$. *Dreptele* AA'_1, BB'_1, CC'_1 *se taie în punctul* M' . Reciproca acestei chestiuni este adevărată.

4. Dacă dreapta Δ' înfășoară o conică înscrisă în $A'B'C'$, atunci Δ înfășoară o conică înscrisă în ABC .

În adevăr, A'_1, B'_1, C'_1 vor descrie diviziuni homografice două câte două. Deci dreptele AA'_1, BB'_1, CC'_1 vor descrie fascicule homografice două câte două și deci punctele A_1, B_1, C_1 vor descrie diviziuni homografice două câte două. Deci Δ înfășoară o conică înscrisă în ABC . Proprietatea reciprocă e evidentă.

5. Dacă M' descrie o conică circumscrisă triunghiului $A'B'C'$, atunci M descrie o conică circumscrisă triunghiului ABC și viceversa.

Demonstrația este absolut aceeași ca la chestiunea precedentă.

B. M. BARBĂLATT.

57. Asupra notei No. 24 din G. M. No. 4, XXIX.

În această notă matematică, se dă o nouă demonstrație teoremei lui FERMAT, cu ajutorul binomului lui NEWTON, dar această demonstrație există sub o formă și mai simplă în «*Leçons D'Algèbre par E. PRUVOST et D. PIÉRON*» — première partie, pag. 50.

Aici, se stabilește relația:

$$(a+b+c+\dots+l)^m = a^m + b^m + \dots + l^m + \sum \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta \dots P_\lambda} a^\alpha \cdot b^\beta \dots l^\lambda,$$

unde $a, b, \dots, l$ sunt numere întregi pozitive, P_α reprezintă per-

mutările cu repetiție, litera i' fiind repetată de ε ori în fiecare rezultat, iar :

$$\alpha + \beta + \dots + \varepsilon + \dots + \lambda = m.$$

Dacă presupunem că m este un număr prim absolut, atunci întregul :

$$\frac{P_m}{P_\alpha \cdot P_\beta \dots P_\lambda}$$

va fi un multiplu al lui m , pentru că întregii $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, sunt mai mici ca m .

Dacă presupunem acum :

$$a = b = c = \dots = l = 1$$

și dacă numărul tuturor întregilor $a, b, \dots, l$ este r (diferit de m), atunci :

$$r^m = r + M_m,$$

de unde :

$$r^{m-1} - 1 = M_m.$$

CĂPITAN. I. LINTEȘ.

58. *Asupra rezolvării în numere întregi a ecuației :*

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Vom da o metodă simplă asupra rezolvării ecuației de mai sus. Putem scrie :

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y),$$

sau

$$(z + y)(z - y) = x^2.$$

Fie d c. m. m. c. d. al lui $(x + y)$ și $(x - y)$.

$$z + y = d\alpha$$

$$z - y = d\beta$$

α și β primi între ei

$$(x + y)(x - y) = d^2\alpha\beta = x^2.$$

Deci trebuie ca $\alpha\beta$ să fie patrat. Cum α și β sunt primi între ei, produsul va fi patrat când fiecare în parte va fi un patrat. Deci :

$$z + y = d\alpha^2$$

$$z - y = d\beta^2$$

$$\text{și } x = d\alpha\beta$$

$$\text{și} \quad z = \frac{d(\alpha^2 + \beta^2)}{2}, \quad y = \frac{d(\alpha^2 - \beta^2)}{2}.$$

x, y, z vor fi întregi când:

- 1) d este pereche, sau când
 - 2) α și β fiind primi între ei, sunt amândoi nepereche.
- Acestea sunt soluțiile cele mai generale.

EMIL ȘTEFĂNESCU.

Cl. VIII Spiru Haret.

59. Chestiuni de limită.

Dacă luăm cantitățile pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ astfel încât:

$$\lim. a_n = 1 \quad n = \infty,$$

avem, după cum se știe:

$$\lim. \frac{\lg \frac{1}{u_n}}{\lg n} = \lim. n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right),$$

unde s'a pus

$$u_n = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\therefore \lim. \frac{\lg \frac{1}{u_n}}{\lg n} = \lim. n(a_{n+1} - 1).$$

Aplicații: 1°. Dacă $a_n = \arcsin \alpha/n + 1$, atunci avem:

$$\lim \frac{\log \left[\left(1 + \arcsin \frac{\alpha}{1}\right) \left(1 + \arcsin \frac{\alpha}{2}\right) \dots \left(1 + \arcsin \frac{\alpha}{n}\right) \right]}{\log n} = \alpha.$$

2°. Dacă $a_n = 1 + k/n$, se obține:

$$\lim \frac{\log \left[\left(1 + \frac{k}{1}\right) \left(1 + \frac{k}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right]}{\lg n} = k.$$

LEON WEISS.

Cl. VII Lic. „V. Alexandri”.

CHESTIUNI DE EXAMEN

EXAMENUL DE CAPACITATE PENTRU PROFESORII DE LICEU.

PROBA DE LICENȚĂ.

Aprilie 1923.

1. Fie

$$z = \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t) dt,$$

$\varphi(t)$ fiind o funcțiune continuă de t , pentru valorile pozitive ale variabilei, afară poate de valoarea $t=0$.

a) Să se calculeze primele două derivate ale funcțiunei z .

b) Să se determine funcțiunea $\varphi(t)$, așa fel încât să avem identitatea:

$$\int_0^x [(x-t)^2 + 8x^2] \varphi(t) dt = x. \quad \varphi(1) = 2.$$

Soluția. a) Funcțiunea mai generală:

$$z = \int_0^x (x-t)^n \varphi(t) dt,$$

în care n e un număr pozitiv, se derivează după regula derivării sub semnul $\int$.

Obținem, în general :

$$\frac{d^k z}{dx^k} = n(n-1)\dots(n-k+1) \int_0^x (x-t)^{n-k} \varphi(t) dt.$$

b) Relațiunea mai generală :

$$\int_0^x [A_0(x-t)^n + A_1(x-t)^{n-1}x + A_2(x-t)^{n-2}x^2 + \dots + A_n x^n] \varphi(t) dt = F(x)$$

$$F(0) = 0.$$

este o ecuație integrală lineară tip *Volterra* de speța întâia, care admite o soluție unică, de oarece :

$$[A_0(x-x)^n + A_1(x-x)^{n-1}x + \dots + A_n x^n] = A_n x^n \neq 0, \quad \text{dacă } A_n \neq 0.$$

Se poate însă reduce la o ecuație diferențială lineară, cu ajutorul substituției a)

$$z = \int_0^x (x-t)^n \varphi(t) dt,$$

de oarece :

$$\int_0^x (x-t)^{n-k} \varphi(t) dt = \frac{(n-k)!}{n!} \cdot \frac{d^k z}{dx^k}.$$

Vom obține :

$$n! A_0 z + (n-1)! A_1 x z' + (n-2)! A_2 x^2 z'' + \dots + 1! A_n x^n z^{(n)} = n! F(x),$$

ecuație lineară tip *Euler*, care se integrează prin schimbarea de variabilă

$$x = e^t.$$

Se obține o ecuație cu coeficienți constanți, a cărei integrare nu mai prezintă dificultăți.

În cazul particular al ecuației din problemă, găsim

$$z + 4x^2 z'' = x.$$

Substituția o transformă în:

$$4z'' - 4z' + z = e^t.$$

Schimbarea de funcțiune:

$$z = u - e^t$$

conduce la

$$4u'' - 4u' + u = 0,$$

cu integrala generală

$$u = (dt + \beta)e^{\frac{t}{2}}.$$

$$\therefore z = (dt + p)e^{\frac{t}{2}} - e^t,$$

$$z = (\alpha \lg x + \beta) \sqrt{x} - x.$$

Observând că

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 z}{dx^2},$$

integrala particulară se obține imediat.

M. G.

2. Fiind dată ecuația diferențială:

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = x, \quad \therefore$$

să se determine integrala acestei ecuații, care se anulează împreună cu primele două derivate, pentru $x = 1$.

Soluția. Ecuația dată este de tipul ecuației lui *Euler*, care se reduce la o ecuație lineară cu coeficienți constanți, prin schimbarea de variabilă:

$$x = e^t.$$

Se obține ecuația

$$y''' - y = e^t,$$

care prin schimbarea de funcțiune:

$$z = y + e^t,$$

se reduce la:

$$z''' - z = 0,$$

cu integrala:

$$z = Ae^t + Be^{\alpha t} + Ce^{\alpha^2 t},$$

1, α , α^2 fiind rădăcinile cubice complexe ale unității.

Deducem :

$$y = (A - 1)e^t + Be^{\alpha t} + Ce^{\alpha^2 t},$$

$$y = (A - 1)x + Bx^\alpha + Cx^{\alpha^2}.$$

Integrala particulară cerută se determină prin condițiile :

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

M. G.

BIBLIOGRAFIE.

Mathesis. Vol. XXXVIII No. 3. Martie 1924. Bruxelles. Bibliografia triunghiului și a tetraedrului de J. NEUBERG. Asupra unei proprietăți a curbelor algebrice, de P. de LEPINEY. Asupra unei proprietăți a dreptei lui SIMSON și extensiunea ei la tetraedru, de CL. SERVAIS. APOLONIUS de PERGA, cu privire la prima traducere în limba franceză a tratatului său de „Conice”, de H. BOSMANS. Asupra spiralelor sinusoide osculante, de R. GOORMAGHTIGH.

Revista de matematicas y fisicas elementales. Anul V. No. 10 Februarie 1924. Buenos-Aires. (Număr de vacanță cu probleme rezolvate).

Journal de mathematiques élémentaires de VUIBERT. Anul 48. No. 11 Martie 1924. Paris.

Buletinul de Matematică pură și aplicată. Anul III. No. 6. Februarie 1924. București. Teoria determinantilor. Asupra unor ecuații din calculul vectorial, de N. ABRAMESCU. Societatea Studenților în matematici, de E. ABASON și T. TĂNĂSESCU.

Foia matematică. Anul I. No. 2. Chișinău. Februarie 1924. Frații zeceimale periodice simple, de N. PROFIRI.

Jurnal matematic. Vol. I. No. 5. Martie 1924. Arad. O chestiune de ortopol și de omologie, de M. GRÜNBAUM. Asupra triunghiurilor speciale, de T. POPOVICIU.

Idem. No. 6. Martie 1924. Câteva puncte, drepte și conice remarcabile într'un triunghi, de T. POPOVICIU.

M. LÉCAT. *Bibliographie des déterminants à plus de deux dimensions.* Louvain. 1924. (De vânzare la autor, Avenue des Alliés 92).

ST. N. MIREA. *Notes sur le calcul des ailes d'un avion.* Extras din *Biblioteca Cercului tehnic al României.* No. 13 — 15. București 1924.

C E R E R I.

109. Chestiunea câtului a doi determinanți se găsește tratată undeva ?

F. NEGRETZU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2644. *) *Să se găsiască două numere de câte trei cifre a și b astfel în cât să avem :*

$$a + b = \mathcal{M} 5 \quad , \quad a^2 + b^2 = \mathcal{M} 10289$$

$$a^3 + b^3 = \mathcal{M} 10867.$$

CĂPITAN I. LINTESȚ.

Considerăm :

$$a + b = 5\alpha \quad , \quad a^2 + b^2 = 10289\beta \quad , \quad a^3 + b^3 = 10867\gamma$$

și eliminând pe a și b , obținem ecuația :

$$(1) \quad 125\alpha^3 - 3.5.10289\alpha\beta + 2.10867\gamma = 0.$$

Dar

$$a^3 + b^3 = \mathcal{M} (a + b) = \mathcal{M} 5,$$

deci : $\gamma = 5\delta$ și atunci ecuația 1) devine :

$$(2) \quad 25\alpha^3 - 3.10289\alpha\beta + 2.10867\delta = 0,$$

sau :

$$(3) \quad 25\alpha^2 - 3.10289\beta + \frac{2.10867\delta}{\alpha} = 0.$$

Dar fracția : $2.10867\delta/\alpha$ trebuie să fie întreagă, deci α poate lua valorile :

1, 2, 10867, 2.10867, δ , 2δ , 10867δ , 2.10867δ și δ/m , când m este un întreg pozitiv.

Dar cum a și b sunt numere de câte trei cifre, înseamnă că :

*) Enunț rectificat.

$$(4) \quad 40 \leq \alpha < 400$$

și în acest caz, pentru α ne rămân numai valorile

$$\delta/m, \quad \delta \quad \text{și} \quad 2\delta,$$

astfel ca δ să satisfacă condiția (4 *). Făcând încercări pentru aceste valori, avem:

1) Pentru $\alpha = \delta/m$,

$$(5) \quad 25 \alpha^2 + 2.10867 m = 3.10289 \beta.$$

Ținând și aici seamă că:

$$(6) \quad 1 \leq \beta < 194,$$

deducem că:

$$(7) \quad 0 < m < 273.$$

Relația (5) se mai poate scrie:

$$(8) \quad \alpha^2 + 869 m = 1234 \beta + \frac{17 \beta - 9 m}{25}.$$

Deci trebuie ca fracția:

$$\frac{17\beta - 9m}{25}$$

să fie întreagă. Se deduce ușor că trebuie să avem:

$$\beta = (25 Q + 2) m, \text{ sau } m = (25 Q + 13) \beta.$$

Ținând seamă însă de condițiunile (6) și (7), vedem că în formulele date, $0 \leq Q \leq 8$ în prima și $0 \leq Q \leq 10$ în a doua.

Cu aceasta, relația (5) devine:

$$(9) \quad \alpha^2 = 30867 Q m + 1600 m,$$

$$(10) \quad \alpha^2 + 21734 Q \beta + 251675 \beta = 0.$$

De aici, se vede că numai (9) este valabilă, căci numerele α , m , Q și β sunt pozitive.

Condiția (4) ne arată însă că:

$$1600 < m(30867 Q + 1600) < 160000.$$

*) Ținând seamă că $a^2 + b^2 = 10867.5.z$, avem:

$$37 \leq z < 36808.$$

De unde: $0 \leq Q < 5$.

$Q = 0$, ne dă:

$$\alpha^2 = 1600, \quad \beta = 2m \quad \text{și} \quad \gamma = 5m\alpha,$$

$$\alpha = 40\sqrt{m},$$

de unde:

m	1	4	9	16	25	36	49	64	81
α	40	80	120	160	200	240	280	320	360
β	2	8	18	32	50	72	98	128	162
γ	200	1600	5400	12800	25000	43200	68600	102400	1239300

Dintre care, numai:

$$\alpha = 80, \quad \beta = 8 \quad \text{și} \quad \gamma = 1600$$

ne dau soluțiile:

$$a = 166 \quad \text{și} \quad b = 234.$$

$Q = 1$, ne dă:

$$\alpha^2 = 32467m$$

și deci $1 \leq m \leq 5$, ori pentru aceste valori nu avem patrate perfecte.

Deasemenea și pentru $Q = 2, 3$ și 4 .

II) Pentru $\alpha = \delta$, e un caz particular al cazului (I), când $m = 1$, deci e studiat.

III) Pentru $\alpha = 2\delta$, avem:

$$25\alpha^2 - 30867\beta + 10867 = 0,$$

sau

$$[\alpha^2 = 1234\beta - 434 + \frac{17\beta - 9}{25}],$$

deci:

$$\beta = 25Q + 2$$

și atunci:

$$\alpha^2 = 30867Q + 2035.$$

Cum $0 \leq Q < 5$, vom face toate încercările pentru valorile :

0, 1, 2, 3, 4

și vedem că nu obținem nicio soluție.

Așa dar singurele soluții sunt: 166 și 234.

Notă. Problema s'ar putea studia și în cazul general, datorită numeroaselor cazuri de încercări, însă ea își pierde din eleganță.

CĂP. I. LINTEȘ.

PROBLEMA. 2693. *Fie G centrul de greutate al unui triunghi ABC; AA', BB', CC' bisectoarele interioare ale triunghiului și Δ una din înălțimile triunghiului A'B'C' format prin unirea picioarelor bisectoarelor interioare.*

Să se demonstreze că dacă centrul de greutate G se află pe dreapta Δ, triunghiul ABC nu este neapărat isoscel, adică pe lângă cazul triunghiurilor isoscele, există și triunghiuri scalene ABC, al căror centru de greutate G se află pe una din înălțimile triunghiului A'B'C' (triunghiuri pseudo-isoscele).

Să se afle relațiunea dintre unghiurile A, B, C ale unui astfel de triunghi pseudo-isoscel și limitele între care este cuprins unghiul A, când Δ este înălțimea scoborită din A' pe B'C'.

V. CRISTESCU.

Soluție dată de D-nul TIBERIU POPOVICIU (Elev cl. VIII, Liceul Moise Nicoară, Arad).

Ecuția dreptei Δ (perpendiculara scoborită din A' pe B'C'), în coordonate trilineare normale, este

$$\frac{\cos B - \cos C}{1 + \cos B + \cos C} x - y + z = 0. \quad (1)$$

Scriind că coordonatele normale ($\cos A$, $\cos B$, $\cos C$), ale centrului de greutate G, verifică ecuația (1), obținem :

$$\frac{\cos B - \cos C}{1 + \cos B + \cos C} \cdot \frac{1}{\sin A} + \frac{\sin B - \sin C}{\sin B \sin C} = 0. \quad (2)$$

După câteva transformări, ecuația (2) se poate scrie :

$$\cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}(B-C) \left[2 \sin^2 \frac{1}{2}A - \frac{\sin B \sin C}{1 + \cos B + \cos C} \right] = 0.$$

Pentru ca G să se afle pe Δ , putem deci avea :

1) $\cos \frac{1}{2}A = 0$, $\therefore A = 180^\circ$, triunghiul redus la o dreaptă ;

2) $\sin \frac{1}{2}(B-C) = 0$, $\therefore B = C$, triunghiul isoscel ;

$$3) \quad 2 \sin^2 \frac{1}{2}A = \frac{\sin B \sin C}{1 + \cos B + \cos C} \quad (3)$$

Aceasta din urmă este relația dintre unghiurile triunghiului *pseudo-isoscel* căutat.

Ecuația (3) se poate scrie sub forma :

$$\cos^2 \frac{1}{2}(B-C) - 4 \sin^3 \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}(B-C) - 3 \sin^2 \frac{1}{2}A = 0. \quad (4)$$

Această ecuație de gradul al doilea în $\cos \frac{1}{2}(B-C)$, are rădăcinile sale reale și de semne contrare. Rădăcina negativă, evident nu convine. Pentru ca rădăcina pozitivă să fie acceptabilă, trebuie să fie cuprinsă între $\cos \frac{1}{2}(B+C) = \sin \frac{1}{2}A$ și $+1$.

Să însemnăm cu $F[\cos \frac{1}{2}(B-C)]$ prima parte a ecuației (4). Avem :

$$F(\sin \frac{1}{2}A) = -2 \sin^2 \frac{1}{2}A (1 + 2 \sin^2 \frac{1}{2}A) < 0,$$

$$F(+1) = -4 \sin^3 \frac{1}{2}A - 3 \sin^2 \frac{1}{2}A + 1 ;$$

$\sin \frac{1}{2}A$ este deci cuprins între rădăcinile ecuației (4). Pentru ca rădăcina pozitivă să fie admisibilă, va trebui și e suficient ca $+1$ să fie exterior rădăcinilor ecuației (4).

Pentru aceasta, trebuie să avem $F(+1) > 0$, adică ;

$$4 \sin^3 \frac{1}{2}A + 3 \sin^2 \frac{1}{2}A - 1 < 0. \quad (5)$$

Ecuația

$$4 \sin^3 \frac{1}{2}A + 3 \sin^2 \frac{1}{2}A - 1 = 0 \quad (6)$$

are o rădăcină reală pozitivă și două rădăcini imaginare, după cum ușor se poate vedea luând transformata în $1/\sin \frac{1}{2}A = \operatorname{cosec} \frac{1}{2}A$ și formând expresia $(-\frac{1}{3}p)^3 + (\frac{1}{2}q)^2$.

Rădăcina reală a ecuației (6) este cuprinsă între 0,4 și 0,5. Calculând-o, găsim că este egală cu

$$(5) \quad 0,455410.$$

Pentru ca inegalitatea (5) să fie satisfăcută, trebuie ca

$$\sin \frac{1}{2}A < 0,455410$$

de unde cu ajutorul tabelor de logaritmi, găsim că

$$A < 54^{\circ} 10' 57'',5.$$

Deci unghiul A este cuprins între 0° și $54^{\circ} 10' 57'',5$.

Notă. Dacă în ecuația (3), înlocuim liniile trigonometrice în funcțiune de laturi, obținem ecuația de gradul al treilea în a :

$$(b+c)a^3 + 3bca^2 - (b+c)(b-c)^2a - bc(b+c)^2 = 0. \quad (7)$$

Pentru a trata complet problema, trebuie să arătăm că dacă laturile triunghiului satisfac ecuației (7), aceasta ne dă valori pentru latura a , care să formeze triunghiuri reale cu valori date lui b și c .

Să însemnăm cu $f(a)$ primul membru al ecuației (7). Observăm că $f(a)$ are o singură variație, iar $f(-a)$ are două variații; ecuația $f(a) = 0$ are deci o singură rădăcină pozitivă și zero sau două rădăcini negative.

Să cercetăm dacă rădăcina pozitivă este admisibilă. Evident că din cauza simetriei putem presupune $b > c$. Ecuația (7) ne dă:

$$f(b-c) = 2bc(b^2 - 4bc + c^2),$$

$$f(b+c) = 6bc(b+c)^2 > 0.$$

Pentru ca să existe o rădăcină între $(b-c)$ și $(b+c)$ trebuie deci ca $f(b-c) < 0$. Rădăcinile trinomului

$$u^2 - 4u + 1$$

sînd $2 - \sqrt{3}$ și $2 + \sqrt{3}$, $f(b-c)$ va fi negativ când

$$2 - \sqrt{3} < b:c < 2 + \sqrt{3}.$$

Dacă însă ținem seamă și de ipoteza $b > c$, atunci vedem că dacă avem

$$1 < b:c < 2 + \sqrt{3} \quad (8)$$

atunci ecuația (7) are rădăcina sa pozitivă cuprinsă între $(b-c)$ și $(b+c)$ și deci ea poate forma un triunghi real, cu valorile date lui b și c . Aceste valori însă trebuiesc astfel luate ca să satisfacă inegalităților (8).

V. CRISTESCU.

PROBLEMA 2743. Câte ouă roșii ar trebui la Paște la n persoane spre a ciocni între ele, având dreptul fiecare să ciocnească o singură dată cu celelalte persoane? Cum ar trebui să ciocnească acele persoane spre a se sparge minimum de ouă?

MAIOR GH. POPESCU.

Enunțul dă loc la două interpretări: 1) Fiecare persoană trebuie să ciocnească cu fiecare din celelalte $(n-1)$ o singură dată. 2) Fiecare persoană ciocnește numai odată cu una din celelalte persoane. Să cercetăm ambele cazuri.

I. De oarece ni se cere numărul oulelor necesare, iar nu al celor sparte, vom face ipoteza că fiecare persoană, după ce a terminat ciocnirile, reține oul din urmă, fie el spart la ambele capete, la unul, sau rămânându-i nespart.

Să determinăm care este mai întâiu numărul maximum de ouă. Numărul ciocnirilor este evident C_n^2 . După cum rămâne oul la o persoană, deosebim cele n persoane în 3 categorii: cele ce au oul spart la un cap, cele ce au ouă sparte la ambele capete și cele ce au rămas cu ouăle nesparte.

Numărul capetelor de ouă care au primit o ciocnire, fie sau nu sparte, este egal cu numărul ciocnirilor, sporit cu 1 pentru fiecare persoană din categoria a doua și cu câte 2 pentru fiecare din persoanele din categoria treia. În această din urmă categorie, ar putea fi cel mult $(n-1)$ persoane, căci una din cele n persoane trebuie să aibă oul din urmă spart. La acest ou, putem avea o spărtură sau două. În aceste două cazuri, numărul de ouă sparte este respectiv :

$$\frac{1}{2}[C_n^2 + 2(n-1) + 1] = \frac{n^2 + 3n - 2}{4}, \quad \frac{1}{2}[(C_n^2 + 2(n-1))] = \frac{n^2 + 3n - 4}{4}.$$

În primul caz, C_n^2 trebuie să fie pereche, deci $n = 4k + 2$, sau $n = 4k + 3$; în al doilea nepereche, deci $n = 4k$ sau $n = 4k + 1$. Acestea sunt numerele maxime de ouă necesare ciocnirii.

Pentru a se utiliza ouă mai puține, trebuie ca numărul persoanelor care se retrag cu ouă sparte la ambele capete să fie cât mai mare. Numai o singură persoană nu ar putea intra în această categorie și anume aceea care a spart ultima oară; ea însă poate avea oul spart de o parte sau nespart. În aceste două cazuri, avem :

$$\frac{1}{2}C_n^2 + 1 = \frac{n^2 - n + 4}{4}, \quad \frac{1}{2}(C_n^2 + 1) = \frac{n^2 - n + 2}{4},$$

ouă necesare pentru ciocnire. În primul caz $n = 4k$ sau $n = 4k + 1$; în al doilea $n = 4k + 2$ sau $n = 4k + 3$.

Minimum nu se poate scobori sub n , căci fiecărei persoane îi rămâne un ou. Deci:

$$\frac{n^2 - n + 4}{4} \geq n, \quad \frac{n^2 - n + 2}{4} \geq n.$$

$$n \geq 4 \qquad n \geq 5$$

Deci numărul ouălelor ce trebuiesc puse la ciocnire variază între:

$$\frac{n^2 + 3n - 2}{4} \text{ și } \frac{n^2 - n - 2}{4} \text{ dacă } n = \mathcal{M}.4 + 2 \text{ și } n = \mathcal{M}.4 + 3$$

$$\frac{n^2 + 3n - 4}{4} \text{ și } \frac{n^2 - n + 4}{4} \text{ dacă } n = \mathcal{M}.4 \text{ și } n = \mathcal{M}.4 + 1.$$

Minimum de ouă sparte în cele două cazuri este

$$\frac{1}{2} C_n^2 = \frac{n(n-1)}{4}, \quad \frac{1}{2} (C_n^2 + 1) = \frac{n^2 - n - 2}{4}.$$

Cum trebuie să procedăm la ciocnire ca să reducem numărul ouălelor sparte? Pentru aceasta, trebuie să avem cât mai puține persoane din categoria întâia, adică cât mai multe ouă sparte la ambele capete. Se va căuta pentru aceasta a se utiliza ouăle cele mai tari care se arată în timpul ciocnirii, până ce se sparg sau se retrage persoana cu dânsul; apoi cele mai tari rămase, etc.

II. În acest caz, sunt n vârfuri de ouă sparte. Numărul minimum de ouă întrebuițate este în acest caz n . Să găsim numărul cel mai mare de ouă necesare ciocnirii. Va trebui adăugat lui n câte o unitate pentru fiecare persoană din cele ce rămân cu un ou spart la un cap și câte 2 pentru fiecă ou ce rămâne nespert unei persoane. Numărul ouălelor va fi maximum când numărul persoanelor din ultima categorie este cel mai mare, adică $(n-1)$. O singură persoană are atunci toate ouăle sparte în număr de $n/2$ sau $(n+1)/2$, după cum n este sau nu pereche. Numărul maximum de ouă este atunci:

$$n-1 + \frac{n}{2} = \frac{3n-2}{2} \quad (n = \mathcal{M}.2)$$

$$n+1 + \frac{n+1}{2} = \frac{3n+3}{2} \quad (n = \mathcal{M}.2+1).$$

Putem dar spune că numărul ouălelor necesare ciocnirii variază între :

$$\frac{3n-2}{2} \text{ și } n \quad (n \text{ pereche}), \quad \frac{3n-1}{2} \text{ și } n \quad (n \text{ nepereche}).$$

Numărul minimum de ouă sparte este respectiv $\frac{1}{2}n$ sau $\frac{1}{2}(n+1)$.

Procedarea pentru a se reduce la minimum de ouă sparte, este aceeași ca la primul caz.

T. A. TĂNĂSESCU.

PROBLEMA 3048. Să se calculeze suma :

$$\sum_{n=1}^n a^{n-1} \cos nx$$

și să se afle limita pentru $n = \infty$, presupunând $|a| < 1$.

C. I. GEORGESCU.

Soluție dată de D-nii : M. ADAM, G. AMĂRĂSCU, N. ARCADIAN, E. BALLAN, M. BOGDAN, A. BUȘILĂ, R. CĂDERE, I. COȘEREANU, I. IONESCU-BREZUICA, ȘT. MARIN, G. MATEESCU, O. POPEA, A. POPEANU, E. RUSSU, I. ȘERBĂNESCU, E. ȘTEFĂNESCU, A. TAUBER, L. și S. WEISS, A. NICULESCU și F. DOBRESCU-BĂBICI.

Cu ajutorul relațiilor lui EULER, suma propusă se mai poate scrie :

$$S_n = \frac{1}{2a} \left[\sum_{n=1}^n (ae^{ix})^n + \sum_{n=1}^n (ae^{-ix})^n \right].$$

În paranteză sunt sumele a două progresii geometrice, pe care efectuându-le, găsim :

$$S_n = \frac{a^{n+1} \cos nx - a^n \cos(n+1)x + \cos x - a}{1 - a \cos x + a^2}.$$

Făcând în această sumă să tindă n către infinit, vom obține, de oarece $|a| < 1$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\cos x - a}{1 - 2a \cos x + a^2}.$$

PROBLEMA 3063. Să se afle valorile lui x , care satisfac congruențele:

$$5^x \equiv 3 \pmod{7}, \quad 8^x \equiv 5 \pmod{13}.$$

N. GEORGESCU-ROEGEN.

1. *Prima soluție*, dată de D-nii: G. AMĂRĂSCU (Liceul din Caracal), I. BONEA (Liceul M-rea Dealul) și E. ȘTEFĂNESCU (Liceul Spiru Haret, București).

Puterile lui 5, congruente cu 3 în raport cu modulul 7, sunt de forma:

$$5^{6k-1} \quad (k \text{ întreg}).$$

Pentru ca

$$x^3 = 6k - 1,$$

trebuie să avem: $x = 6m - 1$ (m întreg).

De asemenea puterile lui 8, congruente cu 5 în raport cu modulul 13 sunt de forma:

$$8^{4n-1} \quad (n \text{ întreg}).$$

Pentru ca

$$x^5 = 4n - 1,$$

trebuie să avem: $x = 4p - 1$ (p întreg)

Acum, din

$$x = 4p - 1 = 6m - 1,$$

deducem

$$x = 12t - 1, \quad (t \text{ întreg}),$$

care verifică ambele congruențe.

2. *A doua soluție*, dată de D-nii: I. BONEA, F. NEGRETZU și E. ȘTEFĂNESCU.

Ne vom servi de «*Teorema cascadelor*» stabilită de D-l GH. ZAPAN în «*Gazeta Matematică*» v. XXVIII p. 325 ș. u.:

Conform acestei teoreme, congruențele propuse sunt echivalente cu următoarele:

$$5^x \equiv 3 \pmod{7}, \quad 8^x \equiv 5 \pmod{13}$$

găsim în aceleași condițiuni ca la prima soluție:

$$x = 4k - 1 = 6m - 1,$$

$$x = 12t - 1.$$

3. *Notă.* Au găsit expresiile lui x , care satisfac separat cele două congruențe, fără a indica expresiunea comună, D-nii: I. IONESCU-BREZUICA, W. SOLOMON și A. TAUBER.

Ceilalți corespondenți nu au găsit exagerat să pună valorile lui x sub formele :

$$x = \sqrt[3]{6n-1} \quad , \quad x = \sqrt[5]{4m+3}.$$

M. G.

PROBLEMA 3080. *Viteza și accelerația unui mobil sunt exprimate cu numerile v și γ , când metrul și secunda sunt unități de măsură. Prin ce fel de numere vor fi exprimate, dacă 5 km. și ora vor fi unități de măsură?*

CĂPITAN I. LINTEȘ.

Fie v' și γ' noile unități, respectiv de viteză și accelerație ; va trebui să avem :

$$v' = M \cdot v \quad \text{și} \quad \gamma' = M' \cdot \gamma,$$

unde M și M' sunt modulele de transformare, ale cărori valori respective, sunt în cazul problemei :

$$M = (1/5000) (1/3600)^{-1} \quad \text{și} \quad M' = (1/5000) (1/3600)^{-2},$$

deci :

$$v' = 0,72 v \quad \text{și} \quad \gamma' = 2592 \gamma$$

ȘT. FL. LĂZĂRESCU.

Cl. VIII Lc. „Ion Maiorescu“ Giurgiu.

Soluția autorului. Dacă unitatea de lungime s'a înmulțit cu m și cea de timp cu k , atunci noul spațiu și timp va fi :

$$s' = s/m \quad \text{și} \quad t' = t/k.$$

În acest caz :

$$ds' = ds/m \quad \text{și} \quad dt' = dt/k$$

și deci :

$$v' = \frac{ds'}{dt'} = \frac{k}{m} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{k}{m} \cdot v.$$

Apoi :

$$\gamma' = d^2s/dt'^2,$$

dar

$$d^2s' = d^2s/m \quad \text{și} \quad dt'^2 = dt^2/k^2,$$

deci :

$$\gamma' = \frac{k^2}{m} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{k^2}{m} \gamma.$$

În concluzie :

$$v' = \frac{k}{m} v \text{ și } \gamma' = \frac{k^2}{m} \gamma.$$

Sau, în cazul problemei :

$$v' = 0,72 v \text{ și } \gamma' = 2592 \gamma.$$

Această soluție ne arată și legea formației modulelor, despre care se pomeneste în prima soluție.

D-1 BERGOVICI A. EMIL a rezolvat problema în felul primei soluții ; deasemenea D-1 M. ADAM.

CĂPITAN I. LINTES

PROBLEMA 3087. Să se determine α , astfel ca expresiunea :

$$x^\alpha (\sin x - \operatorname{arctg} x),$$

să aibă o limită finită și diferită de zero, când x tinde către zero.

ST. LĂZĂRESCU.

1. Prima soluție, dată de D-nii : B. M. BARBĂLATT, I. COȘE-REANU, T. POPOVICIU, E. ȘTEFĂNESCU și A. TAUBER.

Se vede ușor că pentru $\alpha > 0$ expresiunea dată are ca limită zero. Să punem deci $\alpha = -\beta$, expresiunea dată se prezintă sub forma $0/0$. Aplicând deci regula lui L'HÔSPITAL, vom avea succesiv :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^\beta} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x^2}}{\beta x^{\beta-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + \frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\beta(\beta-1)x^{\beta-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + \frac{2-4x^2-6x^4}{(1+x^2)^4}}{\beta(\beta-1)(\beta-2)x^{\beta-3}}. \end{aligned}$$

Numărătorul are ca limită unitatea ; pentru ca și numitorul să aibă o limită finită, trebuie ca $\beta = 3$, de unde $\alpha = -3$.

Limita expresiunii dată este în acest caz :

$$\lim_{x \rightarrow 0} E = 1/6.$$

2. *A doua soluție*, dată de D-nii : M. ADAM, B. M. BARBĂLATT, M. BOGDAN, I. COȘEREANU, LONGIN IONESCU, T. POPOVICIU, E. ȘTEFĂNESCU și L. WEISS.

Cu ajutorul dezvoltărilor în serie :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots,$$

expresiunea dată se mai poate scrie :

$$E = x^{\alpha+3} \left[\frac{1}{6} - \frac{2 \cdot 3}{5!} x^2 + \dots \right].$$

Expresiunea din paranteză are ca limită 1/6. Trebuie deci, ca factorul $x^{\alpha+3}$ să aibă o limită diferită de zero, ceea ce atrage condiția

$$\alpha = -3.$$

PROBLEMA 3130. *Un aeroplan zboară orizontal la 1000 m. altitudine cu 126 km. pe oră.*

Se întreabă care e distanța dela punctul de cădere al unei bombe lăsată de avion, până la verticala punctului de lansare? Rezistența aerului se neglijează.

A. O. MICLESCU.

Soluție dată de D-nii : GH. P. BOGDAN (Lic. Internat Iași), MIRCEA GH. STAVRAT, GHEORGHE GH. STAVRAT, MIHAI C. BOTEZATU (Iași), CONSTANTIN-IOAN V. ARGHIR.

Dacă admitem pământul fix și neglijăm rezistența aerului, traiectoria bombei este un arc de parabolă, definită prin ecuațiile :

$$x = vt \quad \text{și} \quad y = \frac{1}{2}gt^2.$$

În aceste ecuații, x, y sunt coordonatele unui punct de pe traiectorie, față de sistemul de axe care trece prin punctul de lan-

sare (Oy verticală, Ox orizontală, în sensul mișcării aeroplanului); t este timpul măsurat din momentul lansării bombei, g accelerația gravitațională $= 9,81 \text{ m/sec}^2$, v viteza aeroplanului de 126 km/oră sau 35 m/sec.

Eliminând timpul t din ecuațiile precedente, avem, pentru $y = 1000 \text{ m}$,
 $x \approx 500 \text{ m}$.

Notă. S'a primit o soluție complet inexactă de la un student al Școlii Politehnice.

PROBLEMA 3137. *Să se demonstreze că între laturile și razele cercurilor exinscrise unui triunghi oarecare, avem relațiunea:*

$$\frac{a^2 - b^2}{r_c(r_a - r_b)} + \frac{b^2 - c^2}{r_a(r_b - r_c)} + \frac{c^2 - a^2}{r_b(r_c - r_a)} = 4.$$

CONST. I. GEORGESCU.

I. Soluție dată de D-nii: MIRCEA I. ADAM, LAURENȚIU L. VLAȚIU și DORIN POPESCU (Elevi Liceul Constanța); VASILE C. GABRIELESCU și I. N. COSTĂCHESCU (Elevi Liceul N. Bălcescu, Brăila); LEON WEISS, SOLOMON WEISS și SAMI ARONOVICI (Elevi Liceul V. Alexandri, Galați); OZIAS M. SCHÄCHTER (Elev Lic. Comunității Israelite, Galați); EMILIAN I. POPP, C. N. CIORĂNESCU, GH. I. OPRESCU, GH. D. SIMIONESCU, GH. HUZUNEANU, ION L. GRIGORESCU, P. ȘT. ILIESCU, PAUL I. IONESCU, M. I. PĂTROIANU, I. N. ȘUSELESCU și ION I. MARINESCU (Elevi Liceul Mănăstirea Dealului); ILIE IONESCU-BREZUICA (Lic. Caracal); RADU D. CĂDERE, EDGAR C. RUSSU, GH. P. BOGDAN, VASILE VÂRLAN, MIHAI CH. BOGDAN, MARIUS GEORGESCU, EUGEN GEORGESCU și OCTAV H. BURSTIN (Elevi Liceul Internat, Iași); GH. GH. STAVRAT (Elev Lic. Național, Iași); ROSETEL ȘT. BOJU (Elev Liceul Diaconovici-Loga, Timișoara); KIRILĂ I. BOCANCEA (Elev cl. VI Liceul Militar, Tg. Mureș); I. TH. LĂZĂRESCU (Elev Caporal, Școala Militară de Geniu, București); EMIL A. BERCOVICI (Student); GH. I. GROFȘOREANU (Liceul Moise Nicoară, Arad); OCTAVIAN IANULESCU (Absolvent al Școalei superioare industriale din Timișoara); LEON CĂLDĂRARU

GH. MIHOC și DANILO I. SOLOMON (Elevi Liceul Gh. Șincai); A. URZICĂ (Elev cl. VIII Liceul Decebal, Deva); D. S. NICULESCU, LEON BRÜLL, BENEDICT A. REINHORN, PAUL I. BLEIWEISS, GH. IONESCU-ZANE, N. G. BOTEA și ALEX. A. OPRAN (Elevi Liceul Cantemir-Vodă); LENUȚA MOȘOIU (cl. VI secundară); VASILICA APOSTOL (cl. VII secundară); ROMEO MIHĂILESCU (Lic. R. Vâlcea); IRIMIE D. STAICU (Liceul Andrei Șaguna, Brașov); N. N. CONSTANTINESCU, ALEX. I. ENE, M. DAVIDSOHN, IONEL A. HIRSCH, AL. DUMITRESCU și MARCEL L. GOLDSTEIN (Elevi Seminarul Pedagogic Universitar București); MIRCEA GH. STAVRAT (cl. VIII Seminarul Ped. Universitar, Iași); I. TH. POPOVICI și D. M. TEODORESCU (Elevi Liceul Mihai-Viteazul); CONRAD H. SCHÖNFELD, SIMON KATZ și DIDI ZAGHER (Elevi Liceul Laurian, Botoșani); AL. CH. MLADENOVICI (Elev particular cl. V, București); EMIL GULIAN (Liceul Giurgiu); EUG. PĂLĂRIERU (Elev cl. VIII Lic. Spiru-Haret); D. SAMOILĂ (cl. VIII Lic. Câmpina); ARGHIR V. I. CONSTANTINESCU; ANGELO P. IONESCU; PETRU GH. SPACU; ADRIAN NOVAC; BERNHARDT I. REISS; FROIM I. MARCUS; MARIN ȘTEFAN.

Servindu-ne de relațiunile;

$$S = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c,$$

găsim

$$r_c(r_a - r_b) = \frac{S^2}{p-c} \left[\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b} \right] = \frac{S^2(a-b)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = p(a-b).$$

Avem deci

$$\sum \frac{a^2 - b^2}{r_c(r_a - r_b)} = \sum \frac{a^2 - b^2}{p(a-b)} = \frac{1}{p} \sum (a+b) = \frac{1}{p} 4p = 4.$$

II. Soluție dată de D-nii: TRAIAN UDRISKY (Elev cl. VI Liceul Moise Nicoară, Arad); ALEXANDRU TAUBER și DAVID M. BLUMENFELD (Elevi Liceul Laurian, Botoșani); ION N. DRAGOMIR, ALEX. A. OPRAN, N. G. BOTEA și BENEDICT A. REINHORN (Elevi Lic. Cantemir-Vodă); ION. GH. CONSTANTINESCU și OVIDIU POPEA (Elevi Liceul B. P. Hajdău, Chișinău); V. M. LĂZĂRESCU, TRAIAN N. ANGELESCU, M. H. BRĂTESCU-DANUBIU și MIRCEA A. VASILESCU (Elevi Liceul I. Maiorescu, Giurgiu); N. P. ARCADIAN (Caracal); TRAIAN R. TUNARU (Craiova); PAUL I. IONESCU și ION OLARIU (Elevi Lic. Mânăstirea Dealului); VIRGIL COȘNIȚĂ și GH. V. CAZACU (Elevi

Liceul Codreanu, Bârlad); SOLOMON WEISS (Galați); VIRGIL I. IONESCU (Amărăștii de jos); MARIN ȘTEFAN; S. I. RINGLER; MORRIS MENDELSON.

Cu ajutorul relațiilor cunoscute :

$$a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c), \quad b^2 = (r_b - r)(r_c + r_a), \text{ etc., obținem}$$

$$a^2 - b^2 = (r_a - r_b)(r_c + r), \quad b^2 - c^2 = (r_b - r_c)(r_a + r), \text{ etc.,}$$

$$\sum \frac{a^2 - b^2}{r_c(r_a - r_b)} = 3 + r \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right) = 3 + r \cdot \frac{1}{r} = 4.$$

III. Soluție dată de D-nul ȘTEFAN T. EPURE (Buzău). Cu ajutorul relațiilor :

$$a^2 - b^2 = 4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B) = 16R^2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2}(A - B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

etc.,

și $r_a = 4R \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$, etc., obținem

$$\sum \frac{a^2 - b^2}{r_c(r_a - r_b)} = \sum \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B} = \sum [1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B]$$

$$\therefore \sum \frac{a^2 - b^2}{r_c(r_a - r_b)} = 3 + (\operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B + \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \frac{1}{2} C + \operatorname{tg} \frac{1}{2} C \operatorname{tg} \frac{1}{2} A) = 4.$$

PROBLEMA 3143. *Se cer patratele de 4 cifre, la care prima cifră este suma celorlalte cifre.*

C. D. MIHĂESCU.

Soluție dată de D-ra ADELLA COCA (Cl. VI secundară), și de D-nii: N. BOTEA, L. BRÜLL și G. D. IONESCU-ZANE (Elevi Lic. Cantemir-Vodă, București); I. MIU (Liceul Caracal); G. HUZUNEANU, I. MARINESCU, E. POPP, E. PĂTROIANU, I. C. VASILIU și G. SIMIONESCU (Liceul Militar, Mănăstirea Dealului); B. REINHORN, S. WEISS.

Dintre ultimele două cifre, care pot termina un patrat, luăm pe acelea a căror sumă nu trece peste 9, maximul primei cifre a numărului căutat. Acele cifre pot fi dar :

00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 36, 41, 44, 61, 81.

Prima grupă ar cere ca să punem înainte de 00 un număr de două cifre identice, patrat perfect, ceea ce nu se poate.

Pentru celelalte grupe, observăm mai întâi că nu putem scrie înaintea lor numere de două cifre, care să facă numărul total divizibil cu 3 fără a-l face divizibil cu 9, și de a nu-l face $\mathcal{N} 3 + 2$. Rămân astfel, de examinat următoarele numere:

2101, 5401, 8701, 9801, 5104, 8404, 9504, 9009, 8116, 9216, 5221, 8521, 9621, 8224, 9324, 8125, 9225, 9036, 5041, 8341, 9441, 8044, 9144, 8161, 9261, 9081.

Extrăgând acestora rădăcina patrată, se găsesc numai soluțiile:

$$9801 = 99^2. \quad 9216 = 96^2. \quad 5041 = 71^2.$$

Notă. Trebuia să se mai cerceteze mijloace de eliminare de numere. Astfel primele opt numere de mai sus se divid cu 11 și căturile sunt: 191, 491, 791, 891, 464, 764, 864, 819, dintre care numai 891 se divide cu 11, dând câtul 81, care este patrat perfect; deci 9801 este o soluție. Resturile împărțirii unui patrat prin 11 fiind numai 0, 1, 3, 4, 5, 9, căutând resturile împărțirii prin 11 a celorlalte numere, prin sumarea și diferența cifrelor de rang pereche și nepereche, se găsește că numai numerele următoare ar putea fi patrate perfecte: 8116, 9216, 9036, 5041, 8341, 9441, 9144, 8161. Numerele pereche trebuie să se împartă cu 4 până ce dă un patrat. Se găsește astfel că 9216 este o soluție și că 9144 nu poate fi. La celelalte, extrăgând rădăcina patrată, mai găsim soluția 5041.

I. I.

Observațiuni. 1) Iată și alte patrate la care o cifră este suma celorlalte: 2916, 1089, 1225, 1296, 1681, 3249, 3481.

I. C. VASILIU.

2. Nu este nicio soluție pentru patratele de cinci cifre.

ST. F. LĂZĂRESCU, M. ADAM.

3. Printre cuburi avem în condițiile problemei pe 9261, de patru cifre și 91125 cu cinci cifre.

ST. F. LĂZĂRESCU.

4. Patratele de 4 cifre, la care ultima cifră este suma celorlalte trei, sunt 1089, 1225, 3025, 3249.

D. M. BLUMENFELD.

Au mai rezolvat problema, pe căi ceva mai lungi ca cea dată mai sus. D-nii: P. BLEIWESS, M. H. BRĂTESCU-DANUBIU, GH. DĂMBOIANU, B. GATAIANȚU, M. L. GOLDSTEIN, C. T. IONESCU-BUJOR, ST. LĂZĂRESCU, V. M. LĂZĂRESCU, S. P. RĂDULESCU, A. N. STOIAN, M. A. VASILESCU, I. N. DRAGOMIR, O. M. SCHÄCHTER; M. I. ADAM; G. P. BOGDAN; C. I. CIORĂNESCU; AL. COMĂNESCU; O. M. FLORESCU; M. A. GHELBER; P. I. IONESCU; A. A. OPRAN; M. D. POPESCU; I. P. NICOLAESCU; D. POPESCU; F. G. POPESCU; R. A. REINHORN, T. RĂDULESCU.

EXERCITIUL.

68. Se cer numere, care sporite cu suma cifrelor, să ne dea suma patratelor acelor cifre.

E. ȘTEFĂNESCU.

R. Numărul căutat nu poate avea mai mult de trei cifre, căci chiar $4 \times 9^2 < 1000$. Pentru numere de o cifră, avem: $u + u = u^2$, deci $u = 2$. Pentru numere de două cifre, avem: $10z + u + z + u = z^2 + u^2$, care ne dă $(11 - z) = u(u - 2)$, care nu se poate satisface decât luând $u = 6$ și $z = 3$ sau 8. Dacă numărul are trei cifre, avem: $100s + 10z + u + s + z + u = s^2 + z^2 + u^2$, sau $s(101 - s) + z(11 - z) = u(u - 2)$. Partea a doua este cel mult $9 \times 7 = 63$, iar prima este cel puțin 100. Deci soluțiile sunt: 2, 36 și 86.

69. Un număr de trei cifre, micșorat cu numărul divizorilor lui, ne dă un patrat perfect. Se cere acel număr.

P. KATZ.

R. Un număr de trei cifre are dela 1 la 32 divizori. Adunăm la patratele de trei cifre aceste numere și vedem la care sumă dă un număr având atâția divizori cât a fost numărul ce s'a adunat. Găsim astfel soluțiile 125, 152, 154, 175, 208, 27, 297, 365, 408, 443, 445, 533, 584, 600, 629, 847, 924, 965, 969.

70. Un număr de trei cifre, împărțit cu suma cifrelor lui, dă la cât produsul cifrelor, iar la rest numărul format de ultimele două cifre ale lui. Se cere acel număr.

D. BLUMENFELD.

R. Ecuația problemei este:

$$100s + 10z + u = (s + z + u) zu + 10z + u,$$

$$100 = (s + z + u) zu.$$

Nu putem lua $zu = 50$, căci z și u sunt cifre; nici $zu = 25$, căci ar cere ca s să fie negativ. Dacă $zu = 10$, atunci es numerele 325 sau 352, iar de luăm $zu = 5$, atunci s trece peste 10. Soluțiile sunt 325 și 352.

71. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele a trei transversale unghiulare concurente în M . Pe AA_1, BB_1, CC_1 se construiesc segmente de cerc, capabile de un acelaș unghi φ . Cercul construit pe AA_1 taie pe AC, AB în A_b, A_c . Analog punctele $(B_a, B_c), (C_a, C_b)$. Să se arate că triunghiul MNP , format de dreptele $A_b A_c, B_a B_c, C_a C_b$ este izologic cu ABC .

B. M. BARBĂLATT.

R. Se va observa că izogonală dreptei AA_1 în raport cu A , face un unghi φ cu $A_b A_c$.

72. Să se demonstreze relația :

$$\sum \frac{1}{h_a(h_a - h_b)(h_a - h_c)} = \frac{2S}{R}.$$

L. WEISS.

R. Se ține seama că

$$\sum \frac{1}{a(a-b)(a-c)} = \frac{1}{abc}$$

și că
$$h_a h_b h_c = \frac{8S^3}{abc} = \frac{R}{2S}.$$

73. Să se demonstreze relația :

$$\sqrt{\frac{p-a}{r_a}} + \sqrt{\frac{p-b}{r_b}} + \sqrt{\frac{p-c}{r_c}} = \sqrt{\frac{p}{r}},$$

notațiile fiind cele obișnuite.

MARIN ȘTEFAN.

R. Relațiile :

$$pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

se pun sub forma

$$\frac{p}{r} = \frac{p-a}{r_a} = \frac{p-b}{r_b} = \frac{p-c}{r_c},$$

apoi se aplică o proprietate a șirului de rapoarte egale, ținându-se seama de identitatea :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

74. Să se probeze că ecuația:

$$(1) \quad x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1a_2 - b_1b_2 = 0,$$

are rădăcinile reale, unde cantitățile a_1, a_2, b_1, b_2 sunt reale și b_1, b_2 de același semn. În aceleași condițiuni, să se arate că rădăcina ecuației

$$x(b_1 + b_2) - a_1b_2 - a_2b_1 = 0,$$

este coprinsă între rădăcinile ecuației (1).

Realizantul ecuației (1) este $(a_1 - a_2)^2 + 4b_1b_2$, deci pozitiv dacă b_1b_2 sunt de același semn.

Scriind că rădăcina ecuației de gradul întâi este coprinsă între rădăcinile ecuației (1) și făcând reducerile necesare, se găsește condiția:

$$-b_1b_2[(a_1 - a_2)^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2] = -b_1b_2[(a_1 - a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2].$$

TH. ANGHELUȚĂ.

75. Să se stabilizească identitatea:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2 - \dots \pm 1^2.$$

I. IONESCU-BREZUICA.

R. Putem scrie:

$$\sum_1^n n = \frac{n^2 + n}{2} = n^2 - \frac{n^2 - n}{2} = n^2 - \sum_2^n (n-1),$$

tot așa:

$$\sum_2^n (n-1) = (n-1)^2 - \sum_3^n (n-2),$$

deci:

$$\sum_1^n n = n^2 - (n-1)^2 + \sum_3^n (n-2)$$

și așa mai departe.

76. Să se demonstreze relația:

$$\sum \frac{1}{r_b r_c} \cot^2 \frac{1}{2} A = \frac{1}{r^2}.$$

MIRCEA I. ADAM.

R. Înlocuind: $\cot \frac{1}{2} A = \frac{p}{r_a}$, obținem

$$\frac{p^2}{r_a r_b r_c} \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right) = \frac{p^2}{r r_a r_b r_c} = \frac{1}{r^2}.$$

77. În orice triunghi avem relațiunile:

$$2S = \frac{a^2}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}B + \operatorname{tg}\frac{1}{2}C} = \frac{b^2}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}C + \operatorname{tg}\frac{1}{2}A} = \frac{c^2}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A + \operatorname{tg}\frac{1}{2}B},$$

notațiunile fiind cele obicinuite.

EMILIAN D. ILIESCU.

În relațiunea (C. P. Trigonometria XVIII 398):

$$2S = \frac{a^2}{\cot B + \cot C} = \frac{b^2}{\cot C + \cot A} = \frac{c^2}{\cot A + \cot B},$$

valabilă pentru $A + B + C = \pi$, făcând

$$A_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}, \quad B_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \quad C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2},$$

a căror sumă este tot π și ținând seamă că:

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}A; \text{ etc.,}$$

obținem relațiunile cerute.

PROBLEME PROPUSE.

3153*). Tangent laturei AB și trecând prin vârful A și ortocentrul H al unui triunghi ABC, se duce un cerc cu centrul în A_c . Fie B_c centrul cercului construit la fel și trecând prin B, iar C' intersecția dreptelor AB, B_cA_c . Să se arate: 1) că punctul C' și celelalte 2 obținute la fel sunt colineare; 2) că cercurile A_c și B_c se întâlnesc pe cercul ABC; 3) că axele radicale ale cercurilor A_c , B_c și ale celorlalte perechi, analog obținute, trec prin mijloacele laturilor triunghiului ABC; 4) ce devin aceste proprietăți, când H e un punct oarecare în plan?

• LOCOT. COL. GH. BUCLIU.

3161. Este posibil ca ciocnind două ouă, să se spargă amândouă deodată?

GH. ZAPAN.

3162. Într'o cunoscută nuvelă, citim următoarele:

«După aceea, luând capetele, le așezară în mijlocul mesei, pe rând și cu rânduială, punând pe ale celor mai mici boieri dedesubt și pe ale celor mai mari deasupra, după neam și după ranguri până

*) De oarece problema publicată cu acest număr în numărul trecut al Gazetei, a mai fost propusă cu No. 2961 la pag. 448 Vol. XXVII, se înlocuiește cu prezenta. Problema 2961 încă nu a fost rezolvată.

ce făcu o piramidă de 47 căpăţâne, vârful cărora se încheiă prin capul unui logofăt mare».

Este posibilă facerea unei asemenea piramide?

DAVID GHEORGHE.

3163. Să se probeze că dacă n este impar, avem :

$$\sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \frac{C_n^p}{n-2p} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^n \cdot 2 \cdot 4 \dots (n-1)}{1 \cdot 3 \dots n},$$

iar dacă m şi n sunt de paritate contrară şi $m < n$, avem :

$$\sum (-1)^p C_n^p (n-2p)^{m-1} = 0,$$

iar p variind dela zero pânăla $(n-1)/2$, sau $n/2-1$, după cum n e impar sau par.

TH. ANGHELUŢĂ.

3164. Dreptele care unesc vârfurile triunghiului ortic al unui triunghi ABC, cu punctele unde medianele lui ABC taie a doua oară cercul lui EULER, concură pe dreapta lui EULER în isogonalul punctului lui GERGONNE al triunghiului ortic.

M. I. FOCŞENEANU.

3165. Fie A' , B' , C' picioarele înălţimilor unui triunghi oarecare ABC şi H ortocentrul său. Pe înălţimi, se iau dela A' , B' , C' spre H , respectiv lungimile $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ astfel ca :

$$A'A_1/AA' = B'B_1/BB' = C'C_1/CC' = k.$$

Se cere să se găsiască suprafaţa triunghiului $A_1B_1C_1$ în funcţie de elementele triunghiului ABC şi de raportul k şi să se determine k astfel ca suprafaţa triunghiului $A_1B_1C_1$ să fie minimă.

OCTAV ORĂNESCU.

3166. Fie A', B', C' picioarele înălțimilor unui triunghi ABC , H ortocentrul și O centrul cercului circumscris. Ducem cercul $AB'HC'$ și diametrul AO , care întâlnește acest cerc în A_1 și fie B_1 și C_1 punctele analoage cu A_1 . Să se demonstreze că triunghiul $A_1B_1C_1$ este înscris în cercul descris pe HO ca diametru.

ION C. VASILIU.

3167. Să se demonstreze identitatea :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & c & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 & c \end{vmatrix} = [a(bc-a^2) + b(ca-b^2) + c(ab-c^2)]^2.$$

E. ABASON.

3168. În ce caz ecuațiile :

$$x^m + px^n + q = 0, \quad x^m + qx^n + p = 0,$$

în care p diferă de q , au o rădăcină comună ?

I. IONESCU.

3169. Să se determine forma generală a polinoamelor $P_0, P_1, P_2, \dots$ așa încât să avem :

$$P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1} = x^{2n},$$

P_n fiind un polinom de gradul n în x .

A. ANGELESCU.

3170. Să se găsiască locul geometric al punctelor de unde o parabolă dată, este văzută sub un unghi dat.

D. V. IONESCU.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (2946, 3105, 11, 22, 46, 47, 51, 54, E, N, P); Angelescu Tr. (3043, 121); Arcadian N. (3111, 38, P); Bercovici E. (3138, 46, 49); Berdan C. (3092); Blaha N. (3144, 45); Bleiweiss P. (3142, 54, 59); Blumenfeld D. (3087, 142, N); Bogdan G. (3138, 49); Bogdan Martinian (3154, 55); Bogdan Mihail (3139); Bolgiu O. (3146); Botea N. (3111, 32, 35, 39, 42, 46, 54, 59); Brătescu Danubiu M. (3017, 34, 92, 123, 54, N); Brüll Leon (2298, 3120, 39, 42, 54, 59); Burstin O. (3120, 39, 47, 54, 59, E); Bușilă A. (N); Cădere R. (3138); Cantacuzino I. (3123); Cazan G. (3139); Ciorănescu C. (3092, 142, 59, E); Comănescu Bălteni A. (3123); Constantinescu G. I. (3139); Coșniță St. I. (3154, 55); Coșniță Virgil (3154); David G. (3123); David S. (P); Drăghici Zenobia (3142, 59); Dragomir I. (3154, 59, P); Dumitrescu D. T. (3135, 38); Epure St. (3138); Florescu M. O. (3072, 92, 154); Focșeneanu M. (3085, 144, 45, 55, E, N, P); Gataianu B. (3092); Georgescu D. E. (3120, 39, 54, 59); Georgescu Marius (3120, 39, 54, 59); Gheorghe G. M. (3132); Gheorghiu Eugen (3154); Giurumescu C. (3120, 39, 51, 54, 59); Goldstein M. (3135); Groșoreanu G. (3154); Gulian E. (3092, 142); Huzuneanu G. (3142, 59); Ionescu-Brezuica Ilie (3144, E); Ionescu I. I. (3139); Ionescu I. Paul (3072, 92, 101, 15, 42, 59, E); Ionescu-Zane G. (3132, 35, 42, 54); Kahane Arno (3154); Katz P. (2969, 3087); Katz S. (3142, 54, P); Lăzărescu I. (3123); Lăzărescu St. (2615, 3092, 123, 37, 42, 49, 54, 55, P); Lăzărescu V. (3139, 42); Marcus Froim (3154); Marinescu I. I. (3139, 42, 59); Mateescu N. (3147); Mihoc G. (3123, 38); Miu I. (3123); Mladenovici A. (3139, 54); Moisiu Gr. (A); Nicolaescu P. I. (3154); Niculescu Al. (3110); Niculescu S. D. (3139, 54); Novac A. (3120, 23, 35, 39, 54, 59, N); Opran A. (3117, 35, 42, 54); Pălărieru E. (3154); Panătescu A. (3138, 44); Patroianu M. (3092, 120, 42); Pop I. E. (3123); Popeia O. (3034, 111, 32, 46); Popescu Dorin (3077, 101, 46); Popescu Florian (3092); Popescu Gh. (2497 N, P); Popescu D. Marin (3092, 117, 23, 39); Popovici T. I. (2298, 3072, 92, 123, 38); Popoviciu Tiberiu (3132, 38, P); Rabinovici S. (3151, 54); Rădulescu S. (3123, 42); Reinhorn B. (2298, 3120, 35, 39, 54); Russu E. (3007, 110, 38); Schächter M. O. (3092, 123, 51, P); Schönfeld C. (3149); Simionescu D. G. (3092, 115, 142, 59); Simionescu M. (3144); Smărăndescu D. (3072); Solomon W. (3123, 35, 46, 55); Ștefan Marin (2946, 3087, 139, E); Ștefănescu F. (P); Ștefănescu I. Al. (3154); Stoica A. (3123); Stroescu G. (3092, 121); Teiler G. (3123); Tauber A. (3091, 151, 54, 55, 59); Teodorescu S. I. (3077, 91, 101); Teodorescu Nicolae (3154); Toma N. (3092); Udrisky Tr. (3085); Vărlan V. (3120, 23, 39, 47, 51, 54); Vasilescu D. I. (3007, 144); Vasilescu M. (3135); Vasiliu Ion (3062, 142, 46, 54, 59, E, N); Vlațiu L. (3077, 87, 117, 46); Weinfeld T. (3123); Weiss L. (2946, 3092, 111, 28, 32, 37, 38, 39, 42, 49, E, N, P); Weiss S. (3111, 39, 46, 54, 55, E, R); Zagher D. (3142).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1576, 91, 2035, 63, 116, 23, 91, 278, 89, 95, 318, 29, 30, 47, 54, 77, 94, 95, 440, 56, 58, 61, 87, 573, 86, 640, 51, 61, 75, 82, 83, 89, 701, 19, 73, 827, 29, 35, 56, 61, 64, 72, 79, 91, 95, 910, 13, 18, 20, 29, 32, 55, 71, 72, 77, 78, 80, 91, 3031, 47, 52, 53, 67, 70, 71, 73, 77, 84, 87, 89, 90, 92, 93, 97, 100, 01, 02, 03, 04, 08, 09, 10, 13, 18, 21, 23, 30, 31, 32, 33, 35, 38, 40, 42 și 44 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“ 28 VOLUME

Colecțiunea întreagă Lei 1500,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 70 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI și XXV, care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie*. (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

2. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. N. Abramescu, *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăugită*, 1921. (Epuizată).

4. A. G. Ioachimescu și G. Țițeica, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. Tr. Lalescu, *Tratat de Geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăugită*, 1923 Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice Lei 20,—

7. Gh. Lazăr, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) Lei 5,—

8. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăugită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme Lei 60,—

9. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, *Vocabular Matematic* Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăuga taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul*. Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septembrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimite D-lui: I. D. Teodor, Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la casierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București.

*Ona Asociațiunea pentru cultura
și literatură poporului român din*

Sibiu



ZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXIX.

NUMĂRUL 9. — MAIU 1924



SUMARUL

1. Asupra spiralei logaritmice *N. Abramescu.*
2. Asupra determinantului simetric stâng . . . *Th. Angheluță.*
3. Note Matematice: 60—64.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 110.
7. Probleme rezolvate: 1783, 2473, 2491, 2815, 2874, 2923, 3043,
3072, 3123.
8. Exerciții: 78—87.
9. Probleme propuse: 3171—3180.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.



BUCUREȘTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET
1924

SPRE ȘTIINȚA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXIX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politehnică din București, **Tr. Lalescu**, Doctor în Matematici, Profesor Universitar și **I. D. Teodor**, Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Școala Politehnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui **GEORGE BORNEANU**, Inginer, Directorul Fabricilor de chibrituri și timbre, București.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor rediă în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela D-l Cassier **I. D. Teodor**, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poștă.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evita confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

În vederea sporirii taxelor poștale, corespondenții pot trimite de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsa spații albe pe margini sau dedesubt, tăind folie în consecință.

Nu se admite însă a se trata pe aceeași foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, re-creațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebuie să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 56, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 53, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 16, 26, 36, 47, 53, 56, 61, 95, 3005, 13, 19, 42, 45, 55, 60, 69, 75, 89, 90, 95, 96, 100, 07, 09, 12, 14, 27, 29, 31, 33, 34, 40, 41, 48, 50, 52, 53, 56, 57, 58, 60, 61, 63, 64, 65, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80.

ASUPRA SPIRALEI LOGARITMICE.

1. Se știe că spirala logaritmică este curba a cărei ecuație, în coordonate polare, este $\rho = e^{a\omega}$, $\rho = OM$ fiind raza vectoare ce unește polul O cu un punct M al curbei, ω unghiul ce-l face axa polară Ox cu OM , iar $a = \text{const.}$

Se cunosc proprietățile acestei curbe, una din cele mai interesante fiind următoarea, care de multe ori servește ca definiție a spiralei logaritmică, că unghiul făcut de tangenta MT într'un punct M al curbei, cu raza vectoare OM , este constant, oricare ar fi punctul M pe curbă.

Se poate obține reprezentarea spiralei logaritmică, în mod *continuu*, cu ajutorul cantităților complexe. În adevăr, să notăm cu z vectorul OM , ca mărime și poziție, adică

$$z = \rho (\cos \omega + i \sin \omega) = \rho e^{i\omega}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Pentru un punct oarecare al spiralei logaritmică, avem

$$\begin{aligned} z &= \rho e^{i\omega} = e^{a\omega} e^{i\omega} = e^{(a+i)\omega}, \\ z &= (e^{a+i})^\omega. \end{aligned}$$

Presupunând că luăm pentru ω unitatea de măsură a unghiurilor, avem $z_0 = e^{a+i}$. Deci

$$z = (z_0)^\omega,$$

ω fiind un parametru variabil real.

Am obținut un punct oarecare z al spiralei logaritmică, cu ajutorul punctului z_0 și a operației funcționale $z = (z_0)^\omega$ în funcțiune de un parametru variabil real, astfel că, la fiecare valoare a lui ω , corespunde un punct pe curbă. Obținem¹⁾, deci, în mod *continuu*, toate punctele curbei în funcțiune de un parametru variabil real.

2. Se poate obține reprezentarea spiralei logaritmică și în mod *discret*. Pentru aceasta, să considerăm punctele $M_0, M_1, M_2, \dots$, pe spirală, ce corespund la unghiurile polare $0, \omega, 2\omega, 3\omega, \dots$, ale ra-

1) A se vedea, pentru reprezentarea în mod continuu a oricărui punct al unei curbe cu conexiune simplă, în funcțiune de un număr suficient de puncte ale curbei și un parametru variabil real, nota mea *Sur l'autogénération des courbes* (*Comptes Rendus*, t. 176, 1923, pag. 651). Ideea, în cercetarea de față, mi-a fost sugerată de D-I POMPEIU.

zelor vectoare cu axa polară, adică să considerăm razele vectoare $OM_0, OM_1, OM_2, \dots$, echidistante, ca unghiuri.

1^o. Notând cu $\rho_0 = OM_0$, $\rho = OM_1 = e^a$, avem

$$OM_2 = e^{2a} = (e^a)^2 = \overline{OM_1^2},$$

$$OM_3 = e^{3a} = (e^a)^3 = \overline{OM_1^3}, \dots$$

Deci

$$\overline{OM_1^2} = OM_0 \cdot OM_2, \dots \overline{OM_p^2} = OM_{p-1} \cdot OM_{p+1}.$$

Notând cu z_p vectorul OM_p , ca mărime și direcție, avem, în general

$$z_p^2 = z_{p-1} z_{p+1}.$$

Deci, fiind date punctele M_0, M_1 și operația funcțională, exprimată prin relația $z_p^2 = z_{p+1} z_{p-1}$, se pot obține puncte discrete ale spiralei logaritmice, luând, pe razele vectoare echidistante în unghiuri, lungimile $OM_2, OM_3, \dots$, date de relațiile

$$\overline{OM_1^2} = OM_0 \cdot OM_2, \overline{OM_2^2} = OM_1 \cdot OM_3, \dots$$

2^o. Triunghiurile $\dot{OM}_0M_1, OM_1M_2$ au unghiurile $M_0OM_1 = M_1OM_2$ și $OM_0:OM_1 = OM_1:OM_2$, deci sunt asemenea. Deci, într-o spirală logaritmă, ducând razele vectoare echidistante ca unghiuri, $OM_0, OM_1, OM_2, \dots$, triunghiurile $OM_0M_1, OM_1M_2, OM_2M_3, \dots$, sunt asemenea.

3^o. Fiind dat triunghiul OM_0M_1 în plan, putem obține puncte discrete ale spiralei logaritmice cu ajutorul operației funcționale următoare și anume, se construiește pe OM_1 , un triunghi OM_1M_2 direct asemenea cu OM_0M_1 ; pe OM_2 , un triunghi OM_2M_3 direct asemenea cu OM_1M_2 , etc.

4^o. Din asemănarea triunghiurilor $OM_0M_1, OM_1M_2, OM_2M_3$, rezultă egalitatea unghiurilor $OM_1M_0 = OM_2M_1, OM_1M_2 = OM_2M_3$. Adunând, avem egalitatea unghiurilor $M_0M_1M_2 = M_1M_2M_3$. Tot din asemănarea triunghiurilor $OM_0M_1, OM_1M_2, OM_2M_3$, rezultă $M_2M_1:M_1M_0 = OM_1:OM_0 = k = \text{const.}$, $M_3M_2:M_2M_1 = OM_2:OM_1 = k$. Deci $M_2M_1:M_1M_0 = M_3M_2:M_2M_1$, adică triunghiurile $M_0M_1M_2, M_1M_2M_3$ sunt asemenea, ca având un unghi egal cuprins între laturi proporționale.

Deci, spirala logaritmă se bucură de proprietatea că, $OM_0, OM_1, OM_2, \dots$, fiind raze vectoare echidistante ca unghiuri, triunghiurile $M_0M_1M_2, M_1M_2M_3, \dots$ sunt asemenea. De unde, în general,

$$M_p M_{p+1}^2 = M_{p-1} M_p \cdot M_{p+1} M_{p+2},$$

iar proprietatea se exprimă, cu ajutorul cantităților complexe, prin relația

$$\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_0} = \frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}.$$

5°. Se poate pune probleme invers, care sunt curbele plane, pe care, dacă luăm punctele $M_0, M_1, M_2, \dots$, corespunzătoare razelor vectoare $OM_0, OM_1, OM_2, \dots$, echidistante ca unghiuri, triunghiurile $M_0M_1M_2, M_1M_2M_3, \dots$ să fie asemenea¹⁾.

Luând ca origină O și OM_0 ca axă polară, vectorul OM_p , ca mărime și poziție, e dat de $z_p = \rho_p e^{pi\omega}$, $\rho_p = OM_p$, $M_0OM_1 = \omega$. Relația, care exprimă că triunghiurile $M_0M_1M_2, M_1M_2M_3, \dots$ sunt asemenea, și care este

$$M_1M_2/M_0M_1 = M_2M_3/M_1M_2,$$

se scrie, cu ajutorul cantităților z_p ,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_0} = \frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}, \quad (z_2 - z_1)^2 = (z_3 - z_2)(z_1 - z_0),$$

și devine înlocuind pe z_p ,

$$(\rho_2 e^{2i\omega} - \rho_1 e^{i\omega})^2 = (\rho_3 e^{3i\omega} - \rho_2 e^{2i\omega})(\rho_1 e^{i\omega} - \rho_0).$$

Simplificând cu $e^{2i\omega}$, avem succesiv

$$(\rho_2 e^{i\omega} - \rho_1)^2 = (\rho_3 e^{i\omega} - \rho_2)(\rho_1 e^{i\omega} - \rho_0),$$

$$e^{2i\omega}(\rho_2^2 - \rho_1\rho_3) + e^{i\omega}(\rho_0\rho_3 - \rho_1\rho_2) + \rho_1^2 - \rho_0\rho_2 = 0.$$

Această relație trebuind să aibă loc oricare ar fi ω , este o identitate și deci coeficienții sunt nuli,

$$\rho_2^2 = \rho_1\rho_3, \quad \rho_0\rho_3 = \rho_1\rho_2, \quad \rho_1^2 = \rho_0\rho_2,$$

de unde:

$$OM_2^2 = OM_1 \cdot OM_3, \quad OM_0 \cdot OM_3 = OM_1 \cdot OM_2, \quad OM_1^2 = OM_0 \cdot OM_2,$$

ceea ce probează că triunghiurile $OM_0M_1, OM_1M_2, OM_2M_3, \dots$; $OM_0M_2, OM_1M_3, \dots$, sunt asemenea, ca având unghiurile dela vârf egale și laturile ce formează aceste unghiuri proporționale.

Deci, curbele care îndeplinesc condiția cerută, se bucură de proprietatea că, ducând razele vectoare $OM_0, OM_1, OM_2, \dots$, echi-

1) Pentru o problemă analoagă asupra spiralei logaritmice, a se vedea articolul D-lui ANGELESCU, *Sur une propriété fonctionnelle des spirales logarithmiques* (Bulletinul Societății române de științe matematice, anul XXVI, No. 4 — 6, 1923, pag. 39).

distanțe în unghiuri, triunghiurile O_0MM_1 , OM_1M_2 ,... sunt asemenea, oricare ar fi unghiul ω al razelor vectoare. Dar, aceste curbe sunt *spirale logaritmice*, căci presupunând că unghiul ω tinde către zero, secantele M_0M_1 , M_1M_2 ,... tind către tangentele în M_0 , M_1 ,..., care fac cu razele vectoare OM_0 , OM_1 ,... un unghi constant, unghiul către care tind unghiurile egale OM_0M_1 , OM_1M_2 ,... și după însăși definiția, curbele sunt spirale logaritmice.

6°. Spirala logaritmică este una din curbele ale cărei proprietăți pot servi ca tip de *grup*¹⁾. În adevăr, fiind obținute, cu operațiile funcționale de mai sus, un șir de puncte discrete, M_0 , M_1 , M_2 , M_3 ,... corespunzătoare razelor vectoare echidistante ca unghiuri, se pot obține, cu aceleași operații, punctele M_0 , M_2 , M_4 ,... etc., adică, se poate obține, de ex. direct, din M_0 , punctul M_2 , cu aceleași operații, fără să mai trecem prin M_1 .

7°. Toate operațiile funcționale, expuse pentru obținerea punctelor discrete, revin la una singură și anume, asemănarea. Spirala logaritmică este deci curba tip corespunzătoare unei mișcări de figuri variabile, cu păstrare de asemănare, după cum cercul, care este un caz particular al spiralei, este curba corespunzătoare unei mișcări cu păstrarea egalității figurilor.

N. ABRAMESCU.

ASUPRA DETERMINANTULUI SIMETRIC STÂNG.

Determinantul $\| a_{ik} \|$ se zice simetric stâng sau antisimetric, dacă avem pentru toate valorile lui i și k ,

$$a_{ik} = -a_{ki}$$

$$a_{ii} = 0.$$

Un astfel de determinant are câteva proprietăți remarcabile, ce voim să le grupăm în aceste rânduri.

Fie D un determinant simetric stâng de ordinul n . Dacă se

1) Ideea de proprietăți ale curbelor, corespunzătoare razelor vectoare echidistante ca unghiuri, se desprinde din *Teoria diferențelor*, pe care D-l POMPEIU a expus-o în anul 1921 la Universitatea din Cluj, unde curbele sunt definite prin proprietăți funcționale, corespunzătoare *ordonatelor echidistante*.

schimbă semnul fiecărei linii, se obține acelaș determinant, abstracțiune doar de semn, cu singura deosebire că o linie oarecare s'a transformat în coloana de acelaș rang.

Prin urmare:

$$D = (-1)^n D.$$

Rzultă că determinantul simetric stâng de ordin impar este nul. Mai mult, dacă se însemnează prin A_{ik} complimentul algebric al lui a_{ik} , determinantul $\| A_{ik} \|$, reciproc al determinantului $\| a_{ik} \|$ este un determinant simetric sau simetric stâng, după cum ordinul determinantului dat este impar sau par.

Dacă se desvoltă un determinant simetric stâng, de ordinul doi sau patru, se obține:

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2.$$

Generalizând, să aratăm că un determinant simetric stâng de ordin par, este patratul unui polinom întreg, prin raport cu elementele lui. Să considerăm un astfel de determinant, scris după cum urmează,

$$D = \begin{vmatrix} & & & & x_1 \\ & & & & x_2 \\ & & & & \vdots \\ & & & & x_{2p-1} \\ \Delta & & & & \\ -x_1, -x_2, \dots, x_{2p-1}, 0 \end{vmatrix}$$

Δ fiind minorul relativ la elementul din D din ultima linie și ultima coloană. El este deci un determinant simetric stâng, de ordin impar.

Se vede că avem:

$$D = \sum A_{ik} X_i X_k.$$

Deci D este o formă quadratică prin raport cu variabilele

X_i , al cărei discriminant este reciprocul lui Δ . Cum Δ este nul, reciprocul lui este nul de asemenea și deci D se reduce la mai puține patrate decât numărul variabilelor. Ne rămâne de arătat că el se reduce la un singur patrat. Vom considera pentru aceasta un minor oarecare, format cu două linii și două coloane din determinantul $\| A_{ik} \|$ și e necesar și suficient să dovedim că este nul.

La acel minor,

$$\begin{vmatrix} A_{mr} & A_{ms} \\ A_{nr} & A_{ns} \end{vmatrix}$$

după o identitate a lui LAPLACE, avem :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{mr}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ns}} - \frac{\partial \Delta}{\partial a_{nr}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ms}} = \Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{mr} \partial a_{ns}}.$$

Cum Δ e nul, rezultă că minorul considerat e nul. Din aceeași identitate, rezultă că A_{ii} nu pot fii toți nuli fără ca D să fie identic nul. Supozând deci $A_{11} = 0$, se va avea

$$D = \frac{1}{A_{11}} [A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + \dots + A_{1n} X_n]^2.$$

Dar am văzut ca determinantul simetric stâng de ordinul al doilea este un patrat. Admițând aceasta pentru A_{11} , rezultă și pentru D .

Prin urmare, D este patratul unui polinom prin raport cu elementele lui.

Presupunând acum că elementele sunt reale, să vedem care este natura rădăcinilor ecuației :

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

având un determinant simetric stâng, dacă se face $\lambda = 0$.

Se vede ca la începutul acestor rânduri că

$$D(-\lambda) = (-1)^n D(\lambda).$$

Deci $D(\lambda)$ este par sau impar în λ , după cum este și ordinul lui.

Ridicând $D(\lambda)$ la patrat, se obține :

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} + \lambda^2 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} + \lambda^2 \end{vmatrix}$$

unde

$$c_{ik} = a_{i1} a_{k1} + a_{i2} a_{k2} + \dots + a_{in} a_{kn}.$$

Dar ecuația

$$\begin{vmatrix} u + c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & u + c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & u + c_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

este ecuația seculară, care știm că are rădăcinile reale. Să dovedim că ele sunt toate negative sau nule.

Dacă se ordonează această ecuație, se obține :

$$v^n A_1 u^{n-1} + \dots + A_p u^{n-p} + \dots + A_{n=0}$$

A_p este suma minorilor determinantului $\| c_{ik} \|$ formați cu p linii și p coloane de acelaș rang.

Să considerăm unul din acești minori :

$$\begin{vmatrix} c_{x_1 x_1} & c_{x_1 x_2} & \dots & c_{x_1 x_p} \\ c_{x_2 x_1} & c_{x_2 x_2} & \dots & c_{x_2 x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{x_p x_1} & c_{x_p x_2} & \dots & c_{x_p x_p} \end{vmatrix}.$$

Se observă că el este patratul matricei

$$\begin{vmatrix} a_{x_1 1} & a_{x_1 2} & \dots & a_{x_1 n} \\ a_{x_2 1} & a_{x_2 2} & \dots & a_{x_2 n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{x_p 1} & a_{x_p 2} & \dots & a_{x_p n} \end{vmatrix}.$$

După teorema lui CAUCHY-BINET, rezultă că toți acești minori

sunt pozitivî sau nuli, deci coeficienții A_1 sunt pozitivi sau nuli ei însuși, prin urmare ecuația în U are rădăcinile toate negative sau nule.

Ecuația $D(\lambda)$ are deci numai rădăcini pur imaginare sau nule.

TH. ANGHELUȚĂ.

NOTE MATEMATICE.

60. *Alte zece mecanici diverse.* (A se vedeă nota 80 pag. 406, Anul XXVIII).

41. Afetelor. *J. Challeat & A. Thomas.* — *Mecanique des affûts.* Paris 1922.

42. Atmosferei. *C. Abbe.* — *The mechanics of the earth atmosphere.* Washington. 1991.

43. Clasică. *P. Painlevé.* — *Les origines et les principes de la mécanique classique.* Paris 1923.

44. Constructorilor. *E. L. Bates & Charlesworth.* — *Mechanics for builders.* Londra 1914.

45. Materialelor. *L. A. Martin.* — *Mechanics of materials.*

46. Psychică. *W. J. Crawford.* — *Mécanique psychique.* 1922.

47. Pulberulentelor. *A. Brill.* — *Einführung in die Mechanik raum-erfüllenden Massen.* Lipsca 1909.

48. Rotațiilor. *G. Sire.* — *La meccanica delle rotazioni.* Siena 1889.

49. Spiritului. *A. Rathenau.* — *Mechanik des Geistes.*

50. Textilă. *J. Tonelli.* — *Meccanica tessile.* Milan.

(Va urmă).

I. IONESCU.

61. *Extinderea unei observațiuni.* D-l M. BLUMENFELD observă la finele problemei 2752, rezolvată la pagina 100 vol. XXIX, că numerele 24 și 25 satisfac următoarele relațiuni:

$$2425 - 24 = 49^2 \quad \text{și} \quad 2524 - 24 = 50^2.$$

Fie N un număr de n cifre. Prin analogie cu aceste relațiuni, se poate căuta când numărul N satisface una din egalitățile:

$$N(N+1) - N = k^2, \quad N(N+1) - (N+1) = k^2,$$

$$(N+1)N - N = k^2, \quad (N+1)N - (N+1) = k^2,$$

în care k este un număr întreg, iar PQ numărul ce se formează scriind pe Q după P .

Prima egalitate dă

$$N \cdot 10^n + N + 1 - N = k^2$$

$$\therefore N = \frac{k^2 - 1}{10^n},$$

care arată că pentru ca N să fie întreg și de n cifre, trebuie și k^2 să aibă $2n$ cifre și să se termine cu următoarele n cifre: 00...01. Sunt multe numere de acestea, ele nu au o lege de formație după care să se deducă ușor unele din altele. Iată câteva exemple:

$$7401474015 - 74014 = 81249^2; \quad 564565 - 564 = 751^2$$

$$76577658 - 7657 = 8751^2; \quad 998999 - 998 = 999^2$$

$$25012502 - 2501 = 5001^2; \quad 9798 - 97 = 99^2.$$

Egalitatea a doua și a treia dau

$$N \times 10^n = k^2 \quad \text{și} \quad (N+1)10^n = k^2,$$

de unde urmează că N sau $N+1$ trebuie să fie pătrate perfecte de n cifre.

Ultima egalitate dă

$$N \times 10^n + 999 \dots 9 = k^2,$$

care pentru a fi posibilă ar trebui ca k^2 să se termine cu 99...99, ceea ce nu se poate. Deci nu există numere întregi N , care să satisfacă egalitatea a patra.

LOCOT. COL. GH. BUCLIU.

62. *O teoremă.* În cele ce urmează, îmi propun să studiez teorema:

Să se arate că dacă indicatorul de ordinul n al lui N este 1 și dacă $a, b, c, \dots$, sunt factorii primi ai lui N , atunci avem:

$$N \leq \left(\frac{a \cdot b \cdot c \dots}{(a-1)(b-1)(c-1) \dots} \right)^n.$$

Fie :

$$\varphi_1(N) = N \cdot \frac{P_0}{Q_0}$$

$$\varphi_2(N) = \varphi_1(N) \cdot \frac{P_1}{Q_1}$$

$$\dots$$

$$\varphi_{n-1}(N) = \varphi_{n-2}(N) \cdot \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$$

$$\varphi_n(N) = \varphi_{n-1}(N) \cdot \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = 1.$$

Înmulțind aceste egalități, găsim :

$$\varphi_n(N) = N \cdot \frac{P_0 \cdot P_1 \dots P_{n-1}}{Q_0 \cdot Q_1 \dots Q_{n-1}} = 1,$$

de unde :

$$N = \frac{Q_0 \cdot Q_1 \cdot Q_2 \dots Q_{n-1}}{P_0 \cdot P_1 \cdot P_2 \dots P_{n-1}}.$$

Dar știm că :

$$N > \varphi_1(N) > \varphi_2(N) > \dots > \varphi_n(N),$$

deci și rapoartele

$$P_0/Q_0, P_1/Q_1, P_2/Q_2, \dots, P_{n-1}/Q_{n-1}$$

vor fi succesiv mai mici unul ca celălalt, sau cel mult egale, adică :

$$P_0/Q_0 \geq P_1/Q_1$$

$$P_0/Q_0 \geq P_2/Q_2$$

$$\dots$$

$$P_0/Q_0 \geq P_{n-1}/Q_{n-1},$$

deci :

$$\frac{P_0 \cdot P_1 \cdot P_2 \dots P_{n-1}}{Q_0 \cdot Q_1 \cdot Q_2 \dots Q_{n-1}} \leq \left(\frac{P_0}{Q_0} \right)^n.$$

Deci :

$$N \leq (Q_0/P_0)^n.$$

Cum însă :

$$\varphi_1(N) = N \cdot \frac{P_0}{Q_0}$$

și cum $a, b, c, \dots$ sunt factorii lui N , urmează că:

$$P_0 = (a-1)(b-1)(c-1)\dots$$

$$Q_0 = a \cdot b \cdot c \dots$$

deci :

$$N \leq \left(\frac{a \cdot b \cdot c \dots}{(a-1)(b-1)(c-1)\dots} \right)^n$$

c. c. e. d. d.

Observație. 1) Putem avea chiar :

$$N \leq \left(\frac{a \cdot b \cdot c \dots}{(a-1)(b-1)(c-1)\dots} \right)^{n-1},$$

când N are cel puțin trei factori, sau dacă $N = 2^\alpha \cdot 3^\beta$, unde α sau β (unul din ei cel puțin) este mai mare ca 1, sau — în sfârșit — dacă $N = a^\alpha$, atunci $a \geq 5$.

2) Observăm că :

$$\frac{N}{\varphi_1(N)} = \frac{a \cdot b \cdot c \dots}{(a-1)(b-1)(c-1)\dots}$$

Ori, în baza neegalității stabilite, găsim că :

$$[\varphi_1(N)]^n \leq N^{n-1}.$$

Având în vedere cele dela *Observ.* 1, putem chiar să admitem că :

$$[\varphi_1(N)]^{n-1} \leq N^{n-2}.$$

CĂPITAN I. LINTES.

63. *O chestiune de examen.* Printr'o regretabilă scăpare din vedere, soluția dată chestiunii a doua dela Examenul de Capacitate pentru profesorii de liceu, este eronată. O reproduc în linii generale, în această Notă, suprimând partea eronată.

Ecuția diferențială :

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = x$$

se reduce la ecuația :

$$y'' - y = e^t,$$

făcând schimbarea de variabilă :

$$x = e^t.$$

Considerăm ecuația fără membrul al doilea :

$$z''' - z = 0,$$

cu integrala

$$z = Ae^t + Be^{\alpha t} + Ce^{\alpha^2 t},$$

în care $1, \alpha, \alpha^2$ sunt rădăcinile complexe cubice ale unității.

Integrala y se obține prin metoda variațiunii constantelor A, B, C aplicată fie tuturor constantelor (metoda clasică), fie numai uneia din ele, A de exemplu, care se va determina apoi cu ajutorul unei ecuații diferențiale cu coeficienți constanți.

Cu această ocazie, observ că ordinul ecuației diferențiale date, se poate reduce. În adevăr, ecuația dată se mai poate scrie, împărțind cu x^2 .

$$(xy''' + y'') + 2y'' + \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{1}{x},$$

integrând ambii membri, se obține ecuația de ordinul al doilea :

$$x^2 y'' + 2xy' + y = \lg Cx.$$

Constanta C se determină prin condițiile inițiale ale problemei, adică :

$$y(1) = y'(1) = y''(1) = 0,$$

găsim $C = 1$, cu ecuația :

$$x^2 y'' + 2xy' + y = \lg x,$$

care se integrează apoi prin aceeași metodă.

M. GHERMĂNESCU.

64. *O rectificare.* Exercițiul 50, din anul XXVII, e greșit. În adevăr, din relația :

$$3a = 2p,$$

la care conduce relația de condiție, nu se poate deduce $a = b = c$, ci :

$$2a = b + c,$$

adică laturile triunghiului sunt în progresie aritmetică.

O. POPEA, C. BERDAN și I. VASILIU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL «GAZETEI MATEMATICE»

DIN ANUL 1924.

PROBELE SCRISE.

(1 Maiu 1924).

A. PROBE TEORETICE.

(Timpul acordat : $3\frac{1}{2}$ ore).

Clasa VI-a.

Algebra. I. Dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghi, avem :

$$= - \frac{1}{4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C} \begin{vmatrix} \sin \frac{1}{2} A & \sin \frac{1}{2} A & -\cos \frac{1}{2} (B-C) \\ \sin \frac{1}{2} B & -\cos \frac{1}{2} (C-A) & \sin \frac{1}{2} B \\ -\cos \frac{1}{2} (A-B) & \sin \frac{1}{2} C & \sin \frac{1}{2} C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos B & \cos C & -1 \\ \cos A & -1 & \cos C \\ -1 & \cos A & \cos B \end{vmatrix} = 0.$$

Să se explice rezultatul.

II. 1°. Să se arate că avem :

$$S = \sum_{n=1}^n n(n+p)(n+2p) = C_{n+1}^2 C_{n+2p+1}^2$$

și să se deducă că S este divizibil cu $(n+2p)$, sau cu $(n+2p+1)$, după cum n este impar sau par.

2°. Să se determine un polinom $P(n)$, care se anulează pentru $n=0$ și astfel ca expresiunea

$$\sqrt{S} - P(n)$$

să aibă o limită finită, când n crește nemărginit.

*) **Algebra.** Se dă sistemul

$$\begin{aligned} x + ay - z &= 8 \\ 2x - y - 2z &= 6 \\ bx + 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

și se cere să se discute acest sistem după diferitele valori ale parametrilor a, b .

*) Chestiune dată pentru a doua serie de concurenți.

Geometria. Se dă un cerc O și o coardă AB fixă.

Pe prelungirea coardei AB , se ia un punct mobil C ; iar pe OC ca diametru, se construiește cercul ω , variabil cu C , care taie cercul O în punctele T și T' , iar coarda AB în F .

Să se găsiască: 1°) Locul punctelor M și M' , mijloace ale arcelor FT și FT' .

2°) Locul punctelor P și P' , intersecții ale razelor OM și OM' cu dreapta TT' .

Trigonometria. 1. Se cunoaște $\tan \frac{1}{2}a$ și se cere să se calculeze $\sin a$ și $\tan a$. Să se explice rezultatul.

Aplicație pentru $\tan \frac{1}{2}a = 2 - \sqrt{3}$.

2. Să se rezolve un triunghi, cunoscându-se două laturi și unghiul cuprins. (Se vor lua ca date a, b, C și se vor determina c, A, B).

Clasa VII-a.

Mecanica. Un fir flexibil este trecut peste două scripete foarte mici A și B de nivel și la cele două capete ale lui se atarnă greutăți în valoare de 20 și 30 kg. De fir, între scripetele A și B , se leagă un altul, de care se atarnă o greutate de 25 kg. Se cere să se găsiască poziția de echilibru și anume la ce distanță sub linia AB , se va găsi nodul celor două fire, dacă $AB = 20$ m. ?

*) **Mecanica.** Laturile unui triunghi sunt solicitate de niște forțe, care exprimate în kg, sunt egale chiar cu laturile acelui triunghi, care sunt de 3, 4 și 5 m. Se cere să se găsiască rezultanta acestor trei forțe.

Algebra. I. Se consideră un unghi de mărimea θ , care se împarte în unghiurile egale, $A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_{n-1}OA_n$, punctele $A_1, A_2, \dots, A_n$ fiind determinate prin condiția

$$OA_h = e^{\frac{k\theta}{n}}, \quad h = 1, 2, \dots, n.$$

1°. Se cere limita sumei suprafețelor triunghiurilor $OA_h A_{h+1}$, când n crește nemărginit, adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^{n-1} \text{supr. } OA_h A_{h+1}.$$

2°. Se cere, în aceleași condițiuni, limita sumei laturilor $A_h A_{h+1}$, cu alte cuvinte :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^{n-1} A_h A_{h+1}.$$

Cantitatea k este o constantă. Ca o verificare, în limitele găsite, se va face $k = 0$.

II. Să se studieze variația funcțiunei:

$$y = x^2 - 4x - 2x(x-2)Lx,$$

Lx însemnând logaritmul în baza e .

Să se construiască curba reprezentativă.

Clasa VIII-a.

Algebra. I. Aplicând teorema lui DESCARTES, să se arate care este numărul maximum de rădăcini reale ale ecuației:

$$x^m + px^{2n+1} + q = 0,$$

unde p, q sunt reali, iar

$$m > 2n + 1.$$

Să se dea apoi condițiunea pentru ca ecuațiunea să aibă acest număr de rădăcini reale.

Caz particular: Ecuațiile de gr. II-lea și III-lea.

II. Ecuația

$$x^m(x - \alpha^{m+1})^m + x^m\beta^{m(m+1)} - (\alpha + \beta)^{m+1}(x - \alpha^{m+1})^m = 0$$

admite o rădăcină dublă, care se cere.

*) **Algebra.** Se dă ecuația

$$x^3 + px + q = 0,$$

cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 ; p, q fiind reali.

1) Să se formeze ecuația care are ca rădăcini:

$$X_1 = x_2^2 + x_3^2 - x_1^2; \quad X_2 = x_1^2 + x_3^2 - x_2^2; \quad X_3 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

2) Să se examineze dacă ecuația obținută poate avea una sau două rădăcini comune cu ecuația dată, în care caz să se găsească expresiile rădăcinilor.

Geometria analitică. Se dau două axe perpendiculare Ox, Oy și punctele A, B pe axa Ox . Se duce cercul fix C , descris pe OA ca diametru, iar prin punctele date A și B un cerc variabil C' , care taie cercul C în A și în punctul mobil P .

1°. Să se găsească locul punctului al doilea de intersecție M al dreptei OP cu cercul C' , când acest cerc variază.

2°. Să se determine locul punctelor de contact ale tangentelor duse din origină la cercul C' .

3°. Să se explice geometricește rezultatele dela 1° și 2°.

B. PROBE PRACTICE.

(Timpul acordat : $3\frac{1}{2}$ ore).

Clasa VI-a.

Algebra. 1°. Se consideră funcțiunea :

$$y = \frac{x^4}{2} + \frac{2x+1}{3}x^3 + \frac{2\beta+\alpha}{2}x^2 + \beta x$$

și se cere :

a) Să se arate că oricari ar fi α și β (reali), funcțiunea are un minimum pentru $x = -\frac{1}{2}$.

b) Să se determine α și β astfel încât curba reprezentativă a funcțiunii y , să prezinte o inflexiune în punctul $x = 1$.

c) Să se reprezinte, în acest caz, curba funcțiunii y .

2°. Să se discute sistemul :

$$(a-b)x + (b-c)y + (c-a)z = (b-c)^2$$

$$(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z = (c-a)^2$$

$$(c-a)x + (a-b)y + (b-c)z = (a-b)^2$$

analizându-se cazurile în care sistemul este compatibil, nedeterminat și incompatibil.

Se va examina, în particular, cazul când două din cantitățile a , b , c sunt egale.

Trigonometria. 1. Să se calculeze, cu ajutorul tabelor de logaritmi, unghiul x dat de formula

$$\cos x = \sin 68^\circ 22' 10'' - \sin 30^\circ 2' 10''$$

și să se dea toate valorile lui x , cuprinse între 0° și 360° , care satisfac formulei.

2. Se da formula

$$\tan \alpha = \frac{\sec x + \sec y + \tan x - \tan y}{\sec x + \sec y - \tan x - \tan y}$$

și se cere să se calculeze, cu ajutorul tabelor de logaritmi, valorile arcului α cuprinse între 0° și 360° , pentru valorile :

$$x = 306^\circ 52' 11'', 62$$

$$y = 330^\circ.$$

Clasa VII-a.

Algebra. 1. Să se calculeze expresiunea

$$\frac{\sqrt{3+i}}{(\sqrt{3-i})^5}$$

și să se explice rezultatul geometricește.

Să se generalizeze.

2. Se dă ecuațiunea

$$x^4 + 2(ax + b\beta)x^2 + (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

în care a, b, α, β sunt cantități reale. Se cere:

1°. Să se arate că oricare ar fi a, b, α, β , punctele reprezentative ale rădăcinilor formează un dreptunghi.

2°. Să se calculeze efectiv rădăcinile și să se reprezinte geometriceste, în cazul particular:

$$\alpha = \cos \varphi, \quad b = \sin \varphi, \quad \alpha = \cos \left(\varphi + \frac{1}{6} \pi \right), \quad \beta = \sin \left(\varphi + \frac{1}{6} \pi \right).$$

3°. Se consideră punctele $M(a + bi)$, $M'(\alpha + \beta i)$, ($i = \sqrt{-1}$).

Să se găsească relațiunea de condițiune dintre a, b, α, β în așa fel ca dreptunghiul dela punctul 1° să fie patrat.

Cum variază, în acest caz, punctele M și M' ?

*) **Algebra.** Se consideră expresiunea:

$$E \equiv \sqrt[3]{\alpha + \beta i} + \sqrt[3]{\alpha - \beta i} \quad (i = \sqrt{-1})$$

în care α și β sunt două numere reale.

Se cere:

1°. Să se arate că cele trei valori ale lui E sunt reale.

2°. Să se calculeze aceste valori cu trei zecimale exacte, în cazul particular $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Geometria descriptivă. Se împarte foaia de hârtie în sferturi prin 2 drepte perpendiculare (axe foii).

Una din drepte fiind considerată ca linie de pământ, se va purta pe cealaltă și în planul orizontal anterior, punctul (a' , a) la o distanță egală cu $\frac{1}{4}$ din semiaxă.

Prin proiecțiunea orizontală a , se duce spre dreapta și înclinată la 45° pe linia de pământ, proiecțiunea ab a unei drepte (b se va lua chiar pe linia de pământ). Se spune că ab este proiecțiune orizontală a unei *linii de cea mai mare pantă* (tot în raport cu planul orizontal) pentru un plan P , care face 60° cu planul orizontal de proiecțiune.

Să se determine *urmele acestui plan* și să se așeze pe acest plan o dreaptă de profil, care între urmele ei pe planele de proiecțiune, să cuprindă un segment egal cu $2ab$.

(Epura va fi însoțită de o legendă care să explice construcțiile).

Clasa VIII-a.

Algebra. I. Să se rezolve ecuația

$$5x^5 + 4x^4 + 9x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0,$$

știind că are două rădăcini inverse.

II. Să se găsească condițiile pentru ca ecuația

$$x^5 + ax^2 + bx + c = 0,$$

să aibă o rădăcină triplă și, în acest caz, să se rezolve.

Geometria analitică. Se dă parabola

$$y^2 = 2px$$

și se consideră coardele paralele care fac unghiul de 45° cu axa Ox .

Să se găsiască locul geometric al punctelor care impart aceste coarde într'un raport dat k .

Să se arate geometricăște, *a priori*, că pe fiecare coardă sunt două puncte ale locului.

Să se găsiască punctele comune ale locului găsit cu parabola dată.

Ce devine locul, când facem $k = 1$?

*) **Geometria analitică.** 1°. Se dau curbele

$$(P_1) \quad y^2 - 2px = 0, \quad (P_2) \quad x^2 - 2py = 0$$

$$(P_3) \quad x^2 + 2px = 0, \quad (P_4) \quad x^2 + 2py = 0.$$

Să se găsiască schimbarea de axe care permite să trecem dela curba P_1 la P_2 . Aceeași problemă pentru două oarecare dintre curbele P_1, P_2, P_3, P_4 .

2°. Fiind dat un punct $M_1(x_1, y_1)$ pe curba P_1 , să se găsiască pe celelalte curbe, punctele unde tangentele sunt perpendiculare pe tangenta în M_1 la P_1 .

BIBLIOGRAFIE.

Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie roumaine. Anul VIII. No. 10. 1923. București. Asupra structurii atmosferei solare joase zisă cromosferă, de N. DONICI & Baron E. von der PAHLEN. Iluminarea crepusculară dela 2 Iulie 1923, de N. DONICI. Asupra legii asimptotice a unor clase de valori caracteristice, de T. LALESCU.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXX. No. 1—2. Ianuarie—Februarie 1924. Incorporarea Societății Matematice Americane, de R. G. D. RICHARDSON. Adunarea din Octomvrie a Societății, de R. G. G. RICHARDSON. Adunarea din Septemvrie a Secțiunii din St. Francisco, de L. M. HOSKINS. Notă asupra stabilității „à la Poisson”, de F. H. MURRAY. Aplicabilitate cu păstrarea ambelor curburi, de W. C. GRAUSTEIN. Serii complete de reprezentări ale algebrei a două elemente, de B. A. BERNSTEIN. Contribuțiile lui BROUWER la bazele matematicilor, de A. DRESDEN. O definițiune calitativă a funcțiunilor potențiale, de P. FRANKLIN. Asupra locațiunii rădăcinilor polinomialelor, de J. L. WALSH. Raportul Consiliului național de cercetare asupra numerelor algebrice, de E. T. BELL. Volumele II și III din istoria lui DICKSON asupra teoriei numerelor, de H. S. VANDIVER. Trei cărți asupra

relativității, de L. P. EISENHART. Geometria proiectivă a lui WINGER, de A. EMCH.

Anales de la Sociedad científica Argentina. Vol. XCVI. No. V—VI. Noembrie—Decembrie 1923. Buenos-Aires. Calculul automatic al sistemelor perstatice, de OTTO GOTTSCHALK.

Journal de mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 48. No. 12. Martie 1924. Paris.

Revista matematică din Timișoara. Anul IV. No. 1. Martie 1921. Timișoara. O clasă de expresiuni nedeterminate, de V. ALACI.

Idem. No. 2. Aprilie 1924. O clasă de expresiuni nedeterminate. de V. ALACI.

Foaia matematică. Anul I. No. 4. Aprilie 1924. Chișinău. Aplicații ale cercului lui EULER, de N. PROFIRI.

Journal matematic. Vol. I. No. 7. Aprilie 1924. Arad. Câteva puncte, drepte și conice remarcabile într'un triunghi, de T. POPOVICIU.

Idem. No. 8. Aprilie 1924. Nota din transformarea cosogonală, de M. GRÜNBAUM.

Ramon G. Loyarte. Evolution de las ciencias en la Republica Argentina. Partea II. Evolucion de la fisica. Buenos-Aires 1924.

Revista Artileriei. Anul XXXVI—XXXVII. No. 7, 8, 9, 1. Octombrie 1923—ianuarie 1924. Considerațiunile asupra problemei construcției traectoriilor prin puncte, de Căpitan CH. OPRESCU. Table de tragere, corecțiuni balistice. de Maior V. MIHĂILESCU. Obiectul balisticei exterioare, de Căpitan I. LINTES.

C E R E R I.

110. Având nevoie de volumul IV din „Gazeta Matematică”, pentru completarea colecției mele, rog a mi se comunica cine mi l-ar putea procura, cunoscând că „Societatea Gazeta Matematică” nu vinde acest volum, decât cu colecțiunea întreagă.

GH. B. BUCUR.

PROBLEME REZOLVATE.

PROBLEMA 1783. *Unei conice (F) să i se ducă două tangente, care să facă între ele un unghi dat și să intercepteze pe o dreaptă Δ un segment cu mijlocul în un punct M.*

LOCOT. COL. GH. BUCILIU.

lau ca axă de x chiar dreapta Δ și ca origină punctul M . Fie
 (1) $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$,
 ecuația conicei date.

În articolul «*Asupra unui loc geometric*», publicat în *Gazeta Matematică* Volumul XXVII pagina 313, am arătat că *locul geometric al punctelor* de unde se pot duce tangente la conica (1), care să facă un unghi dat, este curba:

$$(2) \quad K^2 (B^2 - AC)^2 x^4 + k^2 (B^2 - AC)^2 y^4 + 2k^2 (B^2 - AC)^2 x^2 y^2 + 4k^2 (B^2 - AC) (BE - CD) x^3 + 4k^2 (B^2 - AC) (BD - AE) y^3 + 4k^2 (B^2 - AC) (BD - AE) x^2 y + 4k^2 (B^2 - AC) (BE - CD) xy^2 + [4k^2 (BE - CD)^2 + 2k^2 (B^2 - AC) (D^2 + E^2 - AF - CF - 4(AE - BD)^2 + 4(B^2 - AC) (D^2 - AF))] x^2 + 8[k^2 (BE - CD) (BD - AE) - (AC - B^2) (DE - BF) + (BE - CD) (BD - AE)] xy + [4k^2 (BD - AE)^2 + 2k^2 (B^2 - AC) (D^2 + E^2 - AF - CF) - 4(CD - BE)^2 + 4(B^2 - AC) (E^2 - CF)] y^2 + [4k^2 (BE - CD) (D^2 + E^2 - AF - CF) - 8(AE - BD) (DE - BF) + 8(BE - CD) (D^2 - AF)] x + [4k^2 (BD - AE) (D^2 + E^2 - AF - CF) - 8(CD - BE) (DE - BF) + 8(BD - AE) (E^2 - CF)] y + k^2 (D^2 + E^2 - AF - CF) - 4(DE - BF)^2 + 4(D^2 - AF) (E^2 - CF) = 0.$$

Să căutăm acum *locul punctelor din care ducând tangentele la (1), aceste tangente să întâlnească pe Δ în 2 puncte simetrice față de M* . Fie $P(x_1, y_1)$ un punct al locului. Ecuația patrată a tangențelor duse din P la (1) este:

$$(3) \quad (xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1})^2 - 4f(x, y, z) f(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Făcând în (3) pe z egal cu zero, apoi în ecuațiunea rămasă anulând coeficientul lui x , găsim condiția ca tangentele din P la (1) să taie pe Δ în 2 puncte simetrice față de M . Acea condiție este, după ce se înlocuiesc x_1, y_1 prin coordonatele curente:

$$(4) \quad (AE - BD)xy + (BE - CD)y^2 + (AF - D^2)x + (BF - DE)y = 0,$$

care este o hiperbolă și reprezintă locul geometric căutat.

Prin urmare, punctele cerute în enunțul problemei, se vor găsi la intersecția curbei (2) cu hiperbola (4). Se pot obține maximum 8 puncte în cazul general.

În cazul particular $B^2 - AC = 0$, al parabolei, curba (2) devine :

$$(5) \quad 4[k^2 (BE - CD)^2 - (AE - BD)^2]x^2 + 8[k^2 (BE - CD) (DB - AE) + (BE - CD) (BD - AE)]xy + 4[k^2 (BD - AE)^2 - (CD - BE)^2]y^2 + 4[k^2 (BE - CD) (D^2 + E^2 - AF - CF) - 2(AE - BD) (DE - BF) + 2(BE - CD) (D^2 - AF)]x + 4[k^2 (BD - AE) (D^2 + E^2 - AF - CF) - 2(CD - BE) (DE - BF) + 2(BD - AE) (E^2 - CF)]y + k^2 (D^2 + E^2 - AF - CF) - 4(DE - BF)^2 + 4(D^2 - AF)(E^2 - CF) = 0.$$

Am arătat la pagina 315, locul citat¹⁾, că drept caracteristică a lui (5) este

$$-\delta = 16k^4[(BE - CD)^2 + (AE - BD)^2] < 0$$

și deci (5) este o hiperbolă. Rezultă că atunci când (1) este parabolă, punctele cerute în problemă se află la intersecția a 2 hiperbole, (4) și (5).

GH. B.

Observațiuni. 1^o. D-1 I. SCHILERU-DILI (Student anul I, Școala Politehnică din Timișoara) a dat o soluțiune foarte bună problemei, determinând cele două locuri cu ajutorul coordonatelor tangențiale.

D-sa ia 2 axe oarecare și pune ecuațiunea (2) sub forma

$$k^2 M^2 + 4\Delta f(x, y) = 0,$$

în care M este membrul I al ecuației tangențiale a cercului lui MONGE, iar Δ este valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Ecuațiunea (4) o pune sub forma

$$(6) \quad 2(\alpha f'_p + \beta f'_q) f(x, y) - (pf'_x + qf'_y + f'_1) (\alpha f'_x + \beta f'_y) = 0,$$

în care α, β sunt cosinusurile directoare ale lui Δ , iar p, q coordonatele lui M.

Se vede că ecuațiunea reprezintă o conică, care trece prin intersecția conicei date cu drepte:

$$pf'_x + qf'_y + f'_1 = 0 \quad \text{și} \quad \alpha f'_x + \beta f'_y = 0,$$

1) În rândul 2 de jos pagina 315 Vol. XXVII, trebuie înlocuit cuvântul elipsa prin hiperbolă. Această eroare a provenit din o eroare de redactare, căci s'a notat $B^2 - AC$ cu $+$, în loc de a se fi notat cu $-$.

GH. B.

care sunt polara lui M față de (T) și diametrul conjugat direcției (α, β) . De asemenea (6) trece și prin $M(p, q)$.

2^o. Am mai primit la această problemă 3 soluțiuni încă din anul 1914. Ele sunt însă necomplete. Citez pe D-nii: P. MELAS și I. KIVOVICZ, cari rezolvă problema *numai* în cazul elipsei raportată la axe. Al treilea rezolvitor indică calea de urmat, găsește o ecuație care dă coeficienții unghiular ai tangentelor cerute și conchide „de unde vom face construcția din enunț, care e foarte simplă”.

PROBLEMA 2473. Fie A și B două din unghiurile unui triunghi ABC . Să se demonstreze că există triunghiuri în care avem

$$\cos^2 \frac{1}{2}(A-B) = \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B.$$

Să se găsiască proprietăți geometrice de care se bucură astfel de triunghiuri.

V. CRISTESCU.

Soluție dată de D-l CONSTANTIN I. GEORGESCU.

1. Relația propusă se poate pune sub forma

$$(1) \quad 2\cos^2 \frac{1}{2}(A-B) - \cos \frac{1}{2}(A-B) - \sin \frac{1}{2}C = 0,$$

pe care vom trata-o ca o ecuație de gradul al doilea în $\cos \frac{1}{2}(A-B)$.

Această ecuație are rădăcinile sale reale, din care una e negativă și deci nu convine, căci $\cos \frac{1}{2}(A-B) > 0$.

Ecuația (1) ne dă

$$F(\sin \frac{1}{2}C) = 2\sin \frac{1}{2}C(\sin \frac{1}{2}C - 1) < 0,$$

$$F(+1) = 1 - \sin \frac{1}{2}C > 0.$$

Deducem că rădăcina pozitivă a ecuației (1) este cuprinsă între $\sin \frac{1}{2}C = \cos \frac{1}{2}(A+B)$ și $+1$ și prin urmare convine. Pot exista deci triunghiuri în care relația propusă să fie îndeplinită.

2. Fie I centrul cercului înscris în triunghi, A' , B' , C' punctele sale de tangență cu laturile, D intersecția dreptelor $A'B'$ și $C'I$. Scriind că laturile sunt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse, triunghiurile $DC'A'$ și $DC'B'$ ne dau respectiv

$$DC' = A'C' \frac{\cos \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} \quad \text{și} \quad DC' = B'C' \frac{\cos \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}(A-B)}.$$

Înmulțind parte cu parte aceste două egalități și ținând seamă de relația propusă, obținem

$$\overline{DC}^2 = A'C' \cdot B'C'.$$

Fie A_1, B_1, C_1 punctele unde bisectoarele AI, BI, CI taie cercul circumscris. Triunghiurile CC_1A_1 și CC_1B_1 ne dau respectiv:

$$C_1A_1 = CC_1 \frac{\cos \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}(A-B)}, \quad C_1B_1 = CC_1 \frac{\cos \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}(A-B)},$$

$$\therefore \quad \overline{CC_1}^2 = C_1A_1 \cdot C_1B_1.$$

Notă. Se știe că avem

$$\cos \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a+b}{c} \sin \frac{1}{2}C,$$

astfel că relația propusă devine:

$$(2) \quad \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 \sin^2 \frac{1}{2}C = \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B.$$

Înlocuind pe $\sin \frac{1}{2}C, \cos \frac{1}{2}A, \cos \frac{1}{2}B$ în funcție de laturi, făcând să dispară radicalul și ordonând expresia obținută în raport cu c , găsim ecuația

$$(3) \quad abc^4 + 2ab(a+b)c^2 - (a+b)^3(a^2 + ab + b^2)c^2 + (a+b)^4(a-b)^2 = 0.$$

Pentru a trata complet problema, trebuie să arătăm că dacă laturile triunghiului satisfac ecuația (3), există valori ale laturei c , date de această ecuație, care să formeze un triunghi real, cu valorile date lui a și b .

Partea întâi a acestei ecuații se anulează când înlocuim pe c prin $(a+b)$. Suprimând atunci factorul $c - (a+b)$, care corespunde unui triunghi turtit ($c = a+b$), obținem ecuația de gradul al treilea în c :

$$(4) \quad abc^3 + 3ab(a+b)c^2 - (a^2 - b^2)^2c - (a+b)^3(a-b)^2 = 0.$$

Să însemnăm cu $f(c)$ prima parte a ecuației (4). Cum $f(c)$ are o singură variație, iar $f(-c)$ are două variații, ecuația $f(c) = 0$ are o singură rădăcină pozitivă și zero sau două rădăcini negative.

De rădăcinile negative nu ne vom ocupa, căci ele nu convin problemei și să cercetăm dacă rădăcina pozitivă este admisibilă. Evident că putem presupune $a > b$.

Ecuația (4) ne dă:

$$f(a-b) = -2a^3(a-b)^2 < 0,$$

$$f(a+b) = -2(a+b)^3(a^2 - 4ab + b^2).$$

Semnul lui $f(a+b)$ depinde deci de valoarea expresiei $a^2 - 4ab + b^2$
Rădăcinile trinomialului

$$z^2 - 4z + 1$$

fiind $2 - \sqrt{3}$ și $2 + \sqrt{3}$, $f(a+b)$ este pozitiv, când $2 - \sqrt{3} < a:b < 2 + \sqrt{3}$.

Dacă însă ținem seamă și de ipoteza $a > b$, vedem că dacă

$$(5) \quad 1 < a:b < 2 + \sqrt{3},$$

ecuația $f(c) = 0$ are rădăcina sa pozitivă cuprinsă între $(a - b)$ și $(a + b)$ și deci ea poate forma un triunghi real cu a și b .

V. CRISTESCU.

PROBLEMA 2491. Să se calculeze valoarea integralei:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} dx}{\sqrt[n]{1 - e^{-px}}},$$

unde $p > 0$, $n > 1$, iar $\alpha/p - 1/n = k$ (k întreg).

Să se deducă apoi aceea a integralei:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[n]{e^{px} - 1}}.$$

FLORIN VASILESCU.

Soluție. Facem înlocuirea:

$$e^{px} - 1 = z^n$$

$$(x=0, z=0; x=+\infty, z=+\infty)$$

$$\therefore dx = \frac{n}{p} \cdot \frac{z^{n-1}}{1+z^n} dz$$

astfel că obținem:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} dx}{\sqrt[n]{1 - e^{-px}}} = \frac{n}{p} \int_0^{+\infty} \frac{z^{n-2} dz}{(1+z^n)^{k+1}}.$$

Chestiunea se reduce, deci, la a calcula valoarea integralei:

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^{n-2} dz}{(1+z^n)^{k+1}},$$

unde $n > 1$, iar k este întreg. Pentru ca integrală să aibă sens trebuie:

$$-1 < n-2 < kn + n-1$$

$\therefore n > 1$ și $kn + 1 > 0$ și cum k este întreg putem scrie: $k \geq 0$.

Pe de altă parte, însemnând :

$$I_{k+1} = \int \frac{z^{n-2} dz}{(1+z^n)^{k+1}},$$

avem, conform integrațiunei prin părți :

$$I_{k+1} = \frac{z^{n-1}}{(n-1)(1+z^n)^{k+1}} + \frac{n(k+1)}{n-1} \int \frac{z^{2n-2} dz}{(1+z^n)^{k+2}}$$

și cum :

$$\int \frac{z^{2n-2} dz}{(1+z^n)^{k+2}} = \int \frac{z^{n-2}(z^n + 1 - 1)}{(z^n + 1)^{k+2}} dz = I_{k+1} - I_{k+2},$$

urmează imediat :

$$\frac{n(k+1)}{n-1} I_{k+2} = \frac{z^{n-1}}{(n-1)(1+z^n)^{k+1}} + \frac{n(k+1)}{n-1} I_{k+1}$$

și schimbând pe k prin $k-1$, avem :

$$\int \frac{z^{n-2} dz}{(1+z^n)^{k+1}} = \frac{z^{n-1}}{nk(1+z^n)^k} + \frac{n(k-1)+1}{nk} \int \frac{z^{n-2} dz}{(1+z^n)^k}.$$

Prin urmare,

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^{n-2} dz}{(1+z^n)^{k+1}} = \frac{n(k-1)+1}{nk} \int_0^{+\infty} \frac{z^{n-2} dz}{(1+z^n)^k},$$

termenul liber fiind nul la ambele limite. Dând succesiv, în această formulă, lui k valorile : 1, 2, 3, ... k și înmulțind rezultatele, obținem :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{z^{n-2} dz}{(1+z^n)^{k+1}} &= \frac{n(k-1)+1}{nk} \cdot \frac{n(k-2)+1}{n(k-1)} \dots \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{1}{n} \times \int_0^{+\infty} \frac{z^{n-2} dz}{1+z^n} \\ &= \frac{1/n(1/n+1)(1/n+2) \dots (1/n+k-1)}{k!} \int_0^{+\infty} \frac{z^{n-2} dz}{1+z^n}. \quad (1) \end{aligned}$$

Însă, această ultimă integrală, prin substituția $z^n = t$, devine :

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^{n-2} dz}{1+z^n} = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{n}} dt}{1+t} = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{(-\frac{1}{n})-1} dt}{1+t}.$$

Se ştie că :

$$T(a) \Gamma(1-a) = B(a, 1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad *)$$

unde a este cuprins între 0 şi 1 ; n fiind mai mare decât 1, avem :

$$0 < 1 - \frac{1}{n} < 1$$

aşa că :

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^{n-2} dz}{1+z^n} = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{(-\frac{1}{n})-1} dt}{1+t} = \frac{\pi}{n \sin(1-1/n)\pi} = \frac{\pi}{n \sin \pi/n}.$$

Introducând această valoare în (1), căpătăm :

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^{n-2} dz}{(1+z^n)^{k+1}} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \left(\frac{1}{n} + 2 \right) \cdots \left(\frac{1}{n} + k - 1 \right) \frac{\pi}{nk! \sin \pi/n}.$$

Putem scrie :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} dx}{\sqrt[n]{1-e^{-px}}} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \left(\frac{1}{n} + 2 \right) \cdots \left(\frac{1}{n} + k - 1 \right) \frac{\pi}{pk! \sin \pi/n},$$

în condiţiunile enunţului şi $k > 0$.

Integrala generală însă are sens şi pentru $k=0$; să vedem ce obţinem în acest caz. Scriem :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} dx}{\sqrt[n]{1-e^{-px}}} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(\frac{p}{n}-\alpha)x} dx}{\sqrt[n]{e^{px}-1}}$$

în care, dacă facem : $p/n - \alpha = -kp = 0$, $\therefore k=0$ căci $p > 0$, obţinem :

*) GOURSAT — tom I, — pag. 342.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[n]{e^{px}-1}} = \frac{n}{p} \int_0^{+\infty} \frac{z^{n-2} dz}{1+z^n} = \frac{\pi}{p \sin \pi/n}.$$

GH. D. POPESCU-BOTOȘANI.
Șc. Politehnică, București.

PROBLEMA 2815. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$x! + 1 = y^2.$$

CĂPITAN I. LINTEȘ.

Soluție dată de D-l IOAN B. FLORESCU,

Pentru $x \geq 10$ avem $x! = M 100$, deci $y^2 = 100 m + 1$.

Dar pentru ca y^2 să fie $M 100 + 1$, trebuie ca y să se termine cu 49, 51, 99, 01, deci trebuie ca :

$$y = 50 m \pm 1$$

și, în acest caz, ecuația devine :

$$x! = 100 m (25 m \pm 1)$$

sau :

$$\frac{x!}{2.5.10} = m (25 m \pm 1).$$

Din această ultimă egalitate, se vede că :

$$m = 3.4.6.7.8.9.11.12 \dots x.$$

Altfel, nu putem avea soluții. Ori, în acest caz, factorul $(25 m \pm 1)$ din membrul al doilea n'ar mai avea corespondent în membrul întâi, căci ia valori considerabil de mari și orice valori i s'ar da lui m , nu se poate găsi o valoare așa fel în cât numerele :

$$m \quad \text{și} \quad 25 m \pm 1$$

să fie consecutive, sau cel mult diferite de două unități.

Conchidem dar că pentru $x \geq 10$, nu avem soluție.

Pentru cazul când $x < 10$, găsim destul de ușor soluțiunile :

x	4	5	7
y	5	11	71

D-I CIORĂNESCU I. N. a dat iarăși o soluțiune completă, însă pe o cale mai lungă—făcând mai multe încercări,

Cealalți rezolvitori anunțați pe copertă, au rezolvat problema numai pentru cazul când $x < 10$.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

PROBLEMA 2874. *Să se studieze natura suprafeței.*

$$4(x^2 + y^2 + z^2) - 3(xy + yz + zx) + 5x + 16y - 17z + 26 = 0$$

și să se scrie ecuația redusă.

P. SERGESCU.

Soluție dată D-I D. PANAITESCU (Elev școala Politehnică din București).

Servindu-ne de notațiile din articolul D-lui T. LALESCU (*Criteriile de recunoaștere ale cuadricelelor* G. M. XIV p. 232), avem:

$$\Delta = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 8 & -3 & -3 & 5 \\ -3 & 8 & -3 & 16 \\ -3 & -3 & 8 & -17 \\ 5 & 16 & -17 & 52 \end{vmatrix} = -\frac{121}{4}, \quad \delta = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \frac{121}{4},$$

$$\eta = 4 + 4 + 4 = 12, \quad \xi = 16 + 16 + 16 - \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \frac{165}{5}.$$

Deoarece: $\xi > 0$, $\eta \delta > 0$, $\Delta < 0$, cuadricea e un *elipsoid real*.

Ecuația în s , care dă axele, este:

$$s^3 - 12s^2 + \frac{165}{4}s - \frac{121}{4} = 0.$$

Ea are rădăcinile 1, 11/2, 11/2. Cuadricea e un elipsoid de revoluție. Centrul acestui elipsoid se află fără nici o greutate; e în punctul $(-1, -2, 1)$. În sistemul de axe XYZ, paralele cu $oxyz$, dar cu origina în centrul elipsoidului, ecuația acestuia este:

$$4(X^2 + Y^2 + Z^2) - 3(XY + YZ + ZX) = 1,$$

cece arată că elipsoidul e de revoluție în jurul dreptei

$$X = Y = Z,$$

căci ecuația lui se poate scrie:

$$\frac{11}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{3}{2}(X + Y + Z)^2 = 1.$$

Pentru a obține ecuația redusă la axele principale, luăm ca nouă axă ζ , dreapta $X=Y=Z$, și ca axe ξ, η două drepte oarecare rectangulare situate în planul dus prin centru, perpendicular la $o\zeta$. Pentru fixarea ideilor, facem transformarea de axe:

$$\begin{aligned} X+Y+Z &= \sqrt{3}\zeta & 6X &= \sqrt{6}\xi + 3\sqrt{2}\eta + 2\sqrt{3}\zeta \\ X-Y &= \eta\sqrt{2} & \therefore 6Y &= \sqrt{6}\xi - 3\sqrt{2}\eta + 2\sqrt{3}\zeta \\ X+Y-2Z &= \xi\sqrt{6} & 6Z &= -2\sqrt{6}\xi + 2\sqrt{3}\zeta \end{aligned}$$

Ecuația elipsoidului devine:

$$\frac{11}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \zeta^2 = 1,$$

ceea ce se putea scrie și direct, din cunoașterea rădăcinilor ecuației în s .

Notă. Elipsoidul acesta e elipsoidul de inerție al unui cub omogen, față de unul din vârfurile sale.

PROBLEMA 2923. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{aligned} ab(x^2y + y^2x) &= b^2 - a^2 \\ a^3b^3(x^3 - y^3) &= b^6 + a^6. \end{aligned}$$

H. HRISTEA.

Soluție și generalizare: Să considerăm sistemul mai general

$$\begin{cases} x^2y + y^2x = \alpha\beta(\alpha - \beta) \\ x^3 - y^3 = \alpha^3 + \beta^3 \end{cases}$$

care prin substituția $y = tx$, se transformă în sistemul:

$$\begin{cases} x^3(t + t^2) = \alpha\beta(\alpha - \beta) \\ x^3(1 - t^3) = \alpha^3 + \beta^3 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1 - t^3}{t + t^2} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta(\alpha - \beta)},$$

sau

$$t^3 + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta(\alpha - \beta)}t^2 + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta(\alpha - \beta)}t - 1 = 0,$$

ecuație, care se poate scrie succesiv:

$$t^3 + \frac{\beta(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2(\alpha - \beta)}{\alpha\beta(\alpha - \beta)} t^2 + \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2) - \beta^2(\alpha - \beta)}{\alpha\beta(\alpha - \beta)} t - 1 = 0$$

$$t^3 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha(\alpha - \beta)} t^2 + \frac{\alpha}{\beta} t^2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta(\alpha - \beta)} t - \frac{\beta}{\alpha} t - 1 = 0$$

$$\dots + \left(t + \frac{\alpha}{\beta}\right) \left(t^2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha(\alpha - \beta)} t - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$$

și ale cărei rădăcini sunt:

$$-\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{-(\alpha^2 + \beta^2) + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha\beta(\alpha - \beta)^2}}{2\alpha(\alpha - \beta)}$$

Introducând aceste valori ale lui t , în ecuațiile:

$$x^3 = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{1 - t^3}, \quad y = tx,$$

obținem pentru fiecare valoare a lui t , câte trei valori pentru x și y .

Găsim astfel nouă sisteme de soluții în x și y și anume:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \varepsilon^i \sqrt[3]{\frac{\alpha^3 + \beta^3}{1 - \Delta_1^3}} \\ y = \varepsilon^i \Delta_1 \sqrt[3]{\frac{\alpha^3 + \beta^3}{1 - \Delta_1^3}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = \varepsilon^i \sqrt[3]{\frac{\alpha^3 + \beta^3}{1 - \Delta_2^3}} \\ y = \varepsilon^i \Delta_2 \sqrt[3]{\frac{\alpha^3 + \beta^3}{1 - \Delta_2^3}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = \varepsilon^i \beta \\ y = -\varepsilon^i \alpha \end{array} \right.$$

($i = 1, 2, 3$);

ε fiind una din rădăcinile cubice complexe ale unității, iar

$$\Delta_{1,2} = \frac{-(\alpha^2 + \beta^2) + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha\beta(\alpha - \beta)^2}}{2\alpha(\alpha - \beta)}$$

Pentru cazul când $\alpha\beta = 1$, suntem în cazul problemei propuse; înlocuind în sistemele de soluții de mai sus pe

$$\alpha = b/a \quad \text{și} \quad \beta = a/b,$$

obținem rădăcinile sistemului propus.

Observare. Analog se rezolvă sistemul

$$x^2 y - y^2 x = \alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$x^3 + y^3 = \alpha^3 - \beta^3.$$

GH. D. POPESCU.

Școala Politehnică, București.

Notă. O soluție analogă la această problemă, fără generalizare, s'a primit dela D-1 MARTINIAN P. BOGDAN (Liceul Caracal).

PROBLEMA 3043. Să se construiască un triunghi ABC , cunoscând distanța d , dintre centrul O al cercului circumscris și ortocentrul H , raza R a cercului circumscris și unul din unghiurile triunghiului. Discuție.

D. MĂRU.

I. Soluție dată de D-nii: TR. ANGELESCU, B. BARBĂLATT, I. GOLDSTEIN, P. KATZ, A. NICULESCU, O. POPEA, E. RUSSU, W. SOLOMON și B. ZUCKERMANN.

Construim un cerc cu centrul într'un punct O și cu raza R . Fie A unghiul cunoscut. Luăm pe cercul O un arc BC , capabil de unghiul cunoscut A . Ortocentrul H se găsește pe cercul cu centrul în O și de raza d , precum și pe cercul de rază R și trecând prin B , C (cercul lui CARNOT).

Perpendiculara ridicată în H pe BC , întâlnește cercul O în vârful A al triunghiului cerut.

Discuție. Posibilitatea construcției de mai sus, este legată de aceea a intersecției cercului BHC cu cercul O de rază d . Fie O centrul cercului BHC . Condiția de întâlnire a celor două cercuri este:

$$OO' = 2R \cos A \leq R + d.$$

Cercul se întâlnește în două puncte H și H' și deci căpătăm două soluțiuni.

În cazul egalității, cercurile sunt tangente și căpătăm o singură soluțiune, un triunghi isoscel. Dacă neegalitatea de mai sus nu e satisfăcută, nu avem nicio soluție.

Un alt caz de discutat este când $d = R$; ortocentrul H vine în unul din vârfurile triunghiului, iar acesta este dreptunghic în vârful considerat.

II. Soluție dată de D-nii: M. ADAM, A. ANTONIU, ST. LĂZĂRESCU, C. MIHĂILESCU, C. MIHĂIESCU, A. TAUBER, L. și S. WEISS.

Obținem, ca mai sus, latura BC . Din mijlocul său M , și cu o rază $R/2$, descriem un cerc, care întâlnește cercul cu centrul în O și cu raza $d/2$ în O_9 , centrul cercului lui EULER al triunghiului ABC . Pe OO_9 , luăm $O_9H = d/2$ și găsim ortocentrul H al triunghiului. Perpendiculara coborâtă din H pe BC , întâlnește cercul O în A și triunghiul este construit.

Discuție. Posibilitatea construcției este legată de posibilitatea întâlnirii celor două cercuri, ceea ce atrage condițiunea:

$$OM = R \cos A \leq \frac{R}{2} + \frac{d}{2},$$

care este identică cu cea din prima soluțiune.

III. Soluție dată de D-nii: M. FOCȘENEANU, I. IONESCU-BREZUICA și A. ȘCODRANO.

Construim mai întâiu triunghiul AOH, căruia îi cunoaștem cele trei laturi $R, d, 2R \cos A$. Apoi, paralel cu HA, dar în sens opus, ducem prin O o lungime $OM = R \cos A$. Perpendiculara în M pe OM taie arcul O în vârfurile B și C ale triunghiului ABC, care este astfel construit.

Discuția este provocată de posibilitatea construcției triunghiului AOH, care cere:

$$AH \leq AO + OH,$$

adică

$$2R \cos A \leq R + d.$$

Notă. 1. A dat o soluțiune trigonometrică D-l E. ȘTEFĂNESCU. Soluția D-sale este însă prea lungă, când putea fi cum e următoarea:

Din relația:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2 - d^2,$$

deducem

$$(1) \quad b^2 + c^2 = 9R^2 - a^2 - d^2.$$

Relația

$$2bc = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\cos A}$$

devine

$$(2) \quad 2bc = \frac{9R^2 - 2a^2 - d^2}{\cos A}.$$

Deducem din (1) și (2), prin adunare și scădere:

$$(b + c)^2 = k^2, \quad (b - c)^2 = m^2$$

care ne dau laturile b, c ale triunghiului ABC.

2. Alte construcțiuni au fost indicate de D-nii: N. ARCADIAN și ST. EPURE.

M. G.

PROBLEMA 3072. Care sunt numerele de trei cifre, divizibile cu suma cifrelor și cu 7?

I. COȘEREANU.

Pentru a reduce la minimum numărul încercărilor, vom ține seamă de câteva din regulele de divizibilitate.

Astfel, dela început, din tabloul multiplilor de 7 de trei cifre, vom suprima pe cei impari, în care suma cifrelor e pară, vom suprima de asemeni pe cei a căror sumă a cifrelor e divizibilă cu 5, dar care nu se termină cu 0 sau 5.

Din multiplii de 7 rămași, vor fi soluțiuni ale problemei :

1. Cei în care suma cifrelor este 7, 14 sau 21, adică :

133, 266, 322, 392, 399, 511, 518,
588, 644, 700, 770, 777, 966

în număr de 13.

2. Cei în care suma cifrelor este 5, 10 sau 15, adică :

140, 280, 735, 910

în număr de 4.

3. Cei în care suma cifrelor este 3, 6, 9, 18, adică :

126, 210, 252, 315, 378, 420,
441, 504, 630, 756, 882

în număr de 11.

4. Cei rămași dintre cari mai suprimăm :

a) pe cei nedivizibili cu 4 dar a căror sumă a cifrelor este divizibilă cu 4,

b) » » » » 8 » » » » » » 8,
» » » » 11 » » » » » » 11, 22
» » » » 13 » » » » » » 13, 26
» » » » 17 » » » » » » 17
» » » » 19 » » » » » » 19
» » » » 23 » » » » » » 23

Rămân astfel numerele :

112, 224, 308, 336, 364, 448, 476, 840,

care sunt încă 8 soluții ale problemei.

În total, problema are deci $13+4+11+8=36$ soluții.

Notă. 1. Au dat, pe cale de discuțiune riguroasă, cele 36 soluții ale problemei, D-nii : E. ȘTEFĂNESCU (Lic. Spiru-Haret, Buc.) și N. BOTEA (Lic. Cantemir, Buc.).

2. Mai toate celelalte soluțiuni s'au dat pe cale de încercări directe, formulate cam în felul următor :

... „dintre multiplii de 7 de trei cifre, cei cari sunt divizibili și cu suma cifrelor, sunt...”

Ceeace e mai caracteristic, este faptul că nici pe această cale... infailibilă, corespondenții noștri nu au reușit să găsească toate soluțiile problemei.

Cevă mai mult, unii corespondenți au dat ca soluțiuni numere ce nu îndeplineau condițiile enunțului; astfel d. S. KATZ (952, 996) LONGIN IONESCU (602, 825, 875).

3. Alții au găsit mai multe decât sunt în realitate: D-1 I. VASILIU 40 soluții (!?)

4. Alții, în fine, au pus condițiuni evident eronate, interesante totuși pentru aprecierea cunoștințelor matematice individuale. Astfel, D-1 F. MARCUS zice:

„Pentru ca N să fie divizibil cu 7 și cu suma cifrelor, trebuie ca“

$$N = \mathcal{N} (a + b + c) (2a + 3b + c).$$

D-1 A. ZAMFIRESCU (Elev cl. VI) zice:

„Știm că numerele care se împart cu suma cifrelor, nu sunt decât multiplii de 3 sau de 9“ !! Astfel de raționamente își au locul însă, numai în coloanele „Suplimentului“ „Gazetei“, unde, de altfel, am să public câteva.

Recomand corespondenților mai puțin dispreț pentru problemele de acest fel și deci, mai multă atenție și mai multă conștiinciozitate la rezolvarea lor. Altfel, riscă să fie trecuți în „Supliment“.

5. Au găsit soluțiuni ale problemei D-nii: P. IONESCU, O. FLORESCU, N. ARCADIAN și L. WEISS, câte 35. D-nii: P. BLEIWEISS 29; L. BRÜLL și P. KATZ 25; F. NEGRETZU și F. RABINOVICI 24; EM. ILIESCU 19; DOBRESCU-BĂBICI 17. D. SMĂRÂNDESCU 13; I. T. POPOVICI 6; A. ZAMFIRESCU 4 (!).

M. G.

PROBLEMA 3123. *Să se găsiască un patrat perfect format din 4 cifre consecutive, scrise într'o ordine oarecare.*

LOCOT. COL. GH. BUCLIU.

Soluție dată de d-nii: E. PĂLĂRIERU, E. ȘTEFĂNESCU (Lic. Spiru Haret, București); M. STAMATIU (Absolvent al Lic. Brătianu, Pitești); A. STOICA, N. BOTEA (Lic. Cantemir, București); I. C. VASILIU, E. POP, P. IONESCU, T. RĂDULESCU (Lic. Militar Mănăstirea Dealului); M. ADAM (Constanța); A. NOVAC (Lic. Internat Iași); E. BERCOVICI; I. MIU (Lic. Ioniță Asan, Caracal) și T. ANGELESCU (Giurgiu).

Un patrat perfect se termină cu una din următoarele grupe de câte 2 cifre:

00; 01; 04; 09; 16; 21; 24; 25; 29; 36; 41; 44; 49; 56; 61; 64; 69; 76; 81; 84; 89 sau 96.

Din aceste grupe, eliminăm pe acelea cu cifre identice și pe acelea în care diferența cifrelor este mai mare decât 3. Cu grupele rămase se pot forma următoarele 37 numere de 4 cifre consecutive:

2301; 3201; 3421; 4321; 3021; 1324; 3124; 3524; 5324; 3425;
4325; 4536; 5436; 2341; 3241; 3456; 4356; 4756; 7456; 7856;
8756; 3564; 5364; 5764; 7564; 7869; 8769; 4576; 5476; 5876;
8576; 8976; 9876; 6789; 7689; 7896; 8796.

Din acest tablou, eliminăm M3 care nu sunt și M9 și numerele de forma $M3 + 2$. Eliminăm deasemenea pe 2341, care este număr prim. Făcând descompuneri în factori sau extrageri de rădăcini asupra celor 17 numere rămase, găsim că soluțiunile problemei sunt numerele:

$$4356 = 66^2 \quad \text{și} \quad 5476 = 74^2.$$

Observațiuni. 1°. Au găsit cele 2 soluțiuni ale problemei, prin încercări mai laborioase, d-nii: P. KATZ (Șc. Politehnică, București); I. LĂZĂRESCU (Elev Șc. militară de Geniu, Cotroceni); N. SEGĂRCEANU, D. NICULESCU, P. BLEIWEISS, L. BRÜLL, O. BOLGIU, B. REINHORN (Lic. Cantemir, București); I. CANTACUZINO, C. I. CIORĂNESCU, G. SIMIONESCU, M. PĂTROIANU, I. ȘUȘULESCU (Lic. militar, Mănăstirea Dealului); A. COMĂNESCU-BĂLTENI (Lic. Slatina); M. H. BRĂTESCU-DANUBIU, S. RĂDULESCU, S. LĂZĂRESCU, V. LĂZĂRESCU, F. POPESCU, M. POPESCU (Lic. I. Maiorescu, Giurgiu); F. RABINOVICI, G. MIHOC, L. CĂLDĂRARU, D. SOLOMON (Lic. Gh. Șincai, București); D. POPESCU (Lic. Constanța); D. BLUMENFELD (Lic. Laurian, Botoșani); V. VÂRLAN, O. BURSTIN (Lic. Internat, Iași); N. R. BRĂTESCU, P. ȚĂNĂREANU (Lic. Sf. Sava, București); M. G. DUMITRESCU (Lic. Carol I, Craiova); S. WEISS (Lic. Galați); I. POPOVICI, T. VAINFELD (Lic. Mihai Viteazul, București); I. GOLDSTEIN (Bârlad); ILIE IONESCU-BREZUICA (Lic. Caracal); I. COȘEREANU, G. DAVID (Timișoara); A. MLADENOVICI (Clasa V reală, particular) și O. SCHÄCHTER (Lic. Comunității Israelite, Galați).

2°. A găsit ambele soluțiuni cineva care nu și-a iscălit foaia, pe care a trimis rezolvarea problemei.

3°. Au găsit numai soluția 4356, prin diferite încercări, d-nii: M. GHELBBER (Seminarul pedagogic Universitar, București); L. WEISS (Lic. Alexandri, Galați); I. GRIGORESCU (Lic. militar Mănăstirea Dealului); G. TAILER (Lic. Codreanu, Bârlad); S. KATZ (Lic. Laurian, Botoșani) și P. PETREANU (Lic. Caracal).

4°. Au găsit numai soluția 5476 d-nii: C. N. POPESCU (Lic. Giurgiu); G. STĂNCULESCU (Lic. Pitești); G. GROFȘOREANU (Lic. Arad) și A. OPRAN (Lic. Cantemir, București).

5°. D-l T. ANGELESCU găsește că mai răspund problemei numerele:

$$324 = 18^2 \quad ; \quad 576 = 24^2$$

de 3 cifre și

$$23104 = 152^2 \quad ; \quad 32041 = 179^2$$

de 5 cifre.

6°. D-nii N. SEGĂRCEANU și S. KATZ arată că soluția 4356 este aceea cerută de exercițiul 85 (Vol. XXVIII pag. 477) și exercițiul 2 (Vol. XXIX pag. 38) propuse de d-l S. KATZ. Problema 3123 nu-și are însă origina în aceste exerciții.

7°. Au găsit ambele soluții prin calcule mai anevoioase, d-nii: N. ARCADIAN; B. GATAIANȚU; I. MIU (Lic. Caracal); M. GEORGESCU (Lic. Internat, Iași); C. IONESCU-BUJOR (Lic. Cantemir).

Gh. B.

EXERCITIUL.

78. Două numere consecutive de câte două cifre au patratele terminate cu două numere de două cifre unul răsturnatul altuia. Se cer acele numere.

M. H. BRĂTESCU-DANUBIU.

R. Din numerele de două cifre, care pot termina un patrat, numai 16 și 61 sau 69 și 96 sunt răsturnate. La primele, rădăcinile se termină cu 4 ori 6 și 1 sau 9, care nu sunt consecutive. La celelalte, rădăcinile se termină cu 3 ori 7 și 4 ori 6, dintre care 3 și 4 sunt consecutive crescând și 7 și 6 consecutive descrescând. Se găsesc soluțiile: 13, 14; 36, 37; 63, 64 și 86, 87.

79. Care este numărul de trei cifre, la care produsul cifrelor este egal cu suma patratelor acelor cifre?

T. N. ANGELESCU.

R. Din $abc = a^2 + b^2 + c^2$, se scoate că $(a-2)bc = a + b + c$, așa că se vede că nici unul din numere nu este sub 3. Dăm lui a valorile 3, 4, 5, ..., 9 și găsim că singurele soluții sunt: 333, 336, 363, 633.

80. La un patrat de patru cifre, ultimele două cifre sunt patratul ultimei cifre, iar ultimele trei cifre fac patratul ultimelor două cifre.

M. GHELBER.

R. Numai patratele terminate cu 5 sau 6 se termină cu aceste cifre, dar numai 625 este patratul lui 25, pe când patratul lui 36 este 1296, care nu se mai termină cu 36. Incercând pe 25 și 75, multiplul de 25 se găsește că patratul lui 75, care este 5625, convine problemei.

81. Să se găsiască maximul expresiei

$$E = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{p^2 r},$$

notațiile fiind cele obișnuite.

I. C. VASILIU.

R. Din formulele:

$$\frac{ra(rb + rc)}{p} = a \dots \text{etc.},$$

avem:

$$\frac{ra(rb - rc)}{p} = b - c \dots \text{etc.}$$

$$\text{De unde } \sum \frac{b-c}{r} = \frac{rb-rc}{p} + \frac{rc-ra}{p} + \frac{ra-rb}{p} = \frac{0}{p} = 0 = \text{constant.}$$

Suma factorilor e constantă, deci maximul are loc când $a = b = c$, iar maximul e 0.

82. Să se demonstreze relațiunea :

$$\frac{a}{r_a^2(r_b + r_c)} + \frac{b}{r_b^2(r_c + r_a)} + \frac{c}{r_c^2(r_a + r_b)} = \frac{1}{S}.$$

ADRIAN A. BUȘILĂ.

R. Cu ajutorul relațiilor cunoscute

$$S = (p-a) r_a = (p-b) r_b = (p-c) r_c ,$$

primul membru devine

$$\sum \frac{a}{\frac{S^2 a}{(p-a)^2 (p-b) (p-c)}} = \frac{p-a+p-b+p-c}{S p} = \frac{1}{S}.$$

83. Se dau două triunghiuri $A_1 BC$, $A_2 BC$. Printr'un punct M de pe BC , se duc transversalele $MB_1 C_1$, $MB_2 C_2$. Să se arate că $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ sunt concurente.

E. ȘTEFĂNESCU.

R. Se aplică teorema lui DESARGUES triunghiurilor omologice $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$.

84. Să se afle limita expresiunei :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)(2n+5)\dots(4n+1)(4n+3)}{2^{2n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}.$$

N. CIORĂNESCU.

R. În identitatea :

$$\cos x = (1 - 4x^2/\pi^2) (1 - 4x^2/9\pi^2),$$

facem $x = \frac{1}{4}\pi$, găsim ca limită $\sqrt{2}$.

85. $f(x)$ fiind un polinom de gradul al treilea, să se arate că expresiunile : $f(u-h)$, $f(u)$, $f(u+h)$ sunt în progresie aritmetică, u fiind o rădăcină a ecuației $f''(x) = 0$, iar h un număr oarecare.

ALEXANDRU TAUBER.

R. Se va aplica formula lui TAYLOR, expresiunilor : $f(u-h)$, $f(u)$, $f(u+h)$ și se găsește :

$$f(u-h) + f(u+h) = 2f(u).$$

86. Să se afle maximul produsului :

$$P = \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma,$$

α , β , γ , fiind unghiurile formate de o aceeași dreaptă, cu trei axe rectangulare.

ALEXANDRU TAUBER.

R. Maximul lui P are loc. în acelaș timp cu maximul patratului său :

$$P^2 = \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta \cdot \cos^2\gamma.$$

Suma factorilor fiind :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

rezultă :

$$P_{\max.} = 1/3 \sqrt{3}$$

87. Să se stabilizească, prin considerațiuni de mecanică, identitatea trigonometrică :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

O. POPEA.

R. Considerăm 2 forțe concurente F și F' , a căror rezultantă este R . Fie a și b unghiurile (F, R) și (F', R) . Ținem seama de :

$$R = F \cos a + F' \cos b$$

și de

$$R/\sin(a+b) = F/\sin b = F'/\sin a.$$

PROBLEME PROPUSE.

3171. Numărul 30 se poate pune în două moduri sub forma $xy(x+y)$.

Mai sunt alte numere care se bucură de aceeași proprietate ?

I. IONESCU.

3172. Un patrat este scris cu cifrele 1, 2, 3, 5, 8. Rădăcina lui patrată are suma cifrelor egală cu suma cifrelor patratului. Se cere acel patrat.

I. VASILIU.

3173. Se cer trei numere întregi, așa că produsul primelor două, împărțit cu al treilea, să dea un cât egal cu diferența dintre al treilea număr și suma celor dintâi două.

E. ȘTEFĂNESCU.

3174. Fie $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ intersecțiile mediatoarelor (perpendicularelor ridicate pe mijloacele laturilor) unui triunghi ABC , cu cercul circumscris.

Să însemnăm cu S_a, S_b, S_c dreptele lui SIMSON ale punctelor A_1, B_1, C_1 în raport cu triunghiul ABC și cu S'_a, S'_b, S'_c dreptele lui SIMSON ale punctelor A_2, B_2, C_2 . Să se demonstreze că dreptele din fiecare grup $(S_a, S_b, S_c), (S'_a, S'_b, S'_c), (S'_a, S'_b, S_c), (S_a, S'_b, S'_c)$ sunt concurente.

MARIN ȘTEFAN.

3175. Să se demonstreze că în orice triunghi, cele 6 drepte care unesc mijlocul unei bisectoare interioară, cu extremitățile laturii tăiată de acea bisectoare, întâlnesc în prelungire laturile triunghiului complementar, în 6 puncte conciclice.

Să se determine natura acestui cerc.

N. BLAHA.

3176. Fie O și I centrul cercului circumscris și al cercului înscris unui triunghi ABC , A_m mijlocul lui BC și φ punctul lui FEUERBACH. Să se demonstreze că dreapta φA_m și perpendiculara dusă din A_m pe OI formează un triunghi isoscel, cu bisectoara (interioară sau exterioară) unghiului A .

M. GRÜNBAUM.

3177. I. Să se rezolve sistemul de ecuații :

$$ax^2 + by^2 = \sqrt{a^2 + b^2} xy,$$

$$a^2x + b^2y = (a + b)x^2y^2.$$

Din ecuațiile de mai sus, să se deducă :

$$x^3 + y^3 = \frac{a^3 + b^3}{c} + \frac{\gamma}{2abc} (a^3 + 2ab\sqrt{a^2 + b^2} + b^3),$$

unde c și γ depind de a și b .

Dacă $b = a(2 + \sqrt{3}),$

atunci

$$y^3 = \frac{a}{\sqrt{6}} \left(\cotg \frac{5\pi}{12} + \sqrt{\tg \frac{5\pi}{12}} \right).$$

O. ORĂNESCU.

3178. Să se găsiască numărul termenilor diferiți de zero în dezvoltarea determinatului:

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & . & . & . & . & . & . & a_n & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & . & . & . & . & . & . & 0 & b_n \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & . & . & . & . & . & . & c_n & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & l_1 & 0 & l_2 & . & . & . & . & . & . & 0 & l_n \end{vmatrix}.$$

E. ABASON.

3179. Fiind date cantitățile p, q și punctul $M(a, b)$ de coordonate a și b în planul a două axe perpendiculare, să se vadă prin ce construcții se poate obține punctul $M_1(pa + qb, qa - pb)$, din punctul M .

N. ABRAMESCU.

3180. O pasăre zboară pe o orizontală cu iuțeala uniformă v_1 ; un vânător trage în pasăre când axa armei este într'un plan perpendicular pe planul P , determinat de traiectoria pasării și verticala unui punct al acestei traiectorii.

Dacă iuțeala inițială a glonțului este v_2 , distanța vânătorului la planul P este d , înălțimea traiectoriei pasării în raport cu gura țevii este h și presupunând că pasărea este lovită, să se determine:

1. Inclinarea țevii în momentul tragerii.
2. După cât timp dela tragere este atinsă pasărea și în ce punct al traiectoriei sale?
3. Viteza relativă a glonțului față de pasăre în momentul lovirii ei.
4. Traiectoria pasării după lovire, aceasta presupusă că a cauzat moartea instantanee a pasării.

CR. MATEESCU.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (3132, 51, E); Arcadian N. (3144, 46, 55); Barbălat M. B. (3144, 46); Basacov G. (3117, 44, E); Bleiweiss P. (3120, 35); Blumenfeld D. (3159, E); Bogdan G. (2929, 3110, 35, 44, 54, E, P); Bolgiu O. (3135); Botea N. (3021, 82, 101, 35, 49, 59, 62); Botez M. (3154); Brătescu-Danubiu M. (2849, 946, 3101); Brüll L. (3135); Burstin O. (3135, 42); Căldăraru L. (3135, 54, 59); Cazacu G. (3154); Ciorănescu C. (3062, 154, 66, E); Cosmovici G. (3139, 54); Coșniță V. (3166, E); Costăchescu N. I. (3117); David G. (3091, 142, E, R); Dragomir I. (3144); Florescu O. (3117); Focșeneanu M. (3146); Gataianu B. (E, P); Georgescu C. (3121, 47, 51, 54, E); Georgescu M. (3117, 51, 59); Giurumescu C. (3117); Goldstein M. (3120, E); Groșoreanu Gh. (3142); Ionescu-Bujor C. (3151, 54); Ionescu-Brezuica I. (3085, 142, 54, E); Ionescu I. P. (3021, 146, 54, E); Kahane A. (P); Marin S. (3132); Marinescu I. (3092); Mihăilescu R. (3135, 42, 54); Mirescu P. (3139, 44, 54, 59); Mitescu R. (3121); Miu I. (3092, 117); Mladenovici A. (3101, 03, 32, 35 E, N, P, R); Negretzu F. (N, P, R); Nicolaescu N. (3101); Nicolescu I. N. (3120, 39, 54, 55, 59); Niculescu S. D. (3135, 42); Novac A. (3151); Opran A. (3101); Pătroianu M. (3101, 03); Petreanu P. (3154); Popea O. (3115, 20, 54, 55, 59, N, R); Popescu C. (3154); Popescu D. (3132); Popescu I. N. (3154, 55); Popovici N. (3146); Popoviciu T. (3118, 44); Reinhorn B. (3101, 22, 35, 44, N); Russu E. (3149, 54); Schächter-de-Arie I. (3139, 42); Schächter O. (3132, 42, E, P); Simionescu G. (3103, 46, 54, E); Simionescu N. (3154); Solomon W. (3144); Stamatiu M. (3101, 39); Stănculescu Gh. (3139); Ștefănescu E. (P); Tailer G. (E); Teodorescu D. (3147, 51, 54); Tudorache S. (3120, 39); Varlam H. (3120); Vasiliu I. (3139, 55, N, P); Weinfeld T. (3162); Weiss L. (3155, C, E, N); Weiss S. (3142).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1576, 91, 2063, 116, 91, 289, 95, 329, 30, 54, 77, 94, 95, 440, 573, 86, 651, 61, 82, 83, 701, 19, 73, 829, 35, 72, 79, 91, 95, 910, 20, 29, 55, 72, 77, 78, 80, 91, 3019, 31, 47, 52, 53, 59, 67, 71, 73, 83, 84, 89, 90, 93, 97, 98, 102, 04, 08, 09, 13, 28, 29, 30, 31, 33, 38, 40, 48, 57, 58, 60, 61 și 67 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“ 28 VOLUME

Colecțiunea întreagă Lei 1500,—
Se vând și volume izolate, cu prețul de 70 lei, afară de
volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI și XXV, care se vând
numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie*. (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).
2. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).
3. N. Abramescu, *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăugită*, 1921. (Epuizată).
4. A. G. Ioachimescu și G. Țițeica, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).
5. Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).
6. Tr. Lalescu, *Tratat de Geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăugită*, 1923 Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice Lei 20,—
7. Gh. Lazăr, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) Lei 5,—
8. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăugită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme Lei 60,—
9. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, *Vocabular Matematic* Lei 20,—
La aceste prețuri se vor adăoga taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“ (Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

1. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul*. Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea, construcțiilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentue de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septembrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face p-termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese: reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: I. D. Teodor, Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimete D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București.

*Asociație pentru cultură și
literatură poporului Român din*

Sibiu



GAZETA MATEMATICĂ

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXIX.

NUMĂRUL 10. — Iunie 1924



SUMARUL

1. † Nicolae Nicolescu N. I. Georgescu.
2. Rezultatul concursului „Gazetei Matematică” G. Țițeica.
3. O proprietate funcțională comună cercului și spiralei logaritmice A. Angelescu.
4. O problemă de aritmetică Wilhelm I. Solomon.
5. Note Matematice: 65—68.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 111.
8. Probleme rezolvate: 2122, 2512, 2615, 2970, 3077, 3142.
9. Exerciții: 88—104.
10. Probleme propuse: 3181—3190.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET

1924

SPRE ȘTIINȚA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXIX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politehnică din București, **Tr. Lalescu**, Doctor în Matematici, Profesor Universitar și **I. D. Teodor**, Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Școala Politehnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GEORGE BORNEANU, Inginer, Directorul Fabricilor de chibrituri și timbre, București.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor rediță în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela D-l Cassier *I. D. Teodor*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poștă.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evita confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

În vederea sporirii taxelor poștale, corespondenții pot trimite de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsa spații albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecință.

Nu se admite însă a se trata pe aceeași foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, creațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebuie să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 56, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 53, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 16, 26, 36, 47, 53, 56, 61, 95, 3005, 13, 19, 42, 45, 55, 60, 69, 75, 89, 90, 95, 96, 107, 12, 14, 27, 29, 31, 34, 40, 41, 48, 50, 56, 58, 60, 61, 63, 64, 65, 69, 71, 75, 76, 77, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90.

DARE DE SEAMĂ

asupra banchetului dat de Societatea „Gazeta Matematică”
în seara de 3 Maiu 1924.

S'a făcut adeseori observația că ultimul războiu a avut influențe puternice și asupra vieții diferitelor organizații ale Țării Românești. Și așa este. Suferințele au fost mari în lupta pentru unirea tuturor Românilor, dar izbânda finală constituie o puternică dovadă că Neamul nostru este înzestrat cu însemnate calități, menite să asigure multă vreme propășirea sa.

După trecerea norilor grei, cari umbreau țara, a fost nevoie de muncă multă și bine organizată, pentru refacere și consolidare. Munca s'a început în diferite chipuri. În general, s'a vorbit mult de tot și s'a lucrat puțin. Dar de scris! Câte nu s'au scris, fără ca autorii să aibă milă de hârtia pe care deseori o prăpădiau în zadar! Să le dăm însă dreptate: „De-așa vremi trebuiau să se învredniciască cronicarii și rapsodii”.

Cu toată lipsa de hârtie, au ieșit la iveală fel de fel de producții literare. Apoi, o mulțime de ziare și reviste au apărut, dar spre fericire, o bună parte au murit repede. Unele au făcut sacrificii mari ca „să propună” soluții pentru cele mai însemnate probleme puse în țară după războiu, soluții necitite decât de vreun „onorabil cetățean”, care — dornic să afle cum mai merge cu politica — vrea să știe „el cu cine votează?”.

Pe tărâmul științific, și în special în Matematici, publicațiile s'au făcut cu toată seriozitatea. În vraf de publicații, a apărut și „Revista Matematică” din Timișoara. Cei cari nu vor fi știut că susținătorii ei sunt crescuți în spiritul „Gazetei Matematice” de muncă făcută cu pricepere și desinteresare, vor fi zis la apariția ei: „O revistă mai mult!” N'a fost însă așa. Ea a apărut în mod regulat și într-o formă destul de bună sub toate raporturile. Se simția nevoie de ea, și în puțin timp, o mulțime de elevi au început să-și facă ucenicia aci, pentruca mai târziu să-și intensifice cultura științifică la „Gazeta Matematică”.

„Gazeta”, care a ținut în vraja ei atâtea serii de „realiști”, s'a resimțit și ea din cauza războiului. Totuși, datorită muncii neobosite a câtorva membri ai Societății „G. M”, această publicație a apărut în 1922 în condițiuni excelente, producând admirația matematicianilor străini.

De asemenea, s'au reluat mult aşteptatele concursuri ale „Gazetei“, între elevii liceelor reale din întreaga ţară. Cu multă bucurie, examinatorii au semnalat destule elemente bune, dornice să depună în curând întreaga lor pricepere în serviciul ţării. În ani de-a rândul, d-l profesor Țițeica a îndemnat, sub diferite forme, pe tinerii candidați să cunoască tot ceea ce interesează neamul nostru și să transforme energia noastră potențială în energie actuală, pentru a contribui la ridicarea neamului românesc în rândul neamurilor mari.

Correspondenții concurenți s'au pătruns de înțeleptele sfaturi ale d-lui Țițeica și au venit și anul acesta cu destulă seriozitate la acest concurs, menit să le aprecieze imparțial pregătirea matematică și atunci, încrezători în forțele lor, să pășiască înainte pentru desăvârșirea studiilor speciale.

Rezultatele concursului se văd în prezentul număr al „Gazetei“, așa că, în rândurile următoare, voi expune cele petrecute la banchetul din seara de 3 Maiu 1924, care a avut loc la Fabrica de Chibrituri Filaret.

În sala încăpătoare și plină de lumini multicolore, totul a fost aranjat cu mult gust. Pereții albi erau împodobiți cu verdeață și steaguri tricolore, iar masa în □ era împodobită cu flori și menu-uri lucrate artistic. Nici taraful de muzicanți n'a lipsit, chiar a contribuit mai toată vremea să intensifice buna dispoziție a conmesenilor.

Într-o atmosferă plăcută, dascălii și ucenicii se așează la masă, invitând cu mare dragoste, ca și alte dăți, în capul mesei pe cei mai bătrâni, din mijlocul cărora neobosiții „stâlpi“, plini de mulțumire și entusiasm, au contribuit într-o măsură cât se poate de mare să strângă legăturile dintre conmeseni și să dea, prin puține cuvinte, sfaturi mult necesare tinerilor elevi.

La această sărbătoare a „Gazetei“, au luat parte următorii membri TH. ANGHELUȚĂ, I. BANCUI, G. BORNEANU, I. BUȘILĂ, I. CAPRIEL, V. CRISTESCU, GH. DUMITRESCU, GH. EM. FILIPESCU, M. GHERMĂNESCU, CĂPITAN D. GHIMUȘ, C. GRIGORESCU, R. IANCULESCU, GH. ILIESCU, A. G. IOACHIMESCU, I. IONESCU, TR. LALESCU, CĂPITAN I. LINTES, MAIOR G. LITEANU, C. MALCOCI, TH. MAREȘ, ST. MIREA, C. MITITELU, GH. NICHIFOR, O. ONICESCU, GR. ORĂȘEANU, GH. POFESCU, G. SĂPUNARU, C. SFÎNȚESCU, O. ȚINO, G. ȚIȚEICA ȘI I. VASILESCU.

De asemenea au participat următorii corespondenți: T. ANGELESCU, M. PĂTROIANU, G. SIMIONESCU, T. UDRISKY, I. VASILIU, S. WEISS, B. BARBĂLATT, D. BLUMENFELD, N. BRĂTESCU, G. DAVID, C. SCHÖNFELD, L. WEISS, A. BOCEC, G. BOGDAN, I. HARNAGEA, S. LĂZĂRESCU, C. MIHĂESCU, A. PANAITESCU, T. POPOVICIU, E. RUSSU, W. SOLOMON, M. STAVRAT, E. ȘTEFĂNESCU, A. TAUBER ȘI I. VASILESCU.

Primul, care a luat cuvântul, la șampanie, a fost d-l inginer inspector-general V. CRISTESCU, care închină pentru Familia Regală.

D-l I. IONESCU își exprimă părerea de rău că d-l TEODOR nu poate să fie aci, în mijlocul nostru, fiind bolnav. Ridică paharul în sănătatea d-lui TEODOR.

D-l G. ȚIȚEICA se ridică întâmpinând zâmbetele celor cari aşteptau obicinuita d-sale lecție de morală. D-sa începe așa :

„Înainte de a ține cuvântarea morală, aş vrea să se creeze o altă tradiție. Aș dori ca, tot atât de solemn, să închinăm pentru un simbol, care stabilește o legătură atât de strânsă între colaboratori și membri. Gândul

nostru să se ducă la „Gazeta Matematică” și să urăm tuturor publicațiilor de Matematici viață lungă.

„In ceeace privește *cuvântarea morală*, pot spune că nu sunt răspunzător, căci nu eu am inventat-o, ci d-l inginer IOACHIMESCU (Aplauze). Așa fiind, a trebuit să mă execut în diferite chipuri, după cum s'a văzut. Nu e însă ușor să se țină o astfel de cuvântare. Mulți sunt pregătiți să o privească cu dispreț, sau cu un zâmbet ironic. Să spun și în seara aceasta câteva cuvinte.

„Mi-aduc aminte de o piesă franțuzească, în care eroul, un reprezentant politic, ca să mulțumiască pe alegători, puneă pe feciorul casei ca în sală, pe masă, să pună un gramofon, care începea să repete diferite cuvântări patriotice. Se spuneau, în acest mod, aceleași cuvântări față de toți alegătorii.

„Mă tem ca nu cumva cuvântarea morală să ajungă același clișeu. Și totuși, sub o formă oarecare, trebuie să existe. O mulțime de fenomene sociale se repetă periodic și totuși sunt necesare, le primim.

„In această periodicitate, este ceva care rămâne etern. Care este morala care se poate scoate pentru viață? Fiecare dintre candidații concursului „G. M.” va fi profesor sau inginer. Totdeauna, deasupra intereselor particulare, să pună interesele instituției din care face parte, apoi deasupra tuturor, să considerăm interesele neamului întreg.

„E mare nevoie să supunem intereselor instituției, interesele personale, deasemenea toate interesele să fie supuse interesului general al națiunii.

„Se degajează de aci o morală superioară. De aceea noi, membrii „G. M.”, conduși mereu de flacăra științei, ne simțim tineri în mijlocul d-v. In acest criteriu de viață, care ne trebuie tuturor, este toată morala. In cinstea ei să închinăm”. (Aplauze).

D-l TIBERIU POPOVICIU, în numele concurenților, mulțumește membrilor „Gazetei Matematice”, pentru îndrumarea care se dă corespondenților și promite că întotdeauna corespondenții vor căuta să lucreze în același spirit, iar cei cari se prezintă pentru cea din urmă oară la concurs, vor duce cu ei cea mai frumoasă impresie.

D-l A. G. IOACHIMESCU amintește că pentru ținerea concursului au trebuit să fie învinse câteva greutăți. Aceasta se datorește: D-lui Profesor TR. LALESCU, care a obținut bilete pentru C. F. R.; apoi, după o tradiție constantă, d-l THIERRIN a găzduit totdeauna pe concurenți la Institutul d-sale.

Deasemenea D-l I. D. TEODOR, ajutat de D-nii G. BORNEANU și GH. ILIESCU, s'a îngrijit de masa aleasă. Le aducem tuturor mulțumirile noastre.

In acest timp, venind vorba de Geometrie, D-l Profesor G. A. NICHIFOR se ridică, începând așa: «Auzind de reprezentarea geometrică nu pot să mai stau jos» și continuă:

„Dacă ne propunem să privim puțin în spațiul cu 4 dimensiuni, și mai ales, dacă celei de-a patra dimensiune, timpului, îi dăm o valoare negativă, vom putea, în urmă, schimbând doar semnul, să privim și în viitor.

„Ca unul care privesc mai des în spațiu, îmi permit să vă rog să urmăriți împreună cu mine «Epura Gazetei Matematice».

„Vedeți colo departe, pentru $t = - 29$ ani, un mic grup de ingineri, pe ai căror umeri începând să apese greutatea unei gigantice lucrări, podul peste

Dunăre, ce li se încredințase, se gândesc la pregătirea cât mai temeinică a viitorilor ingineri și pun bazele «G. M.». La 15 septembrie 1895, «vede lumina» primul număr al «Foi lunare de Matematici elementare și speciale pentru uzul școalelor secundare, speciale și superioare».

„Increderea cu care întemeietorii au tras prima linie pe epura pe care o citim acum împreună, a fost încununată de succes.

„Curând, din întreg spațiul României mici, prin *proiectante* bine conduse de *fondatori*, s'au înscris pe epură «puncte strălucitoare», drept *reprezentări* a unor elemente de elită, devenite puțin în urmă ingineri, ofițeri de arme speciale și profesori de științe.

„În această privință, unul dintre stâlpii «G. M.», D-l profesor ȚIȚEICA, scrie într'un articol :

„E de ajuns ca cineva să se mulțumească numai a întoarce paginile diferitelor volume ale «Gazetei Matematice» și va întâlni *înscrise* nume neașteptate de *elevi*, — cari astăzi sunt profesori de liceu sau Universitate, ingineri, ofițeri, etc.

„Toți păstrează desigur, din colaborarea lor la «Gazeta Matematică», pe lângă amintirea duiosă a unei ucenicii plăcute, o cută specială a spiritului de sinceritate și de seriozitate, pe care o dă cultivarea mai deaproape a științei matematice».

„Atât de bine au pus bazele epurei Gazetei Matematice fondatorii «Gazetei», încât pentru a *afli adevărata valoare* a elementelor sale de colaborare, nu s'a simțit până acum nevoie nici de *schimbare de plan de proiecție* și mai puțin de vre-o *rotație* vertiginoasă.

„Cevă mai mult, D-lor : Acum 6 ani, s'a văzut că «G. M.» își pregătise elementele sale și pentru un *spațiu mai larg* ca acela al României mici. Colaboratorii ei și-au făcut datoria pentru Patrie, *preferind să lărgiască cadrul epurei inițiale*, ca să nu aibă nevoie de *rotație* sau *schimbare de plan*.

„*Cadrul epurei* e astăzi suficient ca să câștigăm *reprezentări* în «G. M.» de colaboratori cari strălucesc în Banat, Ardeal, Bucovina și Basarabia».

După aceste cuvinte, D-l profesor NICHIFOR, adresându-se concurenților, le spune : «Cu multă duiosie îmi amintesc când și eu eram ca d-v. ; acum mă apropiu de bazele stâlpilor. Închin în sănătatea D-lor».

D-l E. RUSSU citește niște versuri, pe care le-a făcut la lucrarea de Algebră dela concursul «Gazetei», deoarece problema dată avea enunțul greșit și deci nu se putea rezolva.

Se arată în ele bucuria și emoția candidaților cu ocazia concursului dela «G. M.».

D-l G. BORNEANU spune că D-l I. D. TEODOR, care este bolnav, dar cu sufletul în mijlocul nostru, i-a dat însărcinarea să ureze multă sănătate membrilor și corespondenților și viață lungă «Gazetei Matematice».

De asemenea, D-l SERGESCU ne comunică, în scris, că se simte fericit că este membru al G. M. și încă din copilărie și-a consacrat activitatea aci. Expune rezultatele frumoase obținute de această revistă, precum și considerația ce i se dă de către matematicianii străini. Urează „stâlpilor” să trăiască să-i serbeze jubileul de 50 ani și viață lungă și prosperitate «Gazetei».

D-l COLONEL FELIX expune, în scris, părerea de rău că nu poate lua parte la această sărbătoare.

D-l INGINER BUNESCU, deasemenea, ne scrie că regretă că este reținut în provincie; totuși participă cu tot sufletul la serbare, urând sănătate comensilor și prosperitate „Gazetei“.

D-l A. G. IOACHIMESCU: „Să fac o confesiune. Multiplele ocupațiuni m'au făcut să fiu puțin în raport cu G. M. Până anul trecut, am participat la concursuri ca examinator. Anul acesta am rugat pe colegi să mă scoată la pensie. Mi s'a primit cererea, dar așa de puternică eră legătura cu „Gazeta“, încât încă am avut dragostea să examinez la oral. Chestiunile propuse la diferitele lucrări au fost foarte frumoase, ceea ce dovedește că înlocuitorii sunt cât se poate de destoinici.

„Noi, cei bătrâni, suntem fericiți că avem înlocuitori; vorbesc în numele meu, căci colegul CRISTESCU e veșnic tânăr.

„Mulțumit de aceste constatări îmbucurătoare, că „Gazeta“ are destule elemente destoinice, vă doresc tuturor să trăiți!“.

D-l G. ȚIȚICA: „Vreau să spun același lucru ca și d-l IOACHIMESCU, dar sub o altă formă. Mai întâi, o rectificare: Sunt trei „stâlpi“ ai „G. M.“; eu nu sunt stâlp, îmi lipsesc câțiva centimetri.

„Să mai adaog ceva: În adevăr, G. M. nu se poate sprijini numai pe stâlpii vechi. Stâlpi noi trebuie. Și au și început să vie. Sunteți d-v., candidații, cari veți veni în curând ca membri. Ca dovadă, aveți o mulțime de membri, cari au fost ca și d-v. Noi am și început să ne lăsăm înlocuitori.

„Exprim aceeași mulțumire, ca și d-l IOACHIMESCU, că am fost înlocuit cu succes de d-l O. ȚINO“.

D-l I. IONESCU: „Ca unul care mă ocup cu știința aplicată, am de făcut o observare: Nu e nevoie ca într-o construcție toți stâlpii să fie la fel. Dacă găsești unul cu 2—3 cm. mai scurt, dar are teren solid de fundație, îl utilizezi foarte bine. Dintre cei cari se află aci, D-l ȚIȚICA face parte dintre primii corespondenți ai „Gazetei“. De asemenea d-l CAPRIEL.

„Trecând la altă chestiune foarte importantă și anume obținerea unui loc pentru construirea localului „Gazetei Matematice“, avem bucuria că d-l LALESCU a intervenit și a obținut terenul. Tot prin stăruința d-sale, s'a obținut și ratificarea necesară, printr-o lege votată de Parlament.

„D-l CAPRIEL a promis că, prin stăruința d-sale și a altor persoane, localul propriu al nostru va fi clădit poate chiar în 2 ani.

„Vedeți deci că d-l LALESCU, pe lângă multiplele d-sale ocupații și „curbe“, de tot felul, a stăruit și pentru această chestiune atât de importantă pentru Societatea noastră. Ii dorim sănătate și viață lungă.

D-l TR. LALESCU: „Îmi dați voie să vă fac și eu o mărturisire. În Matematici, se învață că drumul cel mai bun și scurt este linia dreaptă. În cariera științifică am pornit cu acest ideal ca să-mi consacrez întreaga activitate științei.

„În viață însă, anumite împrejurări te fac să nu mai poți să urmezi drumul cel drept. Așa au fost pentru mine împrejurările care au creat România Mare. În calitate de Bănățean, aruncat aci fără rude, am simțit mult nevoia

să stabilesc legătura între România veche și Banat. Acestea sunt motivele puternice care au dat o curbură vieții mele. Pot spune că evenimentele au creat în viața mea o *linie geodezică*, înțelegând prin aceasta traiectoria pe care s'o urmeze oricine, pentruca, ținând seamă de împrejurările în care se află, să aducă maximum de bine.

„Vedeți d-v, că având acest mandat special, am obținut oarecari avantaje, care altfel n'ar fi putut fi dobândite. Am căutat să dau „G. M.” un ajutor cât mai puternic. Legea, prin care să se dea „G. M.” locul pentru clădire, este printre cele mai roditoare.

„Dau acestea ca o mângâiere, pentru ca să mă ușurez de invinuirea ce mi-o fac totdeauna că am plecat de acolo unde găsim cea mai mare seninătate, plăcere și entuziasmul care se simte și acum, ca și în trecut.

„Pun în legătură acestea cu unul dintre membrii „Gazetei”, care s'a consacrat numai Științei, care a urmat tot timpul *linia dreaptă*. Este d-l ȚIȚICA și de aceea reprezintă pentru noi simbolul par al Matematicianului. D-sa a reușit să publice chiar anul acesta o operă științifică importantă, care-i va consacra numele în domeniul Geometriei.

„Prin urmare, să-mi dați voie să vă aduc cel mai puternic exemplu de un matematician care și-a închinat viața numai științei și să închinăm în sănătatea d-sale.

D-l CĂPITAN LINTEȘ arată că Revista Matematică din Buenos-Aires, care are legături cu noi prin d. BAIDAFF—vechi corespondent al „Gazetei”—aduce laude și urează viață lungă „Gazetei” noastre.

D-l O. ȚINO vorbește în numele foștilor corespondenți ai „Gazetei Matematice. În cuvinte bine știute, aduce aminte de dragostea cu care lucrau elevii de pe vremea aceea.

Regretă că d-l VÂLCOVICI nu se găsește în mijlocul nostru.

Cu multă duioșie, arată cum dânsii, în calitate de corespondenți, priviau pe cei 4 stâlpi ca pe niște focare de lumină. Exprimă părerea de rău că n'a dat „Gazetei” tot ce ar fi voit. Apoi adaogă: „Ca examinator, am fost mulțumit de corespondenți și nădăjduiesc că în viitor vom avea alții și mai bine pregătiți.

„Cu tot sufletul, urez G. M. viață îndelungată, iar produsul ei să fie apreciat și în afară de granițele Țării. Inchin paharul în sănătatea „stâlpilor”.

D-l I. IONESCU închină pentru D-l ȚINO, care este primul corespondent premiat de Gazeta Matematică.

D-l A. G. IOACHIMESCU explică în ce mod s'a dat premiul D-lui ȚINO și exprimă pe deoparte bucuria că la concursuri au început să se prezinte și candidați din provinciile alipite, pe de altă parte dorința vie ca să avem candidați din toate colțurile Țării.

D-l LALESCU arată rolul cel mare pe care l-a avut, dela înființarea ei, Gazeta Matematică pentru viitorii ingineri. Aci au deprins metoda, și li s'au dat primele orientări de cultură generală.

„Așa dar, o bună parte dintre corespondenți, s'au consacrat ingineriei, alții au fost atrași de chestiunile financiare.

„D-l IOACHIMESCU a contribuit mult pentru înfăptuirea importantei instituții „Cartea Românească“.

„In această ordine de idei, putem înfățișa pe D-l I. IONESCU ca izvor pur de idealism (Mult aplaudat), de aceea l-am numit „pivotalul Gazetei Matematice“.

D-l A. G. IOACHIMESCU arată că d-l LALESCU a lărgit cadrul, intrând din Domeniul Matematicilor în cel economic, insistând asupra importanței lui. Trebuie să ne gândim însă că armata este aceea care ne dă liniștea pentru reflexiuni de tot felul. Inchină pentru armată.

D-l Maior LITEANU amintește că armata națiunii nu este reprezentată numai prin armată, care se vede pe străzi în diferite ocazii, ci în ea au un important loc inginerii și profesorii, cari aleargă în grabă când este nevoie de apărarea patriei. Militarii au o mare nevoie de ajutorul inginerilor, de pregătirea lor. Mai cu seamă în războiul modern, tehnica ocupă locul întâi și de aceea oamenii pricepuți în această direcțiune sunt de mare folos.

Exprimă deosebită plăcere că aparține unei societății matematice, care a reușit atât de bine să lege elementele trebuitoare pentru ridicarea nivelului științific. Urează viață lungă G. M.

Ultima cuvântare dela acest banchet este a D-lui PROFESOR ȚIȚEA. D-sa vrea să facă o precizare. Iată ce ne spune: „D-l LALESCU v'a vorbit despre o mare părere de rău, că a părăsit activitatea matematică. Totuși să știți că lucrurile nu stau așa. Dânsul are o activitate matematică foarte bogată: Chiar dacă ar vrea să se lase, tot nu poate: se ține de fel de fel de „curbe“. D-sa a vorbit despre o carte a mea, apărută de curând. Cartea D-lui LALESCU a apărut însă mult înainte și a rămas o carte clasică pentru inițierea în acest domeniu important al Analizei Matematice.

„Chiar la Universitate, dânsul a ținut cursuri din cele mai noi chestiuni de Matematică și Fizică Matematică.

„Matematicile constituiesc o forță atât de mare, încât este cu neputință să nu se țină de ele. Inchin în sănătatea d-sale“.

După aceste cuvântări, din care isvorăște limpede dragostea și încrederea reciprocă a membrilor Societății G. M. și din care s'au desprins atâtea învățăminte importante pentru tinerii elevi concurenți, să privim altă față a serbării noastre: latura artistică.

Anul acesta, nivelul artistic a fost mult mai ridicat decât anul trecut. Aceasta se datorește, desigur, concursului dat de D-nii Profesori G. NICHIFOR și M. GHERMĂNESCU, precum și de D-l Maior LITEANU. D-l NICHIFOR a condus destul de bine câteva coruri ale candidaților, apoi au fost executate cu mult talent următoarele producții de *muzică vocală*.

A) D-l M. GHERMĂNESCU :

1. Codrule, de Eliad.
2. Prologul din Pagliacci.
3. Infelce (Ernani).
4. Balada lumii (Mefistofele).

B) D-l Maior LITEANU :

1. Siciliana, din Cavaleria Rusticană.
2. Pe umăr pletele-i curg râu.

C) D-nii GHERMĂNESCU și Maior LITEANU :

Patria rândunelelor (Duet).

D) D-l NICHIFOR : Pe lângă plopii fără soț.

Deasemenea, s'au executat mulțumitor următoarele bucăți de *muzică instrumentală* (vioară) :

A) D-l BARBĂLATT :

- | | |
|-------------|--------------------------|
| 1. Kuiaviak | } mazurci de Wieniawski. |
| 2. Obertass | |

B) D-l G. I. DUMITRESCU :

1. Berceuse slave (Neruda).
2. Mes adieux à Varsovie (Hauser).

Și pentruca afirmarea făcută, că nivelul artistic a fost mai ridicat decât altădată, să fie perfect îndreptățită, mai putem adăoga că în „programul improvizat” au figurat și recitări, destul de bine reușite. Aci trebuie să amintim pe elevul Șr. LĂZĂRESCU, care a știut să apară destul de bine în aceste recitări.

În mijlocul acestei voioșii generale, se incinge o horă vioale, care ne umple sufletul numai de românism. Ca și altădată, convorbirile între membri și corespondenți au ținut până târziu de tot (ora 3 noaptea) și ne-am despărțit având toți aceeași dorință arzătoare ca să contribuim cât mai mult la ridicarea „Gazetei” și să avem încă multă vreme fericirea de a lua parte la aceste sărbători ale ei.

G. I. D.

† NICULAE NICOLESCU

Societatea «Gazeta Matematică» are durerea de a anunța pierderea unuia din membrii fondatori ai revistei «Gazeta Matematică», în persoana lui N. NICOLESCU.

El a decedat în ziua de 5 maiu 1924 și a fost condus la locașul de veci de familie, cunoscuți și prieteni, în ziua de 7 Mai 1924, când a fost înmormântat la cimitirul Reînvierea (Pătrunjel).

S'a născut la anul 1873 și a murit în vârstă de 51 ani, fiind răpus de o boală, care l'a consumat cu încetul, de mai multă vreme.

La anul 1895, a absolvit cu diplomă fosta noastră școală de Poduri și Sosele și, de atunci, a servit țara ca inginer, aproape neîntrerupt timp de 29 ani, cu un devotament admirat de toți cei cari l-au cunoscut, pânăce moartea nemiloasă l-a răpus.

Ca unul care și-a format singur cariera și a cunoscut greutățile cu care a trebuit să lupte pentru desăvârșirea educației sale matematice, a îmbrățișat cu căldură și entuziasm inițiativa luată de câțiva colegi ingineri, cu cari la 15 Septembrie 1895 — chiar în anul când a eșit inginer—a scos primul număr al revistei «Gazeta Matematică».

În primele numere ale acestei reviste, a publicat articole de matematică și nu a încetat nicio clipă, până în ultimile sale momente, de a-i da sprijin moral și material, în orice ocazie.

Dragostea sa deosebită pentru «Gazeta Matematică» a fost manifestată cu deosebire în anul 1920, când el, cel dintâi, a făcut frumosul gest de a donă suma de 500 lei, spre a se formă un fond pentru construirea unui local propriu al Societății «Gazeta Matematică». Aceasta eră o dorință a noastră a tuturor; el este însă primul care în mod concret a adus cele dintâi cărămizi ce vor servi pentru zidirea clădirii, pe frontispiciul căreia va stă scris numele: «Societatea Gazeta Matematică».

Eră bun prieten și camarad, și nu cred să fi putut supăra pe cinevă în viață. A avut un suflet ales, bun, și iertător, și care nu eră în stare să facă rău nici chiar dușmanilor săi.

«Societatea Gazeta Matematică» pierde în el pe un distins camarad și devotat susținător, a cărui lipsă nu va fi ușor de completat. Dumnezeu să-l odihniască în locașul dreptilor!

N. I. GEORGESCU

Inginer Inspector General.

REZULTATUL CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“.

Când am reînceput, acum trei ani, concursurile noastre, am fost cuprinși de mare îngrijorare în privința dragostei elevilor de liceu pentru matematică. Ni se părea că printre urmările războiului, vom fi siliți să înregistrăm și o scădere a nivelului la concursuri. Concursul de anul acesta dovedește că ne-am înșelat. Cei cari au avut fericirea să asiste la probele orale au putut vedea numărul mare de candidați bine pregătiți, iar probele scrise au învederat la cei mai mulți un spirit de pătrundere și de generalizare care merită să fie notat.

O singură observare generală am de făcut. Licee, care altădată aveau reputație prin succese strălucite la concursul nostru, acum de-abia mai sunt reprezentate prin câte un candidat. În schimb, licee noi, din toată Țara, încep a-și trimite cei mai buni elevi.

În ceea ce privește organizarea materială a concursului, chestie așa de grea în aceste vremuri, avem de mulțumit D-lui Inginer Inspector general D. CARACOSTEA, secretar general al Ministerului de Comunicații, D-lui profesor D. BUNGETZIANU, D-lui G. THIERRIN și în special D-lor G. BORNEANU, Director al Fabricii de Chibrituri și inginer G. ILIESCU, pentru ajutorul, munca și stăruința depuse ca concursul să se poată ține regulat.

Membrii Comisiunii au pregătit subiectele probelor scrise, iar la oral au luat parte și alți membri ai Societății noastre, punând întrebări candidaților. Au asistat de altfel și persoane streine, interesându-se de mersul acestui concurs, care nu e ușor.

Candidații cari, din motive de sănătate, sau din altă pricină, n'au putut veni la concurs, au înștiințat din vreme, precum se cuvine.

Trec acum la partea cea mai grea și mai delicată a însărcinării mele, la categorisirea prin cuvinte a candidaților clasificați în comisiune, pe baza lucrărilor scrise și a răspunsurilor orale.

1. Se știa dinainte cine va ieși întâiu la concursul de anul acesta, nu numai după rezultatul concursului de anul trecut, dar mai ales după activitatea largă la revistele de matematici din Țară — dintre care una a sa proprie, — ca și la revistele din streinătate. În lumea matematică a liceelor noastre, care există, s'a format o opinie publică, unde se cântăresc valorile după greutatea problemelor

rezolvate, a problemelor propuse și a articolelor interesante publicate. Această opinie publică școlară a consacrat pe D-l TIBERIU POPOVICIU, elev în clasa VIII la liceul «*Moise Nicoară*» din Arad, ca fruntaș între frunțași, și așa s'a înfățișat la toate probele concursului nostru. Cunoștinți întinse — dincolo de programa de liceu, precise, spirit pătrunzător, văzând problema dată în adâncul ei, generalinzând-o și studiind-o în toate amănuntele, acestea sunt însușirile, care au pus imediat în evidență pe D-l POPOVICIU și l-au așezat în fruntea candidaților noștri.

2. În rândul al doilea vine un candidat cunoscut și dela concursurile anterioare și din activitatea sa la *Gazetă*, D-l B. M. BARBĂLATT, elev în clasa VII la liceul «*Codreanu*» din Bârlad, care atât la probele scrise de Algebră și de Geometrie Descriptivă, cât și la cele orale a ieșit foarte bine. Și acest candidat și-a însușit multe cunoștinți, în afară de programa liceului.

3. D-l ȘT. F. LĂZĂRESCU, elev în clasa VIII la liceul «*Ion Maiorescu*» din Giurgiu, a făcut o lucrare scrisă de Algebră foarte bună și a dat la aceeași materie răspunsuri sigure, unele bune, altele foarte bune; la Geometrie Analitică a făcut o bună lucrare scrisă și a răspuns în general foarte bine.

4. În rândul al 4-lea, vine D-l C. D. MIHĂESCU, elev în clasa VIII la liceul «*Ion Maiorescu*» din Giurgiu, candidat cu foarte bune lucrări scrise, cu răspunsuri foarte bune la Geometria Analitică, în general bune la Algebră.

5. D-l TRAIAN UDRISKY, elev în clasa VI la liceul «*Moise Nicoară*» din Arad, a făcut o foarte bună lucrare practică de Trigonometrie, cu calcule îngrijite și așezate frumos, la fel i-au fost răspunsurile orale la această materie, iar la Geometrie a fost bun. E un candidat care promite.

6. D-l TRAIAN ANGELESCU, elev în clasa VI la liceul «*Ion Maiorescu*» din Giurgiu, a fost foarte bine la înscris și bine la oral la Trigonometrie, destul de bine la înscris și bine la oral la Algebră.

7. D-l GH. P. HARNAGEA, elev în clasa VIII la liceul «*Internat*» din Iași, e mai sigur și precis în răspunsurile sale orale decât la probele scrise, care sunt bune.

8. D-l EMIL ȘTEFĂNESCU, elev în clasa VIII la liceul «*Spiru Haret*» din București, e iarăși un vechiu și bun corespondent al *Gazetei* și candidat la toate concursurile de după război, a făcut

lucrări scrise și probe orale în general bune, mai bune la Algebră decât la Geometria Analitică.

9. D-I EDGAR G. RUSSU, elev în clasa VIII la liceul «*Internat*» din Iași, a făcut lucrări bunicele la înscris și a fost cu mult mai bine la răspunsurile orale.

10. D-I W. SOLOMON, elev în clasa VIII, București, a ieșit bine la Algebră, mai puțin sigur la Geometria Analitică.

11. D-I C. H. SCHÖNFELD, elev în clasa VII la liceul «*Laurian*» din Botoșani, a făcut o bună lucrare de Geometrie Descriptivă și a fost destul de bun la Algebră.

12. D-I A. TAUBER, elev în clasa VIII la liceul «*Laurian*» din Botoșani, a făcut lucrări scrise bune, dar a dat răspunsuri cam slabe la oral.

Cu tot numărul mare de candidați, aleși să figureze la locul de cinste, mai avem să menționăm pe următorii candidați: L. WEISS pentru probele de Algebră, A. PANAITESCU pentru cele de Geometrie Analitică, I. VASILIU pentru probele de Trigonometrie și oralul de Geometrie și GH. DAVID, elev în clasa VII la liceul din Timișoara, pentru proba orală de Geometrie Descriptivă.

Prin calitatea candidaților, prin faptul că numărul celor din Ardeal a crescut, concursul din anul acesta a fost cu adevărat strălucit.

G. ȚIȚICA.

Delegat pentru rapoarte.

O PROPRIETATE FUNCȚIONALĂ COMUNA CERCULUI ȘI SPIRALEI LOGARITMICE.

Să considerăm, sub o formă mai precisă, problema ce și-a pus D-I ABRAMESCU în numărul 9 al acestei Gazete, și pe care D-sa a rezolvat-o numai în parte.

Să se determine curba plană C, reprezentată în coordonate polare prin ecuația:

$$\rho = f(\theta),$$

așa în cât, $M_0, M_1, M_2, \dots$ fiind punctele de pe curbă corespunzătoare valorilor $a, a + \omega, a + 2\omega, \dots$ date lui θ , triumphiurile

rectilinii $M_0M_1M_2, M_1M_2M_3, \dots$, să fie asemenea ¹⁾, oricare ar fi a și ω .

Asupra funcțiunei f facem ipoteza că admite derivate de primele trei ordine.

Insemnând cu

$$(1) \quad \rho_k = f(a + k\omega)$$

$$z_k = \rho_k e^{i(a+k\omega)}, \quad i = \sqrt{-1},$$

egalitatea

$$\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_0} = \frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1},$$

care exprimă că triunghiurile $M_0M_1M_2, M_1M_2M_3$ sunt asemenea, devine, cu notațiunile introduse,

$$(2) \quad e^{2i\omega}(\rho_2^2 - \rho_1\rho_3) + e^{i\omega}(\rho_0\rho_3 - \rho_1\rho_2) + \rho_1^2 - \rho_0\rho_2 = 0.$$

Dacă în această relație, care trebuie să fie satisfăcută oricare ar fi a și ω , schimbăm pe a în $a + \omega, a + 2\omega, \dots$, vedem că ea exprimă că toate triunghiurile $M_0M_1M_2, M_1M_2M_3, M_2M_3M_4, \dots$ sunt asemenea.

Din relația (2), deducem, egalând cu zero partea reală și partea imaginară a primului membru,

$$\cos 2\omega(\rho_2^2 - \rho_1\rho_3) + \cos \omega(\rho_0\rho_3 - \rho_1\rho_2) + \rho_1^2 - \rho_0\rho_2 = 0,$$

$$\sin 2\omega(\rho_2^2 - \rho_1\rho_3) + \sin \omega(\rho_0\rho_3 - \rho_1\rho_2) = 0,$$

de unde

$$(3) \quad \rho_2^2 - \rho_1\rho_3 = \rho_1^2 - \rho_0\rho_2,$$

$$\rho_0\rho_3 - \rho_1\rho_2 = 2 \cos \theta (\rho_0\rho_2 - \rho_1^2),$$

ceea ce se mai poate scrie, ținând seama de (1),

$$(4) \quad f^2(a+2\omega) - f(a+\omega)f(a+3\omega) = f^2(a+\omega) - f(a)f(a+2\omega),$$

$$(5) \quad f(a)f(a+3\omega) - f(a+\omega)f(a+2\omega) = 2\cos\omega[f(a)f(a+2\omega) - f^2(a+\omega)].$$

Suntem deci conduși, pentru determinarea funcției f , să căutăm soluțiunile comune ale acestor două ecuațiuni funcționale. Pentru

1) Când spunem că triunghiurile ABC, DEF sunt asemenea, să se înțeleagă ordinea de egalitate a unghiurilor astfel: $\sphericalangle A = \sphericalangle D, \sphericalangle B = \sphericalangle E$ și $\sphericalangle C = \sphericalangle F$.

aceea, vom rezolvă ecuația funcțională (4), ca fiind mai simplă, vom cercetă apoi care din soluțiile găsite satisfac ecuației (5).

În ecuația (4), să schimbăm pe a în $(a-\omega)$, vom avea

$$f^2(a+\omega) - f(a)f(a+2\omega) = f^2(a) - f(a-\omega)f(a+\omega).$$

Luând derivata de ordinul al treilea în raport cu ω a ambilor membri ai acestei egalități, și făcând apoi pe $\omega=0$, vedem că va trebui să avem

$$\frac{f'(a)}{f(a)} = \frac{f'''(a)}{f''(a)},$$

sau, integrând,

$$(6) \quad f''(a) = kf(a),$$

k fiind o constantă de integrare. Toate soluțiile ecuației funcționale (4) se găsesc deci printre funcțiunile care satisfac ecuației diferențiale (6). Pentru a determină aceste soluțiuni, să presupunem :

1^o) $k > 0$. Să facem $k=c^2$; ecuația diferențială (6) ne dă

$$(7) \quad f(\theta) = \alpha e^{c\theta} + \beta e^{-c\theta},$$

α și β fiind constante arbitrare. Se verifică imediat că funcția (7) satisface ecuației funcționale (4).

2^o). $k < 0$. Vom lua $k = -c^2$; în acest caz, ecuația diferențială (6) ne dă

$$(8) \quad f(\theta) = \alpha \cosh c\theta + \beta \sinh c\theta.$$

Se verifică că și funcțiunile (8) satisfac ecuației funcționale (4).

3^o). $k = 0$. În acest caz, vom avea

$$(9) \quad f(\theta) = \alpha \theta + \beta.$$

Această funcțiune verifică și ea ecuația (4).

Vedem astfel că soluțiunile ecuației funcționale (4) sunt toate funcțiunile ce satisfac ecuației diferențiale (6).

Ne rămâne acum să cercetăm care din funcțiunile (7), (8) și (9) sunt și soluțiuni ale ecuației funcționale (5).

Pentru ca funcțiunea (7) să satisfacă ecuației (5), se vede imediat că este necesar și suficient ca una din constantele α și β să fie nulă; adică funcțiunea f să fie de forma

$$f(\theta) = \alpha e^{c\theta},$$

c fiind o constantă pozitivă sau negativă.

Inlocuind acum, în ecuația (5), pe f prin expresia (8), făcând apoi reducerile în fiecare membru, vom căpăta

$$\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) (\cos 3c\omega - \cos c\omega) = (\alpha^2 + \beta^2) \cos \omega (\cos 2c\omega - 1),$$

va trebui deci să avem

$$\cos c\omega = \cos \omega,$$

prin urmare $c=1$. Vedem astfel că, printre funcțiunile de forma (8), numai

$$f(\theta) = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta$$

satisfacă ecuației (5).

În fine, funcțiunea (9) nu verifică ecuația (5), decât dacă $\alpha=0$, adică când f este o constantă.

În rezumat, soluțiunile comune ale ecuațiilor (4) și (5) sunt

$$(10) \quad f(\theta) = \alpha e^{c\theta} \quad \text{și} \quad f(\theta) = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta,$$

unde α , β și c sunt constante arbitrare (pentru $c=0$ avem soluția $f = c^{ta}$).

Prin urmare, curbele c , care satisfac condițiilor funcționale din enunțul problemei, sunt curbele

$$\rho = \alpha e^{c\theta},$$

adică spirale logaritmice din plan, asimtote polului, și curbele

$$\rho = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta,$$

adică cercurile din plan care trec prin pol. În acest din urmă caz, triunghiurile $M_0M_1M_2$, $M_1M_2M_3$,... sunt egale.

Observări. 1. Ecuația funcțională (5), în afară de soluțiile (10), nu admite nicio altă soluție. În adevăr, dacă luăm derivata de ordinul al treilea a ambilor membri ai aceste ecuațiuni, în raport cu ω și facem apoi pe $\omega=0$, găsim

$$18 [f(a) f''(a) - f'(a) f''(a)] = 12 [f(a) f'''(a) - f'(a) f''(a)].$$

Prin urmare, $f(a)$ este soluție a ecuației (6) și deci de una din formele (7), (8) sau (9).

2. Putem găsi cu ușurință o proprietate a curbelor Γ , $\rho = f(\theta)$, unde $f(\theta)$ este o soluție a ecuației funcționale (4), adică de forma (7), (8) sau (9).

În adevăr, ecuația funcțională (4) este echivalentă cu relația (3), care se mai poate scrie

$$(11) \quad \frac{\rho_1}{\rho_0 + \rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_3}.$$

M_k fiind punctul curbei Γ de coordonate $(\rho_k, a + k\omega)$, să considerăm și punctele din plan $M'_2, M'_3, \dots$ de coordonate $(\rho_2 + \rho_0, a + 2\omega), (\rho_3 + \rho_0, a + 3\omega), \dots$

Dacă însemnăm cu O polul, reese imediat din relația (11) că triunghiurile $OM_1M'_2, OM_2M'_3, \dots$ sunt asemenea.

A. ANGELESCU.

O PROBLEMA DE ARITMETICA.

În cele ce urmează, îmi propun să dau soluțiile problemei enunțată de D-l Locot.-Col. GH. BUCILIU, în *Gazeta Matematică* vol. XXVIII pag. 441. Acea problemă este:

Fiind date numerele întregi $a, b, c, a', b', c', n, p$, se cere să se găsiască 3 numere întregi A, M, N , între care există relațiunile:

$$aM \pm bN = cA^n, \quad a'M \pm b'N = c'A^p.$$

Voiu rezolvă problema în cazurile particulare:

$$p = n \mp 1 \quad \text{și} \quad p = n.$$

Calea de urmat pentru găsirea soluțiilor, în cazurile ce mi le-am propus, va fi asemănătoare cu aceea a D-lui Locot.-Col. GH. BUCILIU, numai că nu voiu întrebuiță dezvoltarea în fracție continuă, pentru rezolvarea ecuației tip:

$$(1) \quad ax - by = c,$$

ci voiu întrebuiță formula ¹⁾:

1) Iată demonstrația acestela: simplificând ecuația cu d , obținem:

$$a_1x - b_1y = c_1, \quad \therefore (1) \quad a_1x \equiv c_1 \pmod{b_1},$$

dar conform teoremei lui FERMAT, generalizată de EULER, avem

$$(2) \quad a_1^{\varphi(b_1)} \equiv 1 \pmod{b_1}$$

și înmulțind pe (1) cu $a_1^{\varphi(b_1)-1}$, obținem:

$$(II) \quad x = c_1 \times a_1^{\varphi(b_1)-1} + b_1 \times t,$$

unde $\varphi(b_1)$ e indicatorul lui b_1 , t un număr întreg oarecare, iar a_1 , b_1 sunt definiți de relațiile $a = a_1 \times d$, $b = b_1 \times d$, în care d este c. m. m. c. d. al numerelor a și b , și, în sfârșit, trebuie să avem $c = c_1 \times d$, unde c_1 e un număr întreg.

Să găsim mai întâi soluțiile problemei când $p = n \mp 1$; e suficient a găsi soluțiile când $p = n - 1$, căci apoi schimbând pe a în a' , pe b în b' , pe c în c' , și viceversa, vom căpăta soluțiile, când $p = n + 1$.

Înlocuind în enunț pe p prin $n - 1$, găsim:

$$(1) \quad aM \pm bN = cA^n \quad \text{și} \quad a'M \pm b'N = c'A^{n-1}$$

$$(2) \quad aM \pm bN = cA^n \quad \text{și} \quad a'M \mp b'N = c'A^{n-1},$$

unde semnele se corespund.

Fie m , c. m. m. c. m. al numerelor b și b' , astfel că avem:

$$m = m_1 \times b = m_2 \times b',$$

înlocuind în (1) și (2), obținem:

$$(1)' \quad m_1 aM \pm mN = m_1 cA^n \quad \text{și} \quad m_2 a'M \pm mN = m_2 c'A^{n-1},$$

$$(2)' \quad m_1 aM \pm mN = m_1 cA^n \quad \text{și} \quad m_2 a'M \mp mN = m_2 c'A^{n-1}.$$

Scăzând egalitățile (1)', avem:

$$(3) \quad M = \frac{A^{n-1} [m_1 cA - m_2 c']}{m_1 a - m_2 a'} \quad \text{și} \quad N = \pm \frac{c'A^{n-1} - a'M}{b'}$$

Adunând egalitățile (2)', ele dau:

$$(4) \quad M = \frac{A^{n-1} [m_1 cA + m_2 c']}{m_1 a + m_2 a'} \quad \text{și} \quad N = \pm \frac{c'A^{n-1} - a'M}{b'}.$$

Substituind pe M din N , prin valoarea sa, găsim:

$$(3)' \quad N = \pm \frac{m_1 A^{n-1} [a'cA - ac']}{(m_1 a - m_2 a') b'} \quad \text{și} \quad (4)' \quad N = \pm \frac{m_1 A^{n-1} [a'cA - ac']}{(m_1 a + m_2 a') b'}.$$

$$x \equiv c_1 a_1^{\varphi(b_1)-1} + (b_1),$$

de unde

$$x = c_1 \times a_1^{\varphi(b_1)-1} + b_1 \times t.$$

(A se vede: „Vorlesungen über Zahlentheorie“ von Dr. J. SOMMER, pag. 9—11).

Să rezolvăm pe (3)' în numere întregi. Fie d_1 , c. m. m. c. d. al numerelor $a'c$ și ac' , astfel că $a'c = d_1 \cdot a'_1$ și $ac' = d_1 \cdot a_1$, iar (3)' devine :

$$(5) \quad N = \pm \frac{m_1 \cdot d_1 \cdot A^{n-1} [a'_1 A - a_1]}{(m_1 a - m_2 a') b'} ;$$

fie d_2 , c. m. m. c. d. al numerelor A și a_1 ; înlocuind în (5), găsim :

$$(6) \quad N = \pm \frac{m_1 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot A^{n-1} [a'_1 A_1 - a_2]}{(m_1 a - m_2 a') b'} ;$$

dacă există divizori comuni între A^{n-1} și $a'_1 A_1 - a_2$, trebuie să se găsească în d_2^{n-1} , căci A_1^{n-1} și $a'_1 A_1 - a_2$ sunt primi între ei; să înlocuim deci și pe A^{n-1} cu $d_2^{n-1} \cdot A_1^{n-1}$, (6) va deveni, suprimând factorii comuni numerelor $m_1 \cdot d_1 \cdot d_2^n$ și $(m_1 a - m_2 a') b'$:

$$(7) \quad N = \pm \frac{m_3 A_1^{n-1} [a'_1 A_1 - a_2]}{b'_1} ,$$

m_3 și b'_1 fiind primi între ei. Rezolvarea ecuației (7) se reduce la rezolvarea în numere întregi a următoarei ecuații :

$$(8) \quad N_1 = \pm \frac{A_1^{n-1} [a'_1 A_1 - a_2]}{b'_1} .$$

Pentru a obține pe N , vom înmulți pe N_1 cu m_3 , iar pe A îl obținem înmulțind pe A_1 cu d_2 .

Să presupunem pe b'_1 descompus în 2 factori primi între ei, fie acei factori α și β , unde $\alpha > \beta$. (Se înțelege că pentru găsirea tuturor soluțiilor, vom descompune pe b'_1 — în toate modurile — în 2 factori primi între ei). N_1 fiind întreg, iar A_1^{n-1} și $a'_1 A_1 - a_2$ fiind primi între ei, trebuie să avem unul din sistemele :

$$(9) \quad \begin{cases} A_1^{n-1} = \alpha x \\ a'_1 A_1 - a_2 = \beta y \end{cases} , \quad (10) \quad \begin{cases} A_1^{n-1} = \beta x \\ a'_1 A_1 - a_2 = \alpha y \end{cases} ,$$

$$(11) \quad \begin{cases} A_1^{n-1} = \alpha \beta x \\ a'_1 A_1 - a_2 = a'_1 \sqrt[n-1]{\alpha \beta x - a_2} \end{cases} , \quad (12) \quad \begin{cases} A_1^{n-1} = \frac{(\alpha \beta x + a_2)^{n-1}}{a'^{n-1}} \\ a'_1 A_1 - a_2 = \alpha \beta x \end{cases} .$$

Să rezolvăm sistemul (9). Fie α descompus în factori primi,

avem: $\alpha = \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \alpha_3^{p_3} \dots \alpha_r^{p_r}$; αx trebuind să fie puterea a $(n-1)a$ a unui număr întreg, vom avea:

$$\alpha x = \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \alpha_3^{p_3} \dots \alpha_r^{p_r} \alpha_1^{p'_1} \alpha_2^{p'_2} \alpha_3^{p'_3} \dots \alpha_r^{p'_r} z^{n-1},$$

unde

$$p_1 + p'_1 = p_2 + p'_2 = p_3 + p'_3 = \dots = p_r + p'_r = n-1,$$

iar z un număr întreg; notând cu α' produsul: $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_r$, deducem

$$(13) \quad A_1 = \alpha' z.$$

Ecuatia 2-a dela (9) devine:

$$(14) \quad a'_1 A_1 - \beta y = a_2,$$

$a'_1 A_1$ și a_2 fiind primi între ei, urmează că și β trebuie să fie prim cu a_1 și cu a_2 . Ecuatia (14), rezolvată după formula (II), dă:

$$A_1 = a_2 a'_1 \varphi(\beta)^{-1} + \beta t,$$

și egalând această valoare cu aceea din (13), avem:

$$(15) \quad \alpha' z = a_2 a'_1 \varphi(\beta)^{-1} + \beta t, \quad \therefore \alpha' z - \beta t = a_2 a'_1 \varphi(\beta)^{-1}.$$

α' și cu β sunt primi între ei, deci

$$z = a_2 a'_1 \varphi(\beta)^{-1} \alpha'^{\varphi(\beta)-1} + \beta u,$$

$$\therefore (16) \quad A_1 = \alpha' z = a_2 a'_1 \varphi(\beta)^{-1} \alpha'^{\varphi(\beta)} + \alpha' \beta u,$$

unde u este un număr prim cu a_2 , căci și A_1 trebuie să fie prim cu a_2 , și deci și cu α' , cu alte cuvinte și α trebuie ales astfel ca să fie prim cu a_2 .

Prin urmare, primul șir de soluții este:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = d_2 a_2 a'_1 \varphi(\beta)^{-1} \alpha'^{\varphi(\beta)} + d_2 \alpha' \beta u. \\ M = \frac{[d_2 a_2 a'_1 \varphi(\beta)^{-1} \alpha'^{\varphi(\beta)} + d_2 \alpha' \beta u]^{n-1} [m_1 c d_2 a_2 a'_1 \varphi(\beta)^{-1} \alpha'^{\varphi(\beta)} + m_1 c d_2 \alpha' \beta u - m_3]}{m_1 a - m_2 a'} \\ N = \pm \frac{m_1 [d_2 a_2 a'_1 \varphi(\beta)^{-1} \alpha'^{\varphi(\beta)} + d_2 \alpha' \beta u]^{n-1} [a' c d_2 a_2 a'_1 \varphi(\beta)^{-1} \alpha'^{\varphi(\beta)} + a' c d_2 \alpha' \beta u - a' c]}{(m_1 a - m_2 a') b'}. \end{array} \right.$$

Pentru rezolvarea sistemului (10), vom înlocui în cursul soluției sistemului (9), pe α cu β și viceversa, pe $\alpha_1^{p_1}$ cu $\beta_1^{p_1}$, etc... pe α' cu β' și vom căpăta al doilea șir de soluții :

$$(18) \quad \begin{cases} A = d_2 \cdot a_2 \cdot a_1^{\varphi(\alpha)-1} \cdot \beta^{\varphi(\alpha)} + d_2 \cdot \beta' \cdot \alpha \cdot u. \\ M = \frac{[d_2 \cdot a_2 \cdot a_1^{\varphi(\alpha)-1} \cdot \beta^{\varphi(\alpha)} + d_2 \beta' \alpha u]^{n-1} [m_1 \cdot c \cdot d_2 \cdot a_2 \cdot a_1^{\varphi(\alpha)-1} \cdot \beta^{\varphi(\alpha)} + m_1 c d_2 \beta' \alpha u - m_2 c]}{m_1 a - m_2 a'} \\ N = \pm \frac{m_1 [d_2 \cdot a_2 \cdot a_1^{\varphi(\alpha)-1} \cdot \beta^{\varphi(\alpha)} + d_2 \cdot \beta' \cdot \alpha \cdot u]^{n-1} [a' c d_2 \cdot a_2 \cdot a_1^{\varphi(\alpha)-1} \cdot \beta^{\varphi(\alpha)} + a' c d_2 \beta' \cdot \alpha \cdot u - a' c]}{(m_1 a - m_2 a') b'} \end{cases}$$

Să rezolvăm sistemul (11). Am văzut că :

$$\alpha \beta = \alpha_1^{p_1} \cdot \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_r^{p_r} \cdot \beta_1^{p_1'} \cdot \beta_2^{p_2'} \dots \beta_q^{p_q'}$$

și cum $A_1^{n-1} = \alpha \beta x$, deducem ca și la (9), că

$$\alpha \beta x = \alpha_1^{p_1} \cdot \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_r^{p_r} \cdot \alpha_1^{p_1'} \cdot \alpha_2^{p_2'} \dots \alpha_r^{p_r'} \cdot \beta_1^{p_1''} \cdot \beta_2^{p_2''} \dots \beta_q^{p_q''} \cdot \beta_1^{p_1'''} \cdot \beta_2^{p_2'''} \dots \dots \beta_q^{p_q'''} \cdot z^{n-1},$$

unde

$$p_1 + p_1' = p_2 + p_2' \dots = p_r + p_r' = p_1'' + p_1''' = p_2'' + p_2''' = \dots = n-1,$$

iar z un număr întreg. Notând produsul factorilor primi ai lui $\alpha \beta$ cu $\alpha' \beta'$, avem : $A = d_2 \cdot A_1 = d_2 \cdot \alpha' \cdot \beta' \cdot z$. Aceeași soluție o căpătam înlocuind în a doua ecuație din (11). Deci al treilea șir de soluții este :

$$(19) \quad \begin{cases} A = d_2 \cdot \alpha' \cdot \beta' \cdot z \\ M = \frac{(d_2 \cdot \alpha' \cdot \beta' \cdot z)^{n-1} [m_1 \cdot c \cdot d_2 \cdot \alpha' \cdot \beta' \cdot z - m_2 c]}{m_1 a - m_2 a'} \\ N = \pm \frac{m_1 (d_2 \cdot \alpha' \cdot \beta' \cdot z)^{n-1} [a' \cdot c \cdot d_2 \cdot \alpha' \cdot \beta' \cdot z - a' c]}{(m_1 a - m_2 a') b'} \end{cases}$$

Să rezolvăm sistemul (12). Ecuația 2^a se poate scrie :

$$(20) \quad a_1 A_1 - \alpha \beta x = a_2.$$

Fiindcă $a_1 A_1$ și a_2 sunt primi între ei, trebuie ca $\alpha \beta$ să fie prim cu a_1 și cu a_2 ; (20) rezolvată ne dă :

$$A_1 = a_2 \cdot a_1^{\varphi(\alpha \beta)-1} + \alpha \beta t,$$

unde t e un număr prim cu a_2 ; aceeași soluție o căpătăm înlocuind în prima ecuație din (12); deci al patrulea șir de soluții este :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = d_2 \cdot a_2 \cdot a_1^{\varphi(\alpha\beta)-1} + \alpha\beta \cdot d_2 t \\ M = \frac{(d_2 a_2 a_1^{\varphi(\alpha\beta)-1} + \alpha\beta d_2 t)^{n-1} [m_1 c d_2 a_2 a_1^{\varphi(\alpha\beta)-1} + m_1 c \alpha\beta d_2 t - m_2 c]}{m_1 a - m_2 a'} \\ N = \pm \frac{m_1 (d_2 a_2 a_1^{\varphi(\alpha\beta)-1} + \alpha\beta d_2 t)^{n-1} [a' c d_2 a_2 a_1^{\varphi(\alpha\beta)-1} + a' c \alpha\beta d_2 t - a c]}{(m_1 a - m_2 a') b'} \end{array} \right.$$

Pentru a rezolvă pe (4)', vom avea în vedere că (4)' e de forma (3)' și deci vom suprimă factorii comuni numerelor $m_1 \cdot d_1 \cdot d_2^n$ și $(m_1 a + m_2 a') b'$ în loc de a suprimă factorii comuni numerelor $m_1 d_2 \cdot d_2^n$ și $(m_1 a - m_2 a') b'$ ca în (3)'; restul rezolvării ecuației (4)' este identică cu aceea a lui (3)' și, prin urmare, soluțiile vor fi de forma: (17), (18), (19), (21) și nu-i nici o nevoie ca să le mai scriu.

Problema fiind rezolvată pentru cazul $p = n-1$, după cum s'a spus la început, ea este rezolvată și pentru cazul $p = n+1$.

Ne-a mai rămas de studiat problema pentru cazul $p = n$, în care caz problema e foarte simplă, după cum vom vedea: (3) și (4) devin :

$$(III) \quad M = \frac{A^n [m_1 c - m_2 c']}{m_1 a - m_2 a'} \quad \text{și} \quad N = \pm \frac{c' A^n - a' M}{b'}$$

$$(IV) \quad M = \frac{A^n [m_1 c + m_2 c']}{m_1 a - m_2 a'} \quad \text{și} \quad N = \pm \frac{c' A^n - a' M}{b'}$$

înlocuind pe M din N cu valoarea sa, obținem :

$$(III)' \quad N = \pm \frac{m_1 A^n [ac' - a'c]}{(m_1 a - m_2 a') b'} \quad \text{și} \quad (IV)' \quad N = \pm \frac{m_1 A^n [ac' - a'c]}{(m_1 a + m_2 a') b'}$$

simplificând :

$$(III)'' \quad N = \pm \frac{m_3 A^n}{b'_1} \quad \text{și} \quad (IV)'' \quad N = \pm \frac{m'_3 A^n}{b'_2}, \quad \text{unde}$$

m_3 și b'_1 , m'_3 și b'_2 sunt respectiv primi între ei :

$$(V) \quad N_1 = \pm \frac{A^n}{b_1'} \quad \text{și} \quad (VI) \quad N_1 = \pm \frac{A^n}{b_2'},$$

de unde

$$(VII) \quad A^n = b_1' \cdot x \quad \text{și} \quad (VIII) \quad A^n = b_2' \cdot x;$$

fie

$$b_1' = \beta_1^{p_1} \cdot \beta_2^{p_2} \dots \beta_r^{p_r} \quad \text{și} \quad b_2' = \beta_1^{p_1'} \cdot \beta_2^{p_2'} \dots \beta_q^{p_q'}, \text{ ca și la (9)}$$

avem:

$$(IX) \quad b_1' x = \beta_1^{p_1} \cdot \beta_2^{p_2} \dots \beta_r^{p_r} \cdot \beta_1^{p_1''} \cdot \beta_2^{p_2''} \dots \beta_r^{p_r''} \cdot z^n,$$

$$(X) \quad b_2' x = \beta_1^{p_1'} \cdot \beta_2^{p_2'} \dots \beta_q^{p_q'} \cdot \beta_1^{p_1'''} \cdot \beta_2^{p_2'''} \dots \beta_q^{p_q'''} \cdot z_1^n,$$

unde

$$p_1 + p_1'' = p_2 + p_2'' = \dots = p_r + p_r'' = p_1' + p_1''' = p_2' + p_2''' = \dots = p_q' + p_q''' = n,$$

iar z și z_1 două numere întregi oarecare; fie

$$\beta_1 \cdot \beta_2 \dots \beta_r = B_1 \quad \text{și} \quad \beta_1' \cdot \beta_2' \dots \beta_q' = B_1'.$$

Soluțiile sunt:

$$(XI) \quad A = B_1 \cdot z, \quad M = \frac{(B_1 z)^n [m_1 \cdot c - m_2 \cdot c']}{m_1 a - m_2 a'}$$

$$\text{și} \quad N = \pm \frac{m_1 (B_1 z)^n [ac' - a'c]}{(m_1 a - m_2 a') b'},$$

$$(XII) \quad A = B_1' \cdot z, \quad M = \frac{(B_1' z)^n [m_1 \cdot c + m_2 \cdot c']}{m_1 a + m_2 a'}$$

$$\text{și} \quad N = \pm \frac{m_1 (B_1' z)^n [ac' - a'c]}{(m_1 + m_2 a') b'}.$$

Problema a fost astfel complet rezolvată în cazurile $p = n \pm 1$ și $p = n$.

Nu voi da nicio aplicație numerică, căci calculele sunt foarte multe, după cum, dealtfel, se poate vedea din exemplele numerice luate de D-I LOCOT. COL. GH. BUCLIU la pag. 445 și 446 din vol. XXVIII «Gazeta Matematică».

WILHELM I. SOLOMON.

NOTE MATEMATICE.

65. *Alte zece Geometrii diverse.* (A se vedeà Nota 11 pag. 98. Anul XXVIII).

142. De azi.

C. Segre. — La geometria d'oggidi. Vezi *Verhandlungen der dritten Internationalen Kongresses.* Lipsca 1905.

143. Divină.

A se vedeà în *L. Brunswigg, Les étapes de la philosophie mathématique,* pag. 415.

144. Figurilor Asemenea. C. Barlow & G. Bryan. — Geometry of the similar figures.

145. Formelor Hermitiane. L. Coolidge. — The geometry of the hermitian forms. A se vedeà *Bulletin of the American mathematical Society.* Vol. XXVII. pag. 6.

146. Incepătorilor.

Hill. — Geometry for beginners. — Londra.

147. Particulară.

A se vedeà revista dela No. 145 de mai sus Vol. XXI. Pag. 74.

148. Pseudosferei.

C. Alasia. — A se vedeà *Cronaca scietifica* Revista di filosofia neoscolastica. Anno II. No. 3 Iunie 1910.

149. Spațiu. (în)

A. Amiot. — Géométrie dans l'espace. 1866.

150. Sterescopică.

H. Vuibert. — Géométrie stéréoscopique. Les anaglyphes géométriques ¹⁾.

151. Strămoșilor.

Schredir. — Geometrie der Alten ²⁾.

(Va urmă).

I. IONESCU.

66. *Asupra articolului: „O problemă cu indicatori“.*

În determinarea condiției

$$B < A < (n + 1) B,$$

1) Comunicată de D-l O. POPEA.

2) Comunicată de D-l F. NEGRETZU.

se afirmă că $S_i < 1$ (pag. 366 rândul 4), ori această nu este întotdeauna adevărat.

F. I. NEGRETZU.

Știm că :

$$\varphi(A) = A \cdot \prod_1^n \frac{a_i - 1}{a_i} \quad \text{și}$$

$$\varphi(B) = B \cdot \prod_1^e \frac{b_i - 1}{b_i}.$$

Ori, pentru ca să avem $\varphi(A) < \varphi(B)$, ar trebui ca :

$$\frac{A}{B} < \prod_1^n \frac{a_i}{a_i - 1} \cdot \prod_1^p \frac{b_i - 1}{b_i}.$$

Cum a_i reprezintă factorii primi ai lui A, atunci $a_i/(a_i - 1)$, poate lua valorile :

$$2/1, \quad 3/2, \quad 5/4, \quad 7/6, \quad 11/10, \quad 13/12, \quad 17/16, \dots$$

$$\text{deci pentru } n = 1, \quad \prod a_i \leq 2$$

$$» \quad n = 2, \quad \prod a_i \leq 3$$

$$» \quad n = 3, \quad \prod a_i \leq 4$$

și continuând seria verificărilor, putem afirma că :

$$\prod_1^n a_i < n + 1.$$

Apoi cum :

$$1/2 < (b_i - 1)/b_i < 1,$$

putem fi siguri asupra condiției :

$$B < A < (n + 1)B.$$

CĂPITAN I. L.

67. *Asupra teoremei lui FERMAT.* Se pare, în adevăr, că demonstrația cunoscută a acestei teoreme, reprodusă în Nota No. 57 din «Gazeta Matematică» este mai simplă decât cea dată în Nota 24.

Totuși, din punct de vedere elementar, o demonstrație, în care se utilizează cunoștința formulei binomului lui NEWTON, este mult mai simplă și de preferat uneia în care se întrebuințează formula puterii unui polinom, cu atât mai mult, cu cât demonstrația din Nota 24, este și originală și frumoasă.

M. GHERMĂNESCU.

68. *Câteva numere interesante.* Numerele 24 și 25 se bucură de proprietatea

$$2425 - 24 = 49^2 = (2 \times 24 + 1)^2$$

$$\therefore 24 \times 10^2 + 1 = (2 \times 24 + 1)^2.$$

Fie N un număr de n cifre, diferit de 24, care se bucură de aceeași proprietate. Avem :

$$(1) \quad N \times 10^n + 1 = (2N + 1)^2$$

$$\therefore N = \frac{10^n - 4}{4} = \frac{99..9_{n-1}6}{4} = 2499..9_{n-2} \quad \text{și} \quad N = 0.$$

Deci, în afară de 24, se mai bucură de proprietatea enunțată toate numerele ce se obțin scriind după 24 un număr oarecare de 9. Adică numerele

$$24; 249; 2499; 24999; \dots$$

Conform relației (1), se mai observă că numerele

$$2401; 249001; 24990001; \dots$$

sunt patratele numerelor

$$2 \times 24 + 1; 2 \times 249 + 1; 2 \times 2499 + 1; \dots$$

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

BIBLIOGRAFIE.

Revista de matematicas y fisicas elementales. Anul V, No. 11. Martie 1924. Buenos Aires. Sumări variate de termeni în progresiune geometrică, de TH. A. DORDEA. Observațiuni asupra unor probleme de minimum, de P. SERGESCU.

Journal de mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. Anul 48. No. 13 și No. 14. Aprilie 1924. Paris.

Journal de mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. Anul 48. No. 15. Mai 1924. Paris. Demonstrație nouă a unei teoreme de geometrie elementară, de L. POMEY.

Foaia matematică. Anul I No. 5. Mai 1924. Chișinău. Asupra unor limite de L. WEISS.

Revista matematică din Timișoara. Anul IV, No. 3, Mai 1924. Timișoara. Două probleme de analitică, de D. C. SCHILERU.

Jurnal matematic. Vol. I. No. 9. Mai 1924. Arad. Asupra polinoamelor lui LEGENDRE, de T. POPOVICIU. Asupra unei însumări, de T. POPOVICIU.

Jurnal matematic. Anul I. No. 10. Mai 1924. Arad. Asupra unei însumări, de T. POPOVICIU.

Maurice Lecat. (Avec la collaboration de M-me M. LECAT-PRIEROT). *Bibliographie de la Relativité*, suivie d'un appendice sur *Les Determinants à plus de deux dimensions, Le Calcul des Variations, Les Séries trigonométriques et L'Azéotropisme*. Bruxelles 1924. Editor MAURICE LAMERTIN. rue Couderberg 58—62.

Autorul dă, mai întâiu, o bibliografie de 292 pagini, pentru lucrările apărute până la începutul anului acesta, relative la studiul Relativității în ordinea alfabetică a autorilor. Aci găsim citate și unele lucrări făcute de români, ca ale D-lor: ST. CRISTESCU, E. GRIGORAȘ și O. ONICESCU. Prima listă este completată prin alte trei adaose, cu lucrări de care autorul a putut lua cunoștință în timpul tipăririi. Se dă apoi o listă alfabetică de publicațiunile periodice în care s'au publicat lucrări de Relativitate și o clasare geografică a acelor periodice. Urmează apoi o listă de cei care au tradus articole referitoare la Relativitate, alta cu cei care au scris prefațe, introduceri, note, recenzii și apoi o interesantă statistică a lucrărilor. Din aceasta se vede că din 1175 autori citați, sunt 30% Germani, 15% Englezi, 13% Francezi, 11% Americani, 6,5% Italieni, 4% Olandezi, 4% Austriaci, 3% Elvețieni, iar restul alte națiuni. Din toate scrierile, 30% sunt publicate înainte de război, 13% pe timpul războiului și restul în urmă. Până la 1870 erezau numai 22 scrieri privitoare la Relativitate, iar în decadele următoare respectiv 25, 35, 45; dela 1900 numărul lor a început să crească foarte repede, atingând cifra de 155 în 1914 și maximum de 545 în 1922. Anul trecut numărul s'a redus la 365, adică în mediu una pe zi. Autorul arată însă că nu a putut avea la dispozițiune toate arătările necesare pentru a putea da o bibliografie completă. Partea întâia se încheie cu o listă cronologică a lucrărilor, în fruntea căroră stă BRADLEY, cu data de 1722 și după el vine KANT, cu data de 1758.

Primul Apendice dă o bibliografie a determinanților cu mai mult de două dimensiuni, aranjată odată alfabetic și apoi cronologic, și urmată de un adaos cu micile contribuțiuni în acest domeniu.

Al doilea Apendice este o completare a broșurii publicată mai înainte, referitoare la Bibliografia calculului variațiunilor, aranjată după ordinea alfabetică a autorilor.

Al treilea Apendice este o completare a Bibliografiei seriilor trigonometrice, apărută mai înainte, și o listă suplimentară a ei. Aci găsim citate lucrări ale D-lor T. ANGHELUȚĂ și T. LALESCU, precum și problema 2925 a d-lui N. CIORĂNESCU din *Gazeta Matematică*.

Al patrulea Apendice este o completare a Bibliografiei Azeotropizmului apărută într-o carte a autorului: *«La tension de vapeur des mélanges des*

liquides. L'Azéotropisme. Première partie. Données expérimentales. Bibliographie. 1918.

Toate appendicele coprind 47 pagini.

Lucrarea este foarte îngrijită și conștiincios făcută. Probele au fost trimise la 240 autori de lucrări spre revizuire și completare, scopul autorului fiind de a fi util confracților devotați științei pure, scop pe care l'a atins și pentru care cercetătorii în domeniile bibliografiilor arătate ii vor fi de sigur recunoscători, căci le inlesnește cercetările și le cruță timpul, care—după cum arată și autorul—este foarte redus savanților, pentru cercetări științifice, din cauză că i-l absoarbe aproape în totalitate preocupările de ordin material, pentru întreținerea proprie și a familiei lor.

I. IONESCU.

N. Abramescu. *Résumé des principales propriétés des polynomes orthogonaux.* Extras din *Nouvelles Annales de mathématiques*. Seria 5, Vol. II. Anul 1924.

N. Abramescu. *Sur les courbes associées de convergence des séries de polynomes à deux variables complexes.* Extras din *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*. Vol. XLVII. Anul 1923.

Inginer N. Blaha. *Proprietăți din geometria triunghiului, în legătură cu cercul lui TAYLOR, LEMOINE, ADAMS, etc.* Partea I. Botoșani. Tipografia Munca. 1924. Prețul 40 lei.

Căpitan Linteș Ion. *Balistica exterioară.* Curs litografiat. Litografia Școalelor de tragere ale artileriei. Râșnov. 1924. Prețul 50 lei.

C E R E R I.

111. *Răspuns la Cererea 90.* Rog pe corespondenții, cari au luat pentru cercetare manuscrise din *Culegerea de probleme de Aritmetică*, de a mi le înnapoia, intru cât necercetate pot stă mai bine la mine decât la alții.

I. I.

PROBLEME REZOLVATE.

PROBLEMA 2122. *Fiind dat un con de revoluție cu o pânză, să se scrie în coordonate polare ecuațiile secțiunei, ce detașează spre vârful conului o porțiune, ce desfășurată după o anumită generatoare a conului, să fie un romb.*

F. NEDELICU.

Fie conul dat, cu o singură pânză ONMAN, având vârful O în origină, iar Oz ca axă de revoluție. Fie $r_1 = O_1M$ raza cercului director, care în desfășurarea conului, tăiat după generatoarea ON, situată în planul xOz, devine cercul N_1AN_2 , de rază $r = OA$ și amplitudinea 2α . Avem evident: $\text{arc } N_1AN_2 = r \cdot 2\alpha = 2\pi r_1$; deci:

$$(1) \quad r_1 = \frac{r}{\pi} \alpha, \quad k = OO_1 = \sqrt{r^2 - r_1^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{\pi} \alpha\right)^2} = \frac{r}{\pi} \sqrt{\pi^2 - \alpha^2}.$$

Condiția ca dreapta, trecând prin origină,

$$(2) \quad x/\lambda = y/\mu = z,$$

să se sprijine pe cercul

$$(3) \quad x^2 + y^2 - r_1^2 = 0, \quad z = k,$$

se obține eliminând x , y și z între ecuațiile (2) și (3).

Înlocuind $z = k$ în ecuațiile (2), obținem

$$x = k\lambda, \quad y = k\mu,$$

valori, care puse în prima ecuație din (3), dă condiția

$$(4) \quad \lambda^2 + \mu^2 - (r_1/k)^2 = 0.$$

Ecuația conului se obține, eliminând λ și μ între ecuațiile (2) și (4). Din (2), scoatem

$$\lambda = x/z, \quad \mu = y/z,$$

și înlocuind în (4), obținem conul

$$(x^2 + y^2)/z^2 - \alpha^2/(\pi^2 - \alpha^2) = 0, \quad z \geq 0.$$

Scăpând de numitori, avem

$$x^2 + y^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \alpha^2 / \pi^2.$$

Trecând la coordonate polare,

$$x = \rho \cos u \cos v, \quad y = \rho \cos u \sin v, \quad z = \rho \sin u,$$

ecuația conului devine

$$(5) \quad \rho^2 \cos^2 u = \rho^2 \alpha^2 / \pi^2.$$

Deci, pânza dedeasupra a conului, este

$$\cos u = \alpha/\pi, \quad 0 \leq u \leq \pi/2.$$

Fie N_1QN_2 , desfășurata secțiunii ce detașează în con o porțiune, care se desfășoară după rombul ON_1QN_2 .

Raportând curba desfășurată N_1QN_2 la două axe rectangulare (OA, OB) , coordonatele punctelor Q și N sunt

$$Q(2r \cos \alpha, 0), \quad N_1(r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

Deci, ecuația dreptei QN este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2r \cos \alpha & 0 & 1 \\ r \cos \alpha & r \sin \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

și trecând la coordonate polare ($x = \rho \cos \omega, y = \rho \sin \omega$), obținem succesiv:

$$\begin{vmatrix} \rho \cos \omega & \rho \sin \omega & 1 \\ 2r \cos \alpha & 0 & 1 \\ r \cos \alpha & r \sin \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \rho \cos \omega & \rho \sin \omega & 1 \\ r \cos \alpha & -r \sin \alpha & 0 \\ r \cos \alpha & r \sin \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\rho(-\sin \alpha \cos \omega - \cos \alpha \sin \omega) + 2r \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

$$\rho \sin(\alpha + \omega) = r \sin 2\alpha.$$

Deci, ecuația segmentului de dreaptă QN este

$$(6) \quad \rho \sin(\alpha + \omega) = r \sin 2\alpha, \quad 0 \leq \omega \leq \alpha.$$

Segmentului de dreaptă QN_1 din desfășurată, îi corespunde pe con segmentul curb QPN .

Punctului P de pe curba QPN , îi corespunde unghiul polar V , iar în desfășurare, îi corespunde unghiul ω , așa că avem

$$\frac{V}{\omega} = \frac{2\pi}{2\alpha}, \quad \omega = \frac{\alpha}{\pi} V.$$

Pentru a obține și ecuațiile segmentului QPN din spațiu, trebuie să înlocuim în (6), $\omega = \alpha/\pi V$ și să scriem că acest segment se află pe conul (5). Avem

$$(7) \quad \begin{cases} \rho \sin \alpha (1 + V/\pi) = r \sin 2\alpha, & 0 \leq V \leq \pi, \\ \cos u = \alpha/\pi, & 0 \leq u \leq \pi/2. \end{cases}$$

Pentru a obține și ecuațiile segmentului QPN din spațiu, corespunzător lui QN_2 în desfășurată, e de ajuns să schimbăm V în $-V$ în ecuațiile precedente, luând ca limite $0 \geq V \geq -\pi$; vom avea

$$(8) \quad \begin{cases} \rho \sin \alpha (1 - V/\pi) = r \sin 2\alpha, & 0 \geq V \geq -\pi, \\ \cos u = \alpha/\pi, & 0 \leq u \leq \pi/2. \end{cases}$$

Deci, dacă $\cos u = \alpha/\pi$ ($0 \leq u \leq \pi/2$) reprezintă conul dat, atunci secțiunea cerută e dată de ecuațiile (7) și (8).

P. MÉLAS.

PROBLEMA 2512. Fie A_1 intersecția dreptelor BA_1 și CA_1 , care fac respectiv cu AB și AC acelaș unghi φ . La fel se obțin punctele B_1 și C_1 . Dreptele AA_1 , BB_1 și CC_1 concură pe dreapta ce unește centrul cercului circumscris cu punctul lui LEMOINE.

L. HAMBURGER.

În coordonate normale, dacă ne alegem triunghiul ABC ca triunghi de referență, ecuațiile dreptelor BA_1 și CA_1 sunt evident :

$$\alpha \sin \varphi - \gamma \sin(B - \varphi) = 0$$

$$\text{și} \quad \alpha \sin \varphi - \beta \sin(C - \varphi) = 0.$$

Ecuațiunea dreptei AA_1 se obține eliminând pe α , ceea ce ne dă :

$$\gamma \sin(B - \varphi) - \beta \sin(C - \varphi) = 0,$$

$$\text{sau} \quad \beta/\sin(B - \varphi) = \gamma/\sin(C - \varphi).$$

Dreptele AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt deci concurente în punctul M , definit de coordonatele :

$$\alpha/\sin(A - \varphi) = \beta/\sin(B - \varphi) = \gamma/\sin(C - \varphi).$$

Deoarece : $\sin(A - \varphi) = \sin A \cos \varphi - \cos A \sin \varphi$, punctul M va descrie, când φ variază, dreapta definită de punctele $(\sin A, \sin B, \sin C)$ și $(\cos A, \cos B, \cos C)$. Primul e punctul lui LEMOINE, iar al doilea este centrul cercului circumscris, adică tocmai cum cere enunțul.

Această problemă cunoscută a fost rezolvată de D-1 MIHAI FOCSĂNEANU.

PROBLEMA 2615. Să se discute ecuația

$$x^4 - (a^2 - 2m^2)x^2 + 2m^2(m^2 - a^2) = 0.$$

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Soluție dată de d-l A. FIŢESCU.

Forma cea mai generală a coeficienților a și m este

$$a = p + qi \quad \text{și} \quad m = s + ti \quad (i = \sqrt{-1})$$

unde p, q, s, t sunt cantități reale. Avem :

$$a^2 = p^2 - q^2 + 2pqi \quad \text{și} \quad m^2 = s^2 - t^2 + 2sti.$$

Insemnând pentru prescurtare

$$p^2 - q^2 = \alpha, \quad 2pq = \beta,$$

$$s^2 - t^2 = \gamma, \quad 2st = \vartheta,$$

găsim $a^2 = \alpha + \beta i \quad \text{și} \quad m^2 = \gamma + \vartheta i$

$$\therefore a^2 - 2m^2 = \alpha - 2\gamma + [\beta - 2\vartheta]i$$

$$\text{și} \quad 2m^2(m^2 - a^2) = 2(\gamma^2 - \vartheta^2 - \alpha\gamma + \beta\vartheta) + 2(2\vartheta\gamma - \beta\gamma - \alpha\vartheta)i.$$

În discuția ce urmează, vom deosebi 2 cazuri.

Cazul I. Coeficienții ecuației date sunt reali. Pentru aceasta, trebuie să avem

$$(1) \quad \beta - 2\vartheta = 0$$

$$(2) \quad 2\vartheta\gamma - \beta\gamma - \alpha\vartheta = 0 \quad \therefore \quad \gamma(2\vartheta - \beta) - \alpha\vartheta = 0.$$

Ținând seamă de (1) și (2), deducem că ecuația dată are toți coeficienții reali, când sunt satisfăcute egalitățile:

$$\beta = 2\vartheta \quad \text{și} \quad \alpha\vartheta = 0,$$

de unde, se deduc condițiunile :

$$1) \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2\vartheta \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} \vartheta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad 3) \begin{cases} \alpha = \vartheta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Vom examina pe rând fiecare din aceste cazuri.

Dacă înlocuim pe x^2 prin y , găsim ecuația

$$(3) \quad y^2 - (a^2 - 2m^2)y + 2m^2(m^2 - a^2) = 0,$$

al cărei realizant este

$$\Delta = a^4 + 4a^2m^2 - 4m^4.$$

1. Pentru cazul $\alpha = 0$, avem

$$\Delta = -\beta^2 - 4\beta\vartheta - 4\gamma^2 + 4\vartheta^2 + 4\gamma(\beta - 2\vartheta)i,$$

de unde, ținând seamă de (1):

$$\Delta = -8\vartheta^2 - 4\gamma^2 < 0,$$

adică, în acest caz, ecuațiunea (3), deci și cea dată, au toate rădăcinile imaginare.

2. În cazul 2), ϑ și β fiind nuli, urmează că a^2 și m^2 sunt câtimii reale, deci a și m vor fi reali sau imaginari de forma qi și ti , după cum a^2 și m^2 sunt pozitivi sau negativi.

Realizantul ecuației (3) se anulează pentru

$$a^2 = -2m^2(1 \pm \sqrt{2}).$$

a) Ținând seamă de relațiunile dintre coeficienți și rădăcini, găsim că rădăcinele ecuației (3) sunt reale și pozitive când avem simultan

$$(4) \quad a^4 + 4a^2m^2 - 4m^4 > 0$$

$$(5) \quad 2m^2(m^2 - a^2) > 0$$

$$(6) \quad a^2 - 2m^2 > 0.$$

Când $m^2 > 0$, adică m real, neegalitățile (5) și (6) dau

$$a^2 < m^2 \quad \text{și} \quad 2m^2 < a^2,$$

care nu pot avea loc simultan. Deci conchidem că atâta timp cât m este real, ecuația dată nu admite rădăcini reale.

Când $m^2 < 0$, din (5) și (6) se deduce

$$m^2 < a^2 \quad \text{și} \quad 2m^2 < a^2,$$

care se contopesc în

$$(7) \quad m^2 < a^2.$$

Pe de altă parte, (4) are loc pentru

$$(8) \quad a^2 < -2m^2(1 - \sqrt{2})$$

și

$$(9) \quad -2m^2(1 + \sqrt{2}) < a^2.$$

Neegalitățile (7) și (8) se contopesc în

$$(10) \quad m^2 < a^2 < -2m^2 (1 - \sqrt{2}),$$

iar (7) și (9) sunt exprimate prin (9). Deci ecuația (3) are rădăcinile pozitive, iar ecuațiunea dată are toate rădăcinile reale, când m este imaginar de forma ti și este legat de a prin relațiunile (9) sau (10), a putând fi real sau imaginar.

b) Rădăcinile ecuației (3) sunt reale și negative când avem neegalitățile (4), (5) și neegalitatea:

$$a^2 - 2m^2 < 0.$$

Când $m^2 > 0$, din aceste 3 neegalități se deduce

$$(11) \quad a^2 > -2m^2 (1 - \sqrt{2})$$

$$(12) \quad a^2 < -2m^2 (1 + \sqrt{2})$$

$$(13) \quad a^2 < m^2 \quad \text{și} \quad a^2 < 2m^2.$$

Prima din neegalitățile (13) cuprinde și pe a doua. Neegalitățile (11) și (13) se contopesc în

$$(14) \quad -2m^2 (1 - \sqrt{2}) < a^2 < m^2,$$

iar (12) și (13), în (12). Deci, când m este real și avem (12) sau (14), ecuația dată are toate rădăcinile imaginare.

Când $m^2 < 0$, ar trebui să avem

$$m^2 < a^2 \quad \text{și} \quad a^2 < 2m^2,$$

cece nu se poate.

c) Rădăcinile ecuației (3) sunt reale și de semne contrare când avem neegalitatea (14) și:

$$2m^2 (m^2 - a^2) < 0$$

$$\therefore \quad 0 < m^2 < a^2 \quad \text{sau} \quad a^2 < m^2 < 0.$$

Ecuația dată are 2 rădăcini reale și 2 imaginare.

d) Rădăcinile ecuației (3) sunt egale, când Δ este nul, adică

$$a^2 = -2m^2 (1 \pm \sqrt{2}).$$

Ele vor fi pozitive când

$$(15) \quad a^2 - 2m^2 > 0$$

și negative când

$$(16) \quad a^2 - 2m^2 < 0.$$

Dar în cazul $\Delta = 0$, avem

$$a^2 - 2m^2 = -2m^2(2 \pm \sqrt{2}).$$

Cu aceasta, se vede că (15) este satisfăcută când $m^2 < 0$, iar (16) când $m^2 > 0$. Așa dar, când $\Delta = 0$, ecuația (3) are 2 rădăcini reale pozitive și egale când $m^2 < 0$, iar ecuația dată are 2 rădăcini reale egale și de semne contrare. Când $m^2 > 0$, iar $\Delta = 0$, ecuația (3) are 2 rădăcini negative egale și ecuația dată are rădăcinile imaginare.

e) Ecuația (3) și deci cea dată are rădăcini imaginare când

$$a^4 + 4a^2m^2 - 4m^4 < 0,$$

care are loc:

Când $m^2 > 0$, pentru

$$-2m^2(1 + \sqrt{2}) < a^2 < -2m^2(1 - \sqrt{2}),$$

iar când $m^2 < 0$, pentru

$$-2m^2(1 - \sqrt{2}) < a^2 < -2m^2(2 + \sqrt{2}).$$

f) Ecuația dată are toate rădăcinile nule, când

$$a^2 - 2m^2 = 0 \quad \text{și} \quad 2m^2(m^2 - a^2) = 0$$

$$\therefore a^2 = 2m^2 = 0.$$

g) Ecuația (3) are o rădăcină nulă și una pozitivă, când

$$2m^2(m^2 - a^2) = 0$$

$$a^2 - 2m^2 > 0,$$

de unde scoatem

$$m^2 = 0 \quad \text{și} \quad a^2 > 0$$

$$\text{sau} \quad m^2 - a^2 = 0 \quad \text{și} \quad a^2 > 2m^2 \quad \therefore a^2 = m^2 < 0.$$

În acest caz, ecuația dată are 2 rădăcini nule și 2 rădăcini reale.

h) Ecuația (3) are o rădăcină nulă și una negativă, când

$$2m^2(m^2 - a^2) = 0$$

$$a^2 - 2m^2 < 0,$$

de unde deducem

$$m^2 = 0 \quad a^2 < 0,$$

$$\text{sau} \quad a^2 = m^2 \quad \text{și} \quad a^2 < 2m^2 \quad \therefore 0 < m^2.$$

Ecuația dată are 2 rădăcini imaginare și 2 nule.

3) În cazul 3), când

$$\alpha = \beta = \vartheta = 0,$$

avem $a^2 = 0$ și ecuația dată se reduce la

$$x^4 + 2m^2x^2 + 2m^4 = 0,$$

al cărei rădăcini sunt

$$x = \pm m \sqrt{-1 \pm i}$$

Discuția de până aici se poate rezuma în următorul tabel, pentru cazul când a și m sunt reali sau imaginari de forma qi și ti .

$m^2 > 0$	$\therefore$	m real.		
$a^2 < -2m^2(1 + \sqrt{2})$		4 rădăcini imaginare		
$-2m^2(1 - \sqrt{2}) < a^2 < m^2$		4 » »		
$-2m^2(1 + \sqrt{2}) < a^2 < -2m^2(1 - \sqrt{2})$	4 » »			
$m^2 < a^2$		2 » reale și 2 imaginare		
$m^2 = a^2$		2 » nule și 2 »		
$a^2 = -2m^2(1 \pm \sqrt{2})$		2 » imaginare		
$m^2 < 0$	$\therefore$	m imaginar de forma ti		
$m^2 < a^2 < -2m^2(1 - \sqrt{2})$		4 rădăcini reale		
$-2m^2(1 + \sqrt{2}) < a^2$		4 » »		
$a^2 < m^2$		2 » » și 2 imaginare		
$a^2 = m^2$		4 » »		
$a^2 = -2m^2(1 \pm \sqrt{2})$		2 » »		
$-2m^2(1 - \sqrt{2}) < a^2 < -2m^2(1 + \sqrt{2})$	4 »	imaginare		
$m^2 = 0$				
$a^2 = 0$		4 » nule		
$a^2 > 0$		4 » reale, din care 2 nule		
$a^2 < 0$		2 » imaginare și 2 nule		
$a^2 = 0$		4 » »		

Cazul II. Coeficienții ecuației date sunt imaginari. Ținând seamă de relațiile dintre rădăcini și coeficienți, se găsește că în acest caz, ecuațiunea (3) nu poate avea decât maximum o rădăcină reală. Fie P acea rădăcină și $Q + Ri$ rădăcina imaginară. Scriind relațiile între aceste rădăcini și coeficienții ecuației (3), găsim :

$$P + Q = \alpha - 2\gamma$$

$$PQ = 2(\gamma^2 - \vartheta^2 - \alpha\gamma + \beta\vartheta)$$

$$PR = 2(2\gamma\vartheta - \beta\gamma - \alpha\vartheta)$$

$$R = \beta - 2\vartheta$$

Din ultimele 2, se scoate

$$P = -2\left(\gamma + \frac{\alpha\vartheta}{\beta - 2\vartheta}\right).$$

Dacă $P > 0$, ecuațiunea dată are 2 rădăcini reale, egale cu $\pm \sqrt{P}$. Dacă însă $P < 0$, ecuațiunea dată are toate rădăcinile imaginare și egale cu $\pm \sqrt{P}$ și $\pm \sqrt{Q + R}$.

Concluzia este că în cazul coeficienților imaginari, ecuația dată poate avea cel mult 2 rădăcini reale.

Observațiuni. 1°. În privința studiului trinomialului de gradul II cu coeficienți imaginari, se recomandă articolele d-lui A. G. IOACHIMESCU publicate în *Gazeta Matematică* Vol. VII pagina 250 și 270.

2°. S'au primit soluțiuni în cazul particular al lui a și m reali, dela d-nii: GR. MOISIL, A. LITEANU, M. GRÜNBAUM, C. NICOLAU și S. LĂZĂRESCU.

Toate aceste soluțiuni sunt necomplete. Ele sunt afectate și de mici erori de calcul, afară de a d-lui GR. MOISIL.

GH. B.

PROBLEMA 2970. Știind că între laturile și medianele unui triunghi există o relație de gradul al doilea, să se găsească această relație numai prin considerații de omogenitate și simetrie.

P. SERGESCU.

Toate formulele care exprimă proprietăți geometrice sunt omogene, căci ele trebuie să subsiste și când se schimbă unitățile. Această observare e o sursă fecundă de descoperiri. În ultimul timp, unii matematicieni au afirmat că geometria întreagă poate fi construită, pornind numai dela considerații de omogenitate. Vom rezolva problema propusă, ca un exercițiu asupra felului cum se pot rezolva problemele din această categorie.

Formula căutată e, evident, simetrică în raport cu laturile și în raport cu medianele. De oarece e omogenă, ea e neapărat de forma:

$$l(a^2 + b^2 + c^2) + m(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + n(am_a + bm_b + cm_c)$$

$$+ p[a(m_b + m_c) + b(m_c + m_a) + c(m_a + m_b)] = 0,$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor, m_a, m_b, m_c lungimile medianelor corespunzătoare și l, m, n, p constante pe care trebuie să le determinăm.

În triunghiul echilateral de latură a , avem :

$$a = b = c \quad \therefore \quad m_a = m_b = m_c = a\sqrt{3}/2.$$

Cu aceste valori particulare, formula de mai sus devine, după ce suprimăm factorul $3a^2$:

$$l + \frac{3}{4}m + \frac{\sqrt{3}}{2}n + \sqrt{3}p = 0. \quad (1)$$

Pentru a determina pe l, m, n, p ne mai trebuiesc două relațiuni analoge cu (1), pe care le vom obține din două alte triunghiuri particulare. Calculele devin foarte simple, dacă luăm un triunghi AB_0C astfel ca vârful B_0 să se găsească chiar pe dreapta AC . Avem atunci, în realitate, un triunghi degenerat, care se reduce la un segment de dreaptă luat de două ori. Formula, pe care o căutăm, trebuie să se aplice și la acest triunghi degenerat.

Lucrul acesta se poate dovedi în felul următor, ca să fie absolut riguros: Fie $a^0, b^0, c^0, m_a^0, m_b^0, m_c^0$ laturile și medianele triunghiului AB_0C . Să luăm un punct B , foarte aproape de B_0 , dar care nu e situat pe AC . Pentru triunghiul ABC , formula se aplică. Dar, punctul B fiind foarte aproape de B_0 , avem :

$$a = a^0 + \alpha, \quad b = b^0 + \beta, \quad c = c^0 + \gamma,$$

$$m_a = m_a^0 + \varepsilon, \quad m_b = m_b^0 + \lambda, \quad m_c = m_c^0 + \mu,$$

unde cantitățile $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \lambda, \mu$ sunt foarte mici. Însemnând atunci cu V valoarea membrului I din formulă, pentru triunghiul ABC și cu V^0 valoarea când înlocuim pe a prin a^0 , etc. avem $V = 0$. Dacă în expresiunea lui V înlocuim pe a prin $a^0 + \alpha$, pe b prin $b^0 + \beta$, etc. și facem calculele, obținem :

$$V = V^0 + A\alpha + \dots + L\alpha^2 + \dots,$$

unde expresiile algebrice $A, \dots, L, \dots$ se pot calcula fără greutate, dar n'au însemnătate pentru demonstrația care vrem s'o facem. Deci trebuie să avem :

$$V^0 + A\alpha + \dots + L\alpha^2 + \dots = 0. \quad (R)$$

Observăm aci că, punctul B_0 fiind dat, V^0 e o constantă. Termenii $A\alpha, \dots$ sunt foarte mici, căci am presupus că B e foarte aproape de B_0 . Ba încă, noi putem alege pentru B nesfârșit de multe poziții foarte apropiate de B_0 așa că totdeauna $V=0$. Însă, pentru fiecare poziție nouă, cantitățile $\alpha, \dots$ rămân foarte mici, dar variază. Așa dar, în relația R , avem două părți în membrul I: o parte constantă V^0 și o parte care variază după cum alegem pe B , dar care e totdeauna foarte mică. Când B tinde către B_0 , câtimile $\alpha, \dots$ tind către 0. Atunci, expresia

$$V^0 + A\alpha + \dots + L\alpha^2 + \dots$$

fiind tot timpul egală cu zero, și limita ei, când B vine în B_0 , trebuie să fie egală cu zero. Or, limita acestei sume e egală cu suma limitelor. Limita lui V^0 e V^0 , a lui $A\alpha$ e 0, ..., a lui $L\alpha^2$ e 0, ... Deci limita expresiunii noastre e V^0 și prin urmare

$$V^0 = 0,$$

ceea ce demonstrează că formula pe care o căutăm noi, se aplică și pentru triunghiurile degenerare AB_0C .

Vom alege atunci următoarele triunghiuri degenerare:

1^o) B^0 la mijlocul lui AC , atunci:

$$a = c, \quad b = 2a, \quad m_a = m_c = \frac{3}{2}a, \quad m_b = 0.$$

Înlocuind aceste valori, formula devine, după suprimarea factorului $3a^2$:

$$2l + \frac{3}{2}m + n + 3p = 0. \quad (2)$$

2^o) B_0 între A și C , astfel ca $AB_0 = a$, $B_0C = 3a$. Atunci:

$$\begin{aligned} a &= 3a, & b &= 4a, & c &= a, \\ m_a &= \frac{5}{2}a, & m_b &= \frac{8}{2}a, & m_c &= \frac{7}{2}a, \end{aligned}$$

iar formula devine, pentru acest triunghi:

$$26l + \frac{39}{2}m + 15n + 41p = 0. \quad (3)$$

Ecuatiile (1), (2), (3) sunt lineare și omogene în l, m, n, p . Deci ele ne permit să determinăm cantități proporționale cu aceste necunoscute, care să satisfacă la problemă. Se găsește, fără nici o greutate:

$$l = -\frac{3}{4}, \quad m = 1, \quad n = 0, \quad p = 0.$$

Deci formula căutată este :

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

formulă cunoscută din geometria elementară.

Observări. În locul triunghiurilor degenerare întrebuițate, se puteau alege două triunghiuri particulare oarecare, de ex. triunghiuri dreptunghii. În cazul acela, nu mai eram nevoiți să facem raționamentul că $V^0 = 0$. Am ales totuși aceste triunghiuri degenerare, fiindcă conduceau la calcule mai simple.

Metoda aceasta pare lungă, dacă o întrebuițăm pentru o singură formulă, dar ea are avantajul că e uniformă pentru toate formulele geometriei, se bazează pe principii elementare și e foarte ușor și repede de aplicat, odată ce a fost înțeleasă.

PROBLEMA 3077. Să se găsiască limita expresiunii

$$E = \frac{1}{a n} \sqrt[n]{\operatorname{tg} \frac{b}{a^n}},$$

când n tinde la infinit, știind că a și b sunt două cantități finite.

LOCOT. COL. GH. BUCILIU.

Soluție și generalizare date de d-l B. M. BARBĂLATT (Lc. Codreanu, Bârlad).

Fie, în general, de aflat limita expresiunii

$$E = \frac{1}{P_{(n)}} \sqrt[n]{\operatorname{tg} \frac{b}{Q_{(n)}}},$$

când n tinde la ∞ , știind că $P_{(n)}$ și $Q_{(n)}$ sunt 2 funcțiuni care tind la ∞ odată cu n și că pentru $n = \infty$,

$$\lim \frac{Q_{(n)}}{Q_{(n+1)}} = k,$$

k fiind finit.

Avem

$$(1) \quad \lim E = \lim \frac{1}{P_{(n)}} \cdot \lim \sqrt[n]{\operatorname{tg} \frac{b}{Q_{(n)}}}.$$

Aplicând criteriul

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

(*Gazeta Matematică*, Vol. XXIX pag. 21), avem :

$$\lim \sqrt[n]{\operatorname{tg} \frac{b}{Q_{(n)}}} = \lim \frac{\operatorname{tg} \frac{b}{Q_{(n+1)}}}{\operatorname{tg} \frac{b}{Q_{(n)}}} = \lim \frac{\frac{b}{Q_{(n+1)}}}{\frac{b}{Q_{(n)}}} = \lim \frac{Q_{(n)}}{Q_{(n+1)}} = k.$$

Pe de altă parte,

$$\lim \frac{1}{P_{(n)}} = 0.$$

Introducând în (1),

$$\lim E = 0 \times k = 0.$$

În cazul problemei propuse, avem aceeași limită, cu condiția ca

$$Q_{(n)} = a^n$$

să tindă la ∞ , ceea ce are loc pentru $a > 1$. Când $a = 1$ se vede ușor că E tinde tot la zero. Dacă $a < 1$ atunci $\operatorname{tg} b/a^n$ este nedeterminat, deci E nu are limită.

Observațiuni. 1°. Au rezolvat foarte bine problema, făcând discuția asupra lui a , d-nii : P. KATZ (Șc. Politehnică, București); W. SOLOMON (Lc. Matei Basarab, București) și M. DOBRESCU-BĂBICI.

2°. Au găsit limita exactă, fără a discuta valorile lui a : 1) d-nii : I. S. TEODORESCU și M. ADAM, întrebuițând criteriul lui CAUCHY ; 2) d-nii : A. TAUBER (Lc. Laurian, Botoșani); M. ADAM, M. ȘTEFAN, L. VLAȚIU și D. POPESCU (Lc. Constanța); I. GOLDȘTEIN (Lc. Bârlad), L. WEISS (Lc. Alexandri, Galați), punând expresiunea sub forma

$$E = \frac{1}{a^n} \cdot \sqrt[n]{\operatorname{tg} \frac{b}{a^n} \cdot \frac{b}{a^n}}.$$

3°. D-nii : C. MIHĂESCU, Ș. LĂZĂRESCU (Lc. Giurgiu); O. POPEA (Chișinău); S. EPURE; L. IONESCU și P. CIREȘ, luând $\log E$ și aplicând regula lui HOSPITAL. 4) D-l M. ADAM dezvoltând în serie pe $\operatorname{tg} b/a^n$ și 5) d-l B. REINHORN printr-o metodă mai puțin riguroasă.

4°. A mai găsit soluția, prin calcule, D-l O. POPEA.

PROBLEMA 3142. Să se găsiască numerele de forma $2^n + 1$, care se pot scrie: aa bb cc aa.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

Soluție dată de D-șoara ZENOBIA CONSUELLE DRĂGHICI și de D-nii: N. ARCADIAN, D. BLUMENFELD, CONST. I. CIORĂNESCU, GH. GROFȘOREANU, GH. HUZUNEANU, ILIE IONESCU-BREZUICA, P. I. IONESCU, I. I. MARINESCU, GH. I. OPRESCU, M. PĂTROIANU, STELIAN RĂDULESCU, I. DE-ARIE SCHĂCTER, GH. D. SIMIONESCU și ION C. VASILIU.

Fie $N = 2^n + 1$, atunci N având opt cifre, deci caracteristica fiind 7, vom avea:

$$n \cdot \log 2 = \log(N - 1),$$

deci:

$$n = \frac{\log(N - 1)}{0,30103}.$$

Considerăm acum drept mantiză la $\log(N - 1)$ pe 00000 și 99999; găsim că:

$$24 \leq n \leq 26,$$

n fiind întreg.

Cu aceste valori ale lui n , găsim:

$$2^{24} + 1 = 1677217$$

$$2^{25} + 1 = 33554433. \quad \text{soluție}$$

$$2^{26} + 1 = 67108865$$

Notă. 1. Alte soluțiuni, ceva mai lungi, au fost date de D-nii: R. MITESCU O. SCHÄCHTER, O. BURSTIN, V. LĂZĂRESCU și ZANE IONESCU.

2. Ceilalți rezolvitori anunțați pe copertă s'au mărginit numai la căutarea soluției problemei în tablele DUPUIS (puterile lui 2).

3. Problema ar putea fi rezolvată fără a ridica pe 2 la puterile 24, 25 și 26, — bine înțeles făcând alte operațiuni — astfel:

Fie:

$$N = aa\,bb\,cc\,aa = 2^n + 1 = 11000011 \cdot a + 110000 \cdot b + 1100 \cdot c = 2^n + 1$$

Se vede că a este impar, deci: $a = 2k + 1$, și avem:

$$11000011 \cdot k + 5500005 + 55000 \cdot b + 550 \cdot c = 2^{n-1}.$$

De aici, se vede iarăși că trebuie să avem: $k = 2q + 1$, deci ne rămâne:

$$11000011 \cdot 9 + 2750003 + 27500 \cdot b + 275 \cdot c = 2^{n-2}.$$

Cum însă :

$$a = 2k + 1 = 4q + 3 < 10,$$

urmează că :

$$q = 0, \quad \text{sau } 1.$$

Cu aceasta, eliminându-se q , ne rămân cifrele b și c , care se pot, în mod analog, elimina, punându-se condițiunea de paritate și astfel se ajunge la soluția problemei prin încercări mai multe dar mai simple, înlăturând ridicări la puteri.

4. Un corespondent face observația următoare :

„Se pare că și $2^{135}, \dots 2^{5^n}$, se bucură de proprietăți analoage celei din enunț“.

Cuvintele „*Se pare...*“ nu sunt matematice. În matematici totul este precizat, nimic nu este dubios. Numai unor savanți le este permis, în conversațiunile obișnuite, să întrebuințeze aceste cuvinte, adică să zică: „*Se pare că avem cutare și cutare, etc...*“, aceasta însă numai în conversațiuni obișnuite, lăsând a se înțelege că nu au făcut studiul încă complet.

Am căutat totuși să verific părerea corespondentului nostru și am ajuns la concluzia că :

„Numărul 2^{135} nu se bucură de proprietăți analoage enunțului, de oarece ultimile opt cifre ale lui sunt :

07026432.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

EXERCITIUL.

88. Se cere un număr, care adunat cu cubul său, să dea un număr de trei cifre egale.

DAVID GHEORGHE.

R. Numerele, ale căror cuburi au trei cifre, sunt 5, 6, 7, 8 și 9. Găsim, cu ușurință

$$6 + 6^3 = 222.$$

89. Să se arate că expresiunea :

$$E = 2^n \cdot 7^{2n} + 5^{3n} - 2^{2n} \cdot 7^n - 1,$$

este divizibilă cu 97.

PAUL I. IONESCU.

R. Este deajuns a se observa că :

$$2^n \cdot 7^{2n} = 2^n \cdot 49^n = 98^n = 97 + 1,$$

și: $5^{3n} - 2^{2n} \cdot 7^n = 125^n - 28^n = M(125 - 28) = M97.$

90. Să se găsiască restul diviziunii expresiei:

$$E = 1949^{943} + 3327^{337},$$

prin 13.

CONST. I. CIORĂNESCU.

R. $1949^{943} = (1949^{12})^{79} = (M13 + 1)^{79}$, Teorema lui FERMAT.

$$3327 = M13 - 1; \quad 3327^{337} = (M13 - 1)^{337}.$$

Deci restul expresiunii cerute prin 13, e acelaș ca al expresiei:

$$E = (M13 + 1)^{79} + (M13 - 1)^{337} = M13 + 1 - 1 = M13.$$

Expresia dată e divizibilă cu 13.

91. Dacă unui patrat de cinci cifre, îi ștergem cifrele extreme, ne rămâne rădăcina lui patrată. Se cere acel patrat.

D. SOLOMON.

R. Ecuația este:

$$10000d + 1000m + 100s + 10z + u = (100m + 10s + z)^2.$$

Patratul fiind mai mic ca 99999, rădăcina nu trece peste 317. Din cele două cifre ce pot termina un patrat, numai 00, 24, 84 sunt așa că z^2 se termină cu u . În primul caz, avem:

$$100d + 10m + s = (10m + s)^2,$$

care cere $s = 0$, deci $m = 0$, $d = 0$, care nu dă soluții; sau $s = 5$, care dă $m = 2$, $d = 6$, de unde soluția **62500**; sau $s = 6$, la care nu convine decât $m = 7$, ce dă $d > 3$. Se găsește analog că grupele 24 și 84 nu dau soluții.

92. Se cer fracțiile cu acelaș numărător, al căror produs este 2.

E. ȘTEFĂNESCU.

R. Deci $\frac{x}{y} \times \frac{x}{z} = 2$ se scoate $x^2 = 2yz$, sau:

$$(x+y)^2 + (x+z)^2 = (x+y+z)^2,$$

care arată că $(x+y)$, $(x+z)$ și $(x+y+z)$ sunt trei numere pitagorice. Putem lua

$$x+y = m^2 - n^2, \quad x+z = 2mn, \quad x+y+z = m^2 + n^2,$$

cu care găsim fracțiile:

$$\frac{2n(m-n)}{(m-n)^2} \text{ și } \frac{2n(m-n)}{2n^2}.$$

93. Se cer numerele de patru cifre având cifre medii identice, iar suma primelor două, egală cu diferența ultimelor două.

M. GHELBER.

R. Dacă cifrele medii sunt 0, cele extreme sunt egale; dacă sunt 1, prima e cu 2 mai mare ca ultima; dacă sunt 2, prima e cu 4 mai mare ca ultima; etc. De aci, soluțiile: 1001; 2002; 3003; 4004; 5005; 6006; 7007; 8008; 9009; 1113; 2114; 3115; 4116; 5117; 6118; 7119; 1225; 2226; 3227; 4228; 5229; 1337; 2338; 3339; 1449. Dacă scădem unitățile din zeci, nu avem soluții.

94. Care număr de trei cifre, corespunde cu răsturnatul său, unul fiind scris în sistemul cu baza 11 și altul cu sistemul cu baza 8?

T. N. ANGELESCU.

R. Ecuația este:

$$x \cdot 11^2 + y \cdot 11 + z = z \cdot 8^2 + y \cdot 8 + x,$$

$$\therefore y = 21z - 40x.$$

Pentru $z=0, 1$ nu avem soluție; $z=2$ cere $x=1$ și deci $y=2$; $z=3$ nu dă soluție; $z=4$ cere $x=2$ și deci $y=4$; $-z=5$ nu dă soluție; $z=6$ cere $x=3$ și deci $y=6$; $-z=7$ nu dă soluție, $z \geq 8$ trece peste baza cea mică. Soluțiile sunt 122, 244, 366, în sistemul cu baza 11, sau 221, 442, 663 în cea cu baza 8 și 145, 290, 435 în sistemul cu baza 10.

95. Să se arate că $24999 \dots 9^2$, a cărui rădăcină are n cifre, dă iarăși un patrat, dacă îi mărim a $(n-a)$ cifră dela stânga cu 1.

E. ȘTEFĂNESCU.

R. Avem $\frac{n-2}{2499 \dots 9} = \frac{n-2}{2500 \dots 0} - 1 = 25 \cdot 10^{n-2} - 1$, și prin urmare:

$$\frac{n-2}{2499 \dots 9^2} = (5^2 \cdot 10^{n-2} - 1)^2.$$

Dar sporind acesta cu 10^n , găsim:

$$5^2 \cdot 10^{n-2} - 1)^2 + 10^n = 5^4 \cdot 10^{2n-4} - 5 \cdot 10^{n-1} + 1 + 2 \cdot 5 \cdot 10^{n-1} = (5^2 \cdot 10^{n-2} + 1)^2.$$

Deci avem patratul lui $\frac{n-3}{25000 \dots 01}$.

96. Să se arate că pentru m pereche și n nepereche, expresiunea :

$$1924^{1925n} + 1926^{1927m},$$

se divide cu 7.

N. ARCADIAN.

R. Se vede că $1924 = M7 - 1$ și $1926 = M7 + 1$ și se conchide imediat divizibilitatea.

97. Să se găsiască numerele, având cele trei cifre în progresie aritmetică crescătoare, așa fel ca suma cifrelor să fie divizibilă cu fiecare cifră.

AL. OPRAN.

R. Suma cifrelor $(a + b + c)$ este totdeauna divizibilă cu b . Punând condiția ca c să dividă suma $(a + b)$, se găsește $a = r$, rația progresiunii; urmează $c = 3r$, $b = 2r$.

Numerele căutate sunt 123, 246, 369.

98. Fie $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ un poligon înscris într'un cerc O și M un punct pe, cerc. Paralelele din O la $MA_1, MA_2, \dots, MA_n$, taie tangentele în $A_1, A_2, \dots, A_n$ la cercul O , în v puncte colineare. Să se găsiască și înfășurătoarea ultimei drepte.

B. M. BARBĂLATT.

R. Fie M_1 diametral opusul lui M pe cerc. Se vede imediat că punctul B_1 , unde paralela din O la dreapta MA_1 taie tangenta în A_1 , este polul dreptei $M_1 A_1$. Deci punctele $B_1, B_2, \dots, B_n$ se vor găsi pe tangenta în M_1 la cercul O . Cercul O este înfășurata dreptei $B_1 B_2 \dots B_n$.

99. Se cere locul ortopolului unei drepte fixe Δ , în raport cu triunghiul ABC , când BC se deplasează paralel cu ea însăși.

N. BOTEA.

R. Fie A' proiecția lui A pe Δ , iar A'' proiecția lui A' pe BC . Ortopolul ω se va găsi totdeauna pe dreapta $A'A''$, care e fixă.

100. Să se calculeze suma S ,

$$S = \sum_{n=1}^{n=n} n(n+2)(n+4).$$

TH. ANGHELUȚĂ.

R. Termenul general al sumei poate fi scris :

$$n(n+2)(n+4) = 6C_{n+2}^3 + 6C_{n+1}^2 + 3C_n^1.$$

De unde, avem :

$$S = 6C_{n+3}^4 + 6C_{n+2}^3 + 3C_{n+1}^2.$$

Se găsește

$$S = \frac{n(n+1)(n+4)(n+5)}{6}.$$

101. Să se determine a , astfel ca dezvoltarea fracțiunii următoare în elemente simple

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x^3(x+1)},$$

să nu conțină termenul în $1/x$.

TH. ANGHELUȚĂ.

R. Se găsește

$$a = 1.$$

102. Să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & (1+x^3)(ax^2+bx+c) \\ y & y^2 & y^3 & (1+y^3)(ay^2+by+c) \\ z & z^2 & z^3 & (1+z^3)(az^2+bz+c) \\ u & u^2 & u^3 & (1+u^3)(au^2+bu+c) \end{vmatrix}.$$

TH. ANGHELUȚĂ.

R. Dacă se înseamnă prin V_4 determinantul VANDERMONDE al celor 4 cantități x, y, z, u , se găsește :

$$D = V_4 [axyzu(x+y+z+u) + bxyz - c].$$

103. Să se rezolve sistemul :

$$x + y + z = 1$$

$$C_n^1 x + C_{n+1}^1 y + C_{n+2}^1 z = C_{n+3}^1$$

$$C_n^2 x + C_{n+1}^2 y + C_{n+2}^2 z = C_{n+3}^2.$$

TH. ANGHELUȚĂ.

R. Ținând socoteală de expresia combinațiilor și de relațiile cunoscute, se găsește :

$$x = 1, \quad y = -3, \quad z = 3.$$

104. Să se rezolve în numere întregi sistemul ;

$$\frac{x(y+z)}{y(z+x)} = \frac{y(z+x)}{z(x+y)} = \frac{z(x+y)}{y(z+x)} = 1.$$

B. REINHORN.

R. Din sistemul propus, deducem :

$$x(y+z) = y(z+x) = z(x+y)$$

$$xy = yz = zx$$

$$x = y = z.$$

PROBLEME PROPUSE.

3181. Să se găsiască patratele perfecte de patru cifre, ale căror rădăcini să fie numere formate cu două cifre ale acestora.

N. BOTEA.

3182. La un joc cu 9 cășori, o persoană pune de 900 ori totdeauna pe No. 1 și câștigă de 65 ori. Este acel joc corect ?

LT. A. MICLESCU.

3183. Un număr de patru cifre împărțit cu suma cifrelor, dă câtul 334, fără rest. Care sunt numerele ce îndeplinesc condițiunea ? Să se examineze și când împărțirea dă un rest.

E. ȘTEFĂNESCU.

3184. Când $n^2!$ se termină cu n zeruri ?

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

3185. Fie H_a , H_b , H_c mijloacele înălțimilor unui triunghi ABC, O_a centrul cercului circumscris triunghiului format de dreptele $H_b H_c$, AB și AC; O_b , O_c centrele celorlalte două cercuri analoage. Să se demonstreze că punctele H_a , H_b , H_c , O_a , O_b , O_c sunt situate pe un acelaș cerc.

A. ANGELESCU.

3186. Într'un triunghi ABC, latura BC e fixă, iar perimetrul constant. Se cere locul ortopolului unei drepte fixe Δ , în raport cu triunghiul.

O. BOLGIU.

3187. Se împart cevienele AA_1, BB_1, CC_1 ale unui triunghi ABC, prin punctele M_1, N_1, P_1 , în rapoartele :

$$\frac{AM_1}{AA_1} = y_1 + z_1; \quad \frac{BN_1}{BB_1} = z_1 + x_1; \quad \frac{CP_1}{CC_1} = x_1 + y_1,$$

x_1, y_1, z_1 fiind coordonatele baricentrice ale punctului lor de întâlnire T_1 . Se fac aceleași operațiuni asupra unui alt sistem de ceviane AA_2, BB_2, CC_2 , obținându-se punctele M_2, N_2, P_2 .

1) Să se demonstreze că paralelele duse respectiv prin M_1, N_1, P_1 la cevienele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente și reciproc.

2) Să se determine poziția celor două puncte de întâlnire T_{12}, T_{21} .

M. GHERMĂNESCU.

3188. Se dă ecuația :

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}.$$

Ce valori poate lua raportul x/y ?

I. IONESCU.

3189. Dându-se

$$k(x, y) = x - y,$$

să se calculeze suma seriei

$$k(x, y) + \lambda k_2(x, y) + \dots + \lambda^i k_{i+1}(x, y) + \dots,$$

unde s'a notat

$$k_{i+1}(x, y) = \int_0^1 k(x, s) k_i(s, y) ds. \quad i = 2, 3, \dots$$

TH. ANGHELUȚĂ.

3190. Cum se poate mări sau micșora săgeata traectoriei unui proiectil tras de un tun, fără să-i schimbăm bătaia ?

CĂPITAN I. LINTEȘ.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam Mircea (2922, 46, 3059, 77, 91, 101, 25, 35, 44, 53, 55, 59, 66, 67, 74, 78, N, P); Angelescu Tr. (2978); Arcadian N. (3142); Bărbulescu Gh. (3154, R); Basacov Gh. (3097, 138); Berdan C. (3166); Bleiweiss P. (3172); Blumenfeld D. (3154); Bolgiu O. (3073, 138); Bogdan Gh. (3117, 42, 67); Bogdan M. (3120, 59, 67); Botea N. (2856, 978, 3047, 73, 109, 55, 57, 66, 72); Brătescu-Danubiu M. (2895, 3067, 85, 97, 155, 66, 72); Brüll L. (2978, 3132, 66, 72); Cădere R. (3135, 67); Căldăraru L. (3167); Cazan V. Gh. (3167); Cerniciov C. (R); Ciorănescu C. (2891, 972, 3097, 102, 55, R); Comănescu-Bălteni Al. (3172); Constantinescu I. (3097, 154, 66, 67); Cosmovici Gh. (3097, 166, 67); Costăchescu I. (3098); David Gh. (3031, 59, 67, 77, 82, P); Epure St. (3084, 135, 44, 54); Florescu O. (3172); Focșeneanu M. (3108, 53, 66, P); Gataianu B. (3172); Georgescu M. (3097, 167); Giurumescu C. (3097, 167, 78); Grofșoreanu Gh. (3167); Gulian E. (3139); Ionescu P. (2683, 891, 3017, 91, 97, 155, 66, 72); Ionescu-Zane Gh. (3155, 59, 66, 72); Joja Gh. (3154); Jojea N. (3104, 13); Kahane A. (3167); Lăzărescu Șt. (2918); Lepădatu V. (3097, 120, 39, 54); Lupan L. (3167); Manope V. (3104, 13, 54); Mărdărescu R. (3097); Mitescu D. (3059, 142); Miu I. (3097, 154, R); Mladenovici Al. (3166, 72, 73); Nicolescu N. (3059, 97); Novac A. (3166, 67); Opran Al. (3031, 97); Pătroianu M. (3115, 54, 55); Penenjchevici L. (A); Popa I. (3104, 13, 72); Popea O. (3133, 52, 66, 72, R); Popescu D. (2929, 46, 3154, 55, 67); Popescu M. (2978, 3031); Popovici I. (2683, 701, 891, 977); Popoviciu T. (3128, 29); Reinhorn B. (2856, 91, 929, 3109, 32, 59); Reiss B. (3167); Russu E. (3100); Samoilă D. (2972); Schächter I. de Arie (3093, 97, 101, 54); Schächter O. (3109, 57, 72, R); Segărceanu N. (2977); Simionescu Gh. (3097, 155, 67, P, R); Ștefan M. (2795, 3052, P, R); Stoica A. (3167, 72); Tăiler G. (P); Tauber Al. (3168, 72, 73); Teodorescu N. (3172, 73); Țigoiu I. (3172, 73); Tudorache S. (711, 3097, 167); Udrisky Tr. (3170, P); d'Ungar L. (3097); Urzică A. (3155); Vârlan V. (711, 3167); Vasilescu M. (2969, 3077, 3154, 55, 59); Vasiliu Gh. (3113, 72, 73); Vasiliu I. (2891, 3044, 67, 73, 97, 109, 21, 25, 39); Vercescu P. (711); Weiss L. (2895, 3154, 78); Weiss S. (3166, 74, N, P); Vlădea I. (3167).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1948, 2377, 83, 421, 552, 85, 623, 61, 82, 89, 773, 835, 79, 910, 20, 91, 3019, 46, 53, 62, 83, 90, 122, 26, 40, 46, 47, 48, 49, 56, 60, 62, și 70 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

28 VOLUME

Colecțiunea întreagă Lei 1500,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 70 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI și XXV, care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie*. (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

2. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. N. Abramescu, *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăugită*, 1921. (Epuizată).

4. A. G. Ioachimescu și G. Țițeica, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. Tr. Lalescu, *Tratat de Geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăugită*, 1923 Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice Lei 20,—

7. Gh. Lazăr, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) Lei 5,—

8. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăugită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme Lei 60,—

9. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, *Vocabular Matematic* Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăoga taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul*. Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septembrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimite D-lui: I. D. Teodor, Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la casierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București.



*Prin Asociațiunea pentru
Cultura și literatură poporului român*

Sibiu

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXIX.

NUMĂRUL 11. — IULIE 1924

SUMARUL

1. Cursuri de matematici la Paris, în anul școlar 1922—1923 *P. Sergescu.*
2. Ecuațiile traectoriei unui proiectil în aer . *Căpitan I. Linteș.*
3. Note Matematice: 69—76.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 112.
7. Probleme rezolvate: 2600, 3044, 3101, 3125, 3146, 3154, 3166.
8. Exerciții: 105—109.
9. Probleme propuse: 3191—3200.



ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET

1924

SPRE ȘTIINȚA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXIX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politehnică din București, **Tr. Lalescu**, Doctor în Matematici, Profesor Universitar și **I. D. Teodor**, Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Școala Politehnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui **GEORGE BORNEANU**, Inginer, Directorul Fabricilor de chibrituri și timbre, București.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor redița în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela D-l Cassier **I. D. Teodor**, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poștă.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evita confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

În vederea sporirii taxelor poștale, corespondenții pot trimite de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsa spații albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecință.

Nu se admite însă a se trata pe aceeași foale mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, creațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebuie să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 56, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 53, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 61, 95, 3005, 13, 19, 42, 45, 55, 60, 69, 75, 89, 90, 96, 107, 12, 14, 27, 29, 31, 34, 40, 41, 48, 50, 60, 61, 63, 64, 65, 69, 71, 75, 76, 77, 79, 80, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 200.

CURSURI DE MATEMATICI LA PARIS, IN ANUL ȘCOLAR 1922 — 1923.

Învățământul matematic francez a suferit o pierdere grea în vara anului 1922 prin moartea lui P. BOUTROUX, profesor de *Istoria matematicei* la *Collège de France*. Deși încă tânăr, BOUTROUX se făcuse cunoscut prin cercetări însemnate asupra integralelor ecuațiilor diferențiale lineare și, mai ales, prin studii de istoria matematicei. Odată cu moartea sa, catedra dela *Collège de France* a fost desființată, ceea ce e o pagubă foarte mare, cu atât mai mult cu cât nu se găsește nimeni specializat în acest domeniu, fundamental pentru înțelegerea sensului profund al matematicei și pentru predarea ei, în condițiuni bune, în învățământul științific. Catedra de Istoria Matematicei a durat timp de doi ani și dispare înainte de a fi început să dea roade.

La *Sorbona*, cursurile fundamentale au fost făcute de D-I E. GOURSAT, calculul diferențial și integral, cu seminarii sub conducerea D-lui G. JULIA. Acest tânăr mare matematician (n'are încă 35 ani), invalid de războiu, a fost numit, în anul 1923, *profesor* la catedra de *matematici generale*. Dar cursul de matematici generale îl face D-I DENJOY, D-lui JULIA rămânându-i numai sarcina seminarelor de Analiză. Cursul de *Mecanică rațională* (statică și dinamică) a fost predat, în admirabile lecțiuni, clare, precise și intuitive, de D-I P. MONTEL, care e unul din cei mai buni pedagogi dintre profesorii de azi. Cinematica a făcut-o D-I J. DRACH, care a tratat și aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal. Seminariile de mecanică au fost conduse de D-I E. CAHEN, iar cele de geometrie de D-I THYBAUD. D-I ANDOYER a predat *Astronomia*.

În semestrul I (1 Noembrie — 1 Martie) au făcut cursuri speciale, D-nii: CL. GUICHARD (Geometria superioară), E. BOREL (Fizica matematică) și E. VESSIOT (Teoria grupurilor de substituțiuni); iar în semestrul II (1 Martie — 15 Iunie) D-nii: E. PICARD (Analiza superioară) și E. CARTAN (Mecanica analitică). De asemenea, câțiva profesori universitari străini, invitați la Sorbona, au expus anume subiecte din cercetările contemporane matematice, D-nii: VALLÉE-POUSSIN, dela universitatea din Louvain (Belgia), SERGE BERNSTEIN, dela universitatea din Karkov (Rusia), unde profesează și acum în

timpul bolșevismului, și D-I GOMES TEIXEIRA, rector al universității din Porto (Portugalia).

Subiectul ales de D-I GUICHARD a fost: *Rețelele O asociate în spațiul cu n dimensiuni*. Punctul $x_1, x_2, \dots, x_n$ descrie o rețea, dacă toate coordonatele verifică o aceeași ecuație a lui LAPLACE. Rețelele, ale căror coordonate verifică aceeași ecuație a lui LAPLACE, se numesc *rețele asociate*. Studiul rețelilor asociate se reduce la studiul grupelor de integrale ale unei aceleiași ecuații a lui LAPLACE. Congruența conjugată rețelei. Legea paralelismului și aceea a ortogonalității elementelor. Se verifică ușor că $\sum x_j^2 = 0$, verifică ecuația la care satisfac coordonatele x_j . Insemnând, în mod prescurtat, cu ξ_j și cu η_j parametrii directori ai curbelor $v = \text{const.}$ și $u = \text{const.}$, o rețea O e definită prin relațiile $\sum \xi_j^2 = \sum \eta_j^2 = 1$ și $\sum \xi_j^2 \eta_j = 0$. În acest caz, câtimile ξ și η sunt primele două rânduri ale unui determinant al unei substituții ortogonale. Rotațiile acestui determinant. O rețea se numește pO , dacă se pot găsi $2(p-1)$ câtimi $X_1 \dots X_{p-1}, Y_1 \dots Y_{p-1}$, așa în cât în spațiul $n + p - 1$ dimensiuni, rețeaua definită de $\xi_1 \dots \xi_n, X_1 \dots X_{p-1}$ și $\eta_1 \dots \eta_n, Y_1 \dots Y_{p-1}$, este O. Congruențele armonice unei rețele O se numesc congruențe C. Studiul rețelilor pO și al congruențelor pC ; acesta e în legătură cu o ecuație a lui LAPLACE de formă particulară, numită ecuația lui MOUTARD. Transformările lui MOUTARD. Studiul congruențelor care sunt în două moduri C; studiul rețelilor care sunt O și $3O$. Asocieri singulare; sisteme singulare de ordine mai înalte. Multe din noțiunile întrebuințate în acest curs de D-I GUICHARD, au fost introduse în cursurile D-sale din anii precedenți.

D-I E. BOREL a expus *Teoria deformărilor continue* (teoria elasticității). Ca introducere, dânsul a studiat formele lineare și cuadratiche, variabile covariante și contravariante, transformări punctuale și tangențiale, tensori. Bine înțeles, studiul s'a mărginit la noțiunile absolut fundamentale. Caracterele esențiale ale deformăției geometrice (aplicația unei suprafețe pe alta) și ale deformăției fizice (elasticitatea). Observări filosofice în legătură cu diferitele probleme ale fizicii matematice moderne: unități de măsură, vecinătatea unui punct, omogenitatea spațiului, etc. Odată ce aceste elemente au fost explicate, D-I BOREL a trecut la expunerea clasică a teoriei elasticității, începând cu cele două teoreme ale lui CAUCHY și ipoteza lui MOSKOWICZ.

Până în 1920, Sorbona avea o catedră de *Teoria funcțiilor*, pe care o deținea d-l BOREL ; când dânsul a trecut la catedra de fizică matematică, aceea de teoria funcțiilor a fost suprimată și înlocuită cu una de fizică, ceea ce reprezintă o pierdere a învățământului matematic. Această pierdere s'a reparat în cursul anului 1922—23. În adevăr, D-l E. VESSIOT, subdirectorul Școalei Normale Superioare, care avea un curs de Calcul Infinitesimal acolo, a fost însărcinat cu un curs nou de *Teoria grupurilor și aplicații la calculul infinitesimal*. Subiectul expus de D-l VESSIOT la Sorbona în 1922—23, a fost : *Aplicațiile teoriei grupelor la studiul ecuațiilor diferențiale*. D-l VESSIOT e un specialist recunoscut în teoria grupelor și toți matematicianii așteaptă de ani de zile, cu nerăbdare, publicarea lecțiunilor sale asupra grupelor de substituțiuni, care conțin puncte de vedere cu totul noi și interesante. Cursul actual aduce iarăși o mulțime de contribuțiuni originale și inedite ; câte odată se întâmplă chiar ca lecțiile să fie greu de urmărit, din cauza abundenței de rezultate și a caracterului lor abstract. Printre chestiunile principale, care au fost studiate, cităm : Studiul complet al grupelor din plan și legătura lor cu geometria afină și cea proiectivă ; subgrupul proiectiv, grupul deplasărilor, isomorfism. Transformările Cremona în spațiu, transformări cu n variabile. Invarianți. Definirea grupelor prin ecuații funcționale ; transivitate și intransivitate. Grupele parametrice ale unui grup dat ; proprietățile lor. Transformări infinitesimale ale unui grup. Sisteme de ecuațiuni ale lui PFAFF complet integrabile, metoda de integrare a lui MAYER. Integrale prime. Aplicația grupelor la aceste sisteme. Grupul lui LIE cu unul și cu mai mulți parametri. Parametrii canonici. Imprejurările nu mi-au îngăduit să audiez ultima parte a cursului.

D-l E. CARTAN face totdeauna unul din cursurile cele mai atrăgătoare ; dânsul e un entuziast în expunerea subiectului pe care-l iubește. De altfel, materia e în legătură cu cele mai noi preocupări ale științei, iar lecțiunile sale sunt contribuțiuni esențiale la progresul studiului chestiunii ce tratează. Anul acesta, a vorbit despre *Geometria spațiilor curbe și aplicații la teoriile gravitațiunii*. Cu deosebire interesantă a fost analiza ipotezelor implicite, care se găsesc la baza întregii mecanice.

Teoriile gravitației depind în mod esențial de felul cum definim punctul material și acțiunea mediului asupra punctului material.

De pildă, în toate teoriile actuale se admite că acțiunea asupra unui punct material se reduce la o rezultantă. Cât de mult s'ar schimba rezultatele dacă am admite și existența unui cuplu, care ar fi aplicat punctului material! Cursul D-lui CARTAN se tipărește în volumul pe anul 1923 al revistei: *Annales de l'école normale supérieure*. În expunerea sa, D-l CARTAN întrebuințează simboalele concise ale *calculului exterior*, pe care l'a definit în anii precedenți. Printre capitolele tratate, însemnăm: Ecuatiile fundamentale ale dinamicei. Echipolență. Echipolența infinit vecină. Legile gravitației: 1^o) Câmpul gravitației derivă din un potențial; 2^o) Avem formula lui POISSON. Legile lui NEWTON. Inmulțirea și derivarea exterioară. Spațiul-timp; masa, presiunea. Starea elementară a materiei e un vector: *masă-cantitate de mișcare* (ale cărui componente conțin integrale triple, printre care presiunile). Legea simetriei și legea conservăției impulsiei de univers. Considerând un mediu continuu și un element de materie, impulsunile de univers se reduc la un vector G . Cunoașterea lui G permite scrierea ecuațiilor dinamicei în orice sistem de coordonate. Echipolența generală. Principiul relativității restrânse: în raport cu un sistem galilean de referință, lumina se propagă cu aceeași viteză în toate direcțiile. Consecințe. Există un număr atașat vectorului de univers și care nu depinde de sistemul de referință, acest invariant *caracterizează* punctul în teoria relativității restrânse. Aplicația, în această teorie, a principiului inerției, teorema forței vii, acțiunea elementară. Generalizări posibile. Spațiu afin. Deplasare afină, descompunerea ei în o translație și o rotație. Studiul varietăților cu conexiune metrică; conservarea curburei și a torsiunei. Paralelism; metoda lui LEVI-CIVITE. Curbură de rotație. Invarianti integrali atașați la o varietate. Spațiile lui RIEMANN (cu conexiune euclidiană și cu torsiune nulă). Tensori. Legile newtoniene și einsteiniene ale gravitației. Gravitația einsteiniană.

D-l E. PICARD s'a ocupat, în lecțiunile sale neîntrecute, de câteva *ecuațiuni funcționale ale fizicei matematice*. E teoria devenită clasică, grație cercetărilor sale, a integrării ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale — cu condiții la limită date — prin teoria ecuațiilor integrale. Exemplele alese în anul acesta, se reduceau la ecuații integrale cu sâmburi simetrici; iar trecerea dela ecuații diferențiale la ecuații integrale, s'a făcut prin introducerea

de funcțiuni analoage, ca funcția lui GREEN, corespunzătoare datelor problemei; prin întrebuițarea integralei lui POISSON; etc.

Dintre profesorii străini, D-l GOMES TEIXEIRA a făcut o lecție asupra istoriei matematicelor în Portugalia și mai ales a aplicațiilor la astronomie și navigație, pe care le-au făcut învățații portughezi și care au rămas multă vreme necunoscute, din cauză că au fost scrise în limba portugheză. D-l S. BERNSTEIN a tratat despre *Proprietăți extremale și aproximarea funcțiilor de o variabilă reală*. Dânsul a expus rezultatele interesante pe care le-a obținut, continuând lucrările lui TCEBICEFF. Chestiunile atinse au fost: Proprietăți extremale, pe un segment, ale funcțiunilor depinzând de un număr finit de parametri. Polinoamele oscilatoare. Proprietăți extremale pe axul real întreg. Cea mai bună aproximație a funcțiunilor având singularități algebrice, sau esențiale. D-l CH. DE LA VALLÉE POUSSIN a făcut patru lecții asupra funcțiilor *quasi-analitice*, lecții completate de alte opt făcute de D-l T. CARLEMAN, asupra aceluiași subiect, la *Collège de France*.

Cursurile de matematică dela *Collège de France*, au fost făcute de D-nii: H. LEBESGUE și J. HADAMARD, iar conferințele din fondul PECCOT le-a făcut D-l DELTEIL, care a vorbit despre *Probabilitățile geometrice*.

D-l H. LEBESGUE s'a ocupat de *Câteva chestiuni de Analysis Situs*. Această nouă ramură a matematicii, prezintă unele greutateți, căci are de scop să ne desvețe de *intuiția geometrică*, pentru a reduce totul la *raționament*. Între problemele cele mai însemnate de Analysis Situs se găsesc: Problema lui EULER relativă la insulele și podurile din Koenigsberg, Problema constelațiilor, Problema suprafețelor lui RIEMANN pentru funcțiunile algebrice, problema uniformizării funcțiilor algebrice, problema existenței de soluții la anume ecuațiuni. Chestiunea, care a fost cel mai mult dezvoltată în acest an, a fost stabilirea teoremei lui EULER asupra numărului vârfurilor, fețelor și muchiilor poliedrelor. Foarte interesantă și instructivă a fost expunerea istorică a demonstrațiilor date, arătând erorile făcute.

D-l J. HADAMARD a vorbit despre: Primii ani ai activității matematică a lui H. POINCARÉ. Dânsul a continuat și anul acesta interesantele ședințe ale Seminarului de matematică. Niciunul din Românii aflători în Paris n'a luat parte activă la Seminar în acest an.

Pentru a încheia, trebuie să menționez un curs-anexă de matematici la *Collège de France* al D-lui LE ROY. Succesor al D-lui H. BERGSON la catedra de filosofie, D-l LE ROY își propune să expună o *teorie a cunoștinței*, bazată pe noțiunile fundamentale ale matematicilor. În acest scop, dânsul va expune, în câțiva ani consecutivi, elementele analizei matematice. Pentru un matematician, lecțiunile D-lui LE ROY sunt elementare, totuși ele au marele merit de a pune în evidență structura matematicii. Acum, când catedra lui P. BOUTROUX a fost suprimată, cursul D-lui LE ROY se impune ca o necesitate.

(Paris, 24 Dec. 1923).

P. SERGESCU.

ECUAȚIILE TRAECTORIEI UNUI PROECTIL IN AER

Balistica Exterioară nu este altceva decât studiul problemei mișcării unui proiectil în aer, care este un caz particular al problemei *fluidodinamice*, al cărui enunț este:

„Să se studieze mișcările unui corp greu într'un mediu (fluid) rezistent“.

Ecuatiile mișcării proiectilului în aer s'au stabilit în modul următor :

Fie M poziția unui proiectil pe traectorie în momentul t , R rezistența aerului și P greutatea proiectilului. Fie deasemenea θ înclinarea tangentei la traectorie în punctul M , atunci ecuațiile diferențiale ale mișcării vor fi :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -R \cos \theta \quad \text{pe axa } Ox$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -P - R \sin \theta \quad \text{» » } Oy.$$

Ținând însă seama că :

$$\gamma = R/m \quad \text{și} \quad g = P/m,$$

m fiind *massa* proiectilului și γ accelerația rezistenței aerului, avem :

$$1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma \cos \theta$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \gamma \sin \theta$$

Deasemenea dacă V este viteza tangențială a proiectilului în punctul M , atunci :

$$2) \quad dx/dt = V \cos \theta$$

$$dy/dt = -V \sin \theta$$

Din 1) și 2) se deduce :

$$3) \quad d(V \cos \theta)/dt = -\gamma \cos \theta$$

$$d(V \sin \theta)/dt = -g - \gamma \sin \theta$$

Ecuatiile 2) și 3) — prin simple transformări — se mai pot scrie :

$$dx = -\frac{V^2}{g} d\theta$$

$$dy = -\frac{V^2}{g} \operatorname{tg} \theta d\theta$$

4)

$$dt = -\frac{V}{g \cos \theta} d\theta$$

$$\frac{d(V \cos \theta)}{d\theta} = \frac{\gamma}{g} V.$$

Din care ecuațiuni, prin integrare, se pot studia mișcările proiectilului în aer, adică problema *Balisticei Exterioare* va fi studiată complet. Integrarea însă nu se poate face exact matematic, deoarece nu se cunoaște în mod riguros rezistența aerului. Experiențe îndelungate au ajuns să găsiască :

$$\gamma = cF(V),$$

unde C este așa numitul *coeficient balistic*, care depinde de proiectil și de aer, iar $F(V)$ o funcție complicată, care depinde de viteza proiectilului, și care nu se cunoaște exact. Din această cauză, marii balisticieni (DIDION, SIACCI, ST. ROBERT, EULER, CHARBONNIER, etc.) au fost nevoiți să integreze ecuațiile în diferite ipoteze.

În cele ce urmează, îmi propui însă a da o altă formă acestor ecuații, stabilindu-le prin comparație cu ecuațiile din vid, adică atunci când $\gamma = 0$.

În adevăr, în vid ecuațiile traectoriei sunt :

$$\begin{aligned} x &= V_0 t \cos \alpha \\ 5) \quad y &= V_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \end{aligned}$$

unde V_0 este viteza inițială și α este unghiul de tragere, adică $\alpha = \theta_0$, înclinarea inițială.

În aer însă, x va fi mai mic din cauza rezistenței aerului. Fie deci x_1 cantitatea cu care se va micșora x , atunci :

$$d^2 x_1 / dt^2 = - \gamma \cos \theta,$$

de unde, prin integrare, avem :

$$dx_1 / dt = - \gamma t \cos \theta + C.$$

Dar, verificând constanta în câteva cazuri particulare, se găsește că $C = 0$. Integrând apoi a doua oară, avem :

$$x_1 = - \frac{1}{2} \gamma t^2 \cos \theta + C'.$$

Verificând și aici pentru câteva cazuri particulare, vedem că $C' = 0$, deci :

$$x_1 = - \frac{1}{2} \gamma t^2 \cos \theta$$

și, prin urmare, ecuația abscisei în aer va fi :

$$x = V_0 t^2 \cos \alpha - \frac{1}{2} \gamma t^2 \cos \theta.$$

Procedând în mod analog și pentru y , vom găsi :

$$y = V_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} \gamma t^2 \sin \theta - \frac{1}{2} g' t^2,$$

unde g' este o accelerație ceva mai mică decât g , din cauza rezistenței aerului, care se opune proiectilului în cădere și a cărei valoare este :

$$g' = g - \gamma',$$

iar

$$\gamma' = (\lambda \cos \theta + 1) \gamma,$$

din cauză că proiectilul, în cădere, opune o altă secțiune aerului (o secțiune mai mult laterală decât dreaptă); căci pentru γ , secțiunea opusă aerului de proiectil este egală cu $\frac{1}{4} \pi a^2$, unde a este calibrul proiectilului.

Cu aceasta, conchidem dar că ecuațiile traectoriei în aer sunt :

$$(6) \quad \begin{cases} x = V_0 t \cos \alpha - \frac{1}{2} \gamma t^2 \cos \theta \\ y = V_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} \gamma t^2 \sin \theta - \frac{1}{2} t^2 (g - \gamma'), \end{cases}$$

care ecuațiuni ne permit mai ușor să studiem proprietățile traectoriei, de oarece nu mai avem nevoie de diferitele integrări la care ne trimit ecuațiunile (4).

Aplicațiune. Pentru a fixa ideile mai bine asupra faptului că sistemul dat mai sus ne permite o mai ușoară rezolvare a diferitelor probleme de balistică, voi da o generalizare a problemei No. 3130 din G. M. No. 8, Anul XXIX, pag. 310.

Problema No. 3130 constituie o aplicație analitică destul de interesantă. Problema generală însă este mult mai interesantă din punct de vedere matematic și constituie astăzi una din chestiunile cele mai importante în aplicațiunile militare.

În cele ce urmează, îmi propun a studia problema în toată generalitatea ei, care se poate enunța astfel:

«Un aeroplan zboară orizontal¹⁾ la o altitudine de y metri cu o viteză de U m/sec.

Se întreabă care este distanța dela punctul de cădere al unei bombe lăsate de avion, până la verticala punctului de lansare?»

Ecuațiile unui proiectil, tras de o gură de foc dintr'un avion, sunt:

$$(7) \quad \begin{cases} x = V_0 t \cos \alpha - \frac{1}{2} \gamma t^2 \cos \theta \\ y = V_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} \gamma t^2 \sin \theta + \frac{1}{2} t^2 (g - \gamma'), \end{cases}$$

unde se ia semnul (+) în fața cantității $\frac{1}{2} t^2 (g - \gamma')$, de oarece bombele lansate de avion au traectoria sub axa absciselor.

În cazul problemei No. 3130, avem: $V_0 = U$ și $\alpha = 0^\circ$, căci bombele se lansează de avioane prin lăsare liberă, deci dându-le numai viteza de antrenare a avionului care merge orizontal și deci:

$$\begin{aligned} x &= Ut - \frac{1}{2} \gamma t^2 \cos \theta \\ y &= \frac{1}{2} t^2 (g - \gamma'). \end{aligned}$$

Pentru cazul bombelor însă, se consideră $\theta = 90^\circ$, adică se consideră că bombele cad vertical și atunci, ecuațiile de mai sus devin:

$$\begin{aligned} x &= Ut \\ y &= \frac{1}{2} t^2 (g - \gamma'), \end{aligned}$$

unde eliminând pe t , obținem:

$$(8) \quad x^2 = y \frac{2U^2}{g - \gamma'}.$$

1) Avioanele de bombardament zboară totdeauna aproape orizontal, aceasta din cauza încărcăturii cu bombe, care le fac improprie acrobațiilor. De altfel, prin construcție, avioanele de bombardament sunt mai greoaie și mai puțin suple.

Cum $\gamma' = \gamma (\lambda \cos \theta + 1)$ și cum $\theta = 90^\circ$, avem: $\gamma' = \gamma$.
Din **balistica exterioră**, se mai știe că:

$$(9) \quad \gamma = cF(V),$$

unde c este un coeficient care depinde de bombă (se numește *coeficient balistic*), adică de: mărime, formă și greutate și de densitatea aerului. Formula analitică a acestui coeficient este:

$$c = a^2 \Delta i / p,$$

unde a este diametrul bombei (calibrul), Δ greutatea metrului cub de aer, i un coeficient care depinde de forma bombei și a cărei valoare este aproximativ $\sin \delta$, unde δ este semi-unghiul ogival al vârfului bombei, p este greutatea bombei în kg.

Funcțiunea $F(V)$ este o funcțiune, pe care o determină numai experiența și ale cărei valori numerice în raport cu V sunt consemnate în așa zisele **table balistice**. În cazul problemei de față, V este viteza de sosire a bombei în punctul de cădere, adică:

$$(10) \quad V = \sqrt{2(g - \gamma)y}.$$

Pentru a calcula valorile lui $F(V)$ exact, se procedează prin ameliorări, adică se calculează mai întâi pentru:

$$V' = \sqrt{2gy}.$$

Se înlocuiește apoi această valoare în (9) și obținem o valoare oarecare pentru γ , pe care o înlocuim în (10) și cu care se obține o altă valoare pentru $F(V)$ -- ceva mai aproape de exact. Procedând astfel de mai multe ori (de trei-patru ori), se obține o exactitate suficientă pentru cazul problemei.

În cazul când $U = 35$ m/sec., $y = 1000$ m. (datele problemei No. 3130) și dacă luăm:

$$a = 0,2 \text{ m.}, \quad i = 0,01, \quad \Delta = 1,208 \text{ kg.} \quad \text{și} \quad p = 20 \text{ kg.},$$

(datele unui bombe aeriene), atunci pentru prima aproximație avem: $c = 0,001208$ și $F(V)$ unde $V = \sqrt{2gy}$ este 2458 (vezi **Balistica exterioră** de CĂPITAN I. LINTES pag. 21), deci: $\gamma = 2,97$.

Pentru a doua aproximație, avem:

$$F[\sqrt{2(g - 2,97)y}] = F(117) = 1515,$$

prin urmare:

$$\gamma = 2,73.$$

În mod analog, pentru a treia aproximație, avem :

$$\gamma = 2,6.$$

Oprindu-ne aci, avem :

$$x = 425 \text{ m.}$$

CĂPITAN I. LINTES.

NOTE MATEMATICE.

69. *Asupra unei sume.* În „G. M.” XXIX No. 5 D-I M.
FROM calculează suma :

$$S_1 = m + mn + mmn + mmmn + \dots,$$

unde m și n sunt cifre, suma având p termeni.

În cele ce urmează, voi calcula suma :

$$S = m + mn + mnn + mn nn + \dots,$$

unde m și n sunt cifre, suma având p termeni.

$$S = n(1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + \dots) + (m - n)(1 + 10 + \dots + 10^p)$$

$$S = n\left(\frac{10^p - 1}{9} + \frac{10^{p-1} - 1}{9} + \frac{10^{p-2} - 1}{9} + \dots + 1\right) + (m - n)\frac{10^p - 1}{9}$$

$$S = \frac{n}{9}\left(\frac{10^{p+1} - 10}{9} - p\right) + (m - n)\frac{10^p - 1}{9}$$

$$S = \frac{10n}{9^2}(10^p - 1) - \frac{np}{9} + (m - n)\frac{10^p - 1}{9^2} \cdot 9$$

$$S = \frac{10^p - 1}{81}[10n + 9m - 9n] - \frac{np}{9} = \frac{10^p - 1}{81}(9m + n) - \frac{np}{9}$$

Aplicațiune. Să facem $p = 3$, $n = 4$, $m = 3$,

$$S = 3 + 34 + 344 = 381.$$

Înlocuind în formulă, obținem $S = 381$.

CORNELIU C. IONESCU.

Cl. VIII R. Cantemir-Vodă.

70. *Asupra problemei 3142.* Acestei probleme i se poate da o soluție independentă de orice întrebuintare a logaritmiilor și fără necesitatea ridicării la puterile 24, 25, 26.

În adevăr, observăm că :

$$aa\ bb\ cc\ aa = 11 \times a0b0c0a = 2^n + 1$$

$$(1) \quad \therefore \quad n = 5(2k + 1).$$

Pe de altă parte :

$$10^7 < 2^n < 10$$

$$5^7 < 2^{n-7} < 2 \cdot 5^8$$

$$2^{14} < 2^{n-7} < 2 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^2$$

$$2^{14} < 2^{n-7} < 2 \cdot 2^7 \cdot 2^7 \cdot 2^5$$

$$2^{14} < 2^{n-7} < 2^{20}$$

$$21 < n < 27.$$

Această neegalitate, comparată cu (1), ne dă direct :

$$n = 25.$$

Rezultă foarte ușor că (a se vedeă și problema 1907) 2^{25} se termină cu 32, deci $a = 3$.

Vom avea deci :

$$33\ bb\ cc\ 32 = 2^{25}$$

$$\therefore \quad 33\ bb\ cc \times 10^3 = 2^5 (2^{20} - 1)$$

$$2^2 \times 5^2 \times 11 \times 30b0c = 2^5 (2^{10} + 1) (2^5 + 1) 31$$

$$\therefore \quad 30b0c = 2^3 \times 31 \times 3 \times 41.$$

Divizibilitatea cu 8 a lui $30b0c$, cere $c = 4$, $b = 1, 3, 5, 7, 9$, $c = 8$, $b = 0, 2, 4, 6, 8$.

Divizibilitatea aceluiași număr cu 3, cere $b + c = 3, 9, 12$. Aceste condiții împreună, dau

$$c = 4, \ b = 5 \ ; \ c = 8, \ b = 4$$

și atunci

$$30504 = 8 \times 3 \times 31 \times 41$$

$$30408 = 8 \times 3 \times 7 \times 181.$$

Singura soluție este deci numărul :

$$33554433 = 2^{25} + 1.$$

Această soluție, deși nu e mai scurtă ca cea dată la locul convenit, merită a fi menționată, căci pune în evidență metode *pur aritmetice*, cu care poate fi rezolvită o problemă de *Aritmetică*.

M. GH.

71. *O generalizare a șirului lui FIBONACCI*. Rezultatele stabilite sub acest titlu în Nota 45, se găsesc, împreună cu multe altele, în articolul «Despre seriile recurente», pe care l'am publicat anul trecut în «R. M. T.»

M. GHERMĂNESCU.

72. *Fracții sau frângeri*. În nota 62 din *Gazeta Matematică*, vol. XXVIII, pag. 329, am arătat că I. GHICA întrebuișă în scrierile lui cuvântul *frângeri* cu înțelesul de fracții. La finele notei, întrebam dacă acest cuvânt a fost întrebuișat vreo dată în programele oficiale.

La această întrebare, îmi răspunde d-l M. I. STAMATIU, absolvent al Liceului din Pitești. D-sa arată că în cartea Maiorului G. MANU, intitulată «*Arithmetica și Algebra cullésă și prelucrată pentru școlele publice din România*», publicată în 1863, se găsește la pagina 31: «*Câtul din doue numere reale, al cărui deîmpărțit nu este nici o potrivă cu împărțitorul, nici un multiplu al lui, se numesce o frângere, sau un numer fracționar ori frângerosu și spre deosebire de frângeri algebrice, care însemnează orice împărțire nerealisabilă, o frângere vulgară seu ordinară...*».

În această carte, pe care d-l M. STAMATIU a avut bunăvoința să mi-o trimită și pentru care îi mulțumesc, se găsește întrebuișat *îngrămădire* în loc de aranjamente, *împreunare* în loc de ecuație.

Voiu reveni asupra cărții Maiorului G. MANU.

Despre cuvântul *frângeri* adaug că un student dela Școala Politehnică din Timișoara, care și-a făcut studiile la Slatina, a întrebuișat de câteva ori în cursul unei ședințe expresia: «dacă frângem pe a în b ori», în loc de dacă împărțim pe a prin b . El mi-a spus că expresia a frânge se întrebuișează des în județul Olt în înțelesul de a împărți. Dau afirmația sa ca titlu de informație celor ce se interesează de chestiuni de această natură.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

73. *Asupra problemei 22, Cap. IX. Culegere, Algebra.* În acea problemă se cere să se arate, că dacă $n \geq 3$, avem

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

Iată încă o soluție a acestei probleme :

Funcțiunea $y = L n^{\frac{1}{n}}$ este descrescătoare, când $n \geq 3$, căci derivata ei $y' = \frac{1 - L n}{n^2}$ este negativă, când $n > e$. Urmează atunci,

că și funcția $n^{\frac{1}{n}}$ e descrescătoare când $n \geq 3$, adică :

$$n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}},$$

sau că

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

S'ar putea trata la fel și alte inegalități.

Din neegalitatea de mai sus, se mai poate deduce o altă neegalitate interesantă.

Din $n+1 > n$, urmează, ținând seamă de cea precedentă, că

$$(n+1)^{n^{n+1}} > n^{(n+1)^n}.$$

LEON WEISS.

Cl. VII R. „V. Alexandri“, Galați.

74. *Generalizarea unei probleme de Algebră.* Problema cunoscută *) : Dacă ecuațiile :

$$x^4 + px^2 + qx + 1 = 0 \quad \text{și} \quad x^4 + p'x^2 + qx + 1 = 0,$$

au o rădăcină dublă comună, ele au toate rădăcinile comune, se poate generaliza astfel : Dacă ecuațiile :

$$F(x) \equiv x^n + A_p x^{n-p} + A_{p+1} x^{n-p-1} + \dots + A_{n-1} x + A = 0, \quad (1)$$

$$f(x) \equiv x^n + A'_p x^{n-p} + A'_{p+1} x^{n-p-1} + \dots + A'_{n-1} x + A = 0, \quad (2)$$

au o rădăcină comună de ordinul $(n-p)$ de multiplicitate, ele au toate rădăcinile comune.

Fie α rădăcina comună ; scăzând ecuația (2) din (1), trebuie să avem :

*) Culegere de Probleme de Algebră, de A. G. IOACHIMESCU, XXXIX, 10.

$$(A_p - A'_p)x^{n-p} + (A_{p+1} - A'_{p+1})x^{n-p-1} + \dots + (A_{n-1} - A'_{n-1})x \equiv \\ \equiv (A_p - A'_p)(x - \alpha)^{n-p}. \quad (3)$$

Membrul întâiu al identității (3) anulându-se pentru $x=0$, rezultă sau: $\alpha=0$, ceea ce nu se poate, A fiind diferit de zero; sau: $A_p - A'_p = 0$. Avem însă:

$$F(x) \equiv (x - \alpha)^{n-p} \varphi(x), \quad f(x) \equiv (x - \alpha)^{n-p} \psi(x),$$

$$\therefore \quad \psi(x) - \varphi(x) = A_p - A'_p = 0,$$

$$\therefore \quad F(x) = f(x).$$

Făcând: $n=4$, $p=2$, $A=1$, suntem în cazul particular al problemei citate.

ALEXANDRU TAUBER.

Elev cl. VIII-a Lic. „Laurian”, Botoșani.

75. *Exercițiul 77* dela pag. 318 este greșit și metoda urmată este greșit aplicată, de oarece plecând dela o relație ce are loc într'un triunghi, se schimbă unghiurile triunghiului, fără a ține seamă că laturile și suprafața noului triunghi nu mai sunt laturile și suprafața triunghiului primitiv. Se ajunge astfel, în acest exercițiu la rezultate absurde de forma

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B + \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \cotg B + \cotg C,$$

plecând dela relația $2S = \frac{a^2}{\cotg B + \cotg C}$ din triunghiul ABC și înlocuind unghiurile A, B, C prin $90^\circ - \frac{1}{2}A$, $90^\circ - \frac{1}{2}B$, $90^\circ - \frac{1}{2}C$, fără a ține seamă care sunt laturile și suprafața noului triunghi.

Triunghiul $I_a I_b I_c$, care are ca vârfuri centrele cercurilor înscrise triunghiului ABC, are unghiurile sale egale cu $(90^\circ - \frac{1}{2}A)$, $(90^\circ - \frac{1}{2}B)$, $(90^\circ - \frac{1}{2}C)$. Laturile sale sunt, $4R \cos \frac{1}{2}A$, $4R \cos \frac{1}{2}B$, $4R \cos \frac{1}{2}C$, iar suprafața sa este

$$8R^2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$$

Dacă aplicăm triunghiului $I_a I_b I_c$ relațiunea din *Culegere de Probleme, Trigonometria*, XVIII, 398, de care se face întrebuintare în exercițiul 77, obținem relațiile:

$$\frac{\cos^2 \frac{1}{2}A}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}B + \operatorname{tg} \frac{1}{2}C} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}B}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}C + \operatorname{tg} \frac{1}{2}A} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}C}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}A + \operatorname{tg} \frac{1}{2}B} \\ = \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C = p/4R.$$

MIRCEA I. ADAM.
Constanța.

76. *Asupra unor produse trigonometrice.* În «Culegere de Probleme» Trig. XXV, pag. 416, se stabilește valoarea produsului :

$$\sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{3\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{3}{16}.$$

Imi propun să generalizez această chestiune.

Pentru aceasta, mă voiu servi de funcțiunea Γ , a cărei definiție se știe că este: $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$.

Între $\Gamma(a)$ și $\Gamma(1-a)$ avem relația :

$$(1) \quad \Gamma(a) \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a \pi}.$$

Pe de altă parte, avem și relația următoare :

$$(2) \quad \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{2}{m}\right) \dots \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{m-2}{2}}}{\sqrt{m}} \quad (\text{FRENET, Calcul Infinitesimal, pag. 259}).$$

Dar observ că în (2) factorii echidistanți de extremi satisfac tocmai relației (1).

Deci în locul lor pot pune $\pi/\sin \pi a$.

Procedând astfel pentru toți factorii, și considerând pentru simplificare cazul când m este impar sau par, obțin următoarele relații :

$$(3) \quad \sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \sin \frac{3\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

și

$$(4) \quad \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \sin \frac{3\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},$$

care generalizează problema citată mai sus. În adevăr, făcând în (3), $n=4$, am relația din «Culegere». Înlocuind mai sus $\sin \alpha = \cos(\pi/2 - \alpha)$ putem obține relații analoage și pentru produse de cōsinuri.

NICOLAE CIORĂNESCU.
Student an. I matematici.

CHESTIUNI DE EXAMEN

FACULTATEA DE ȘTIINȚE, CLUJ.

(Sesiunea iunie 1924)

ALGEBRA SUPERIOARĂ.

A. PROBA TEORETICĂ.

(Timpul acordat : 3 ore).

1. Să se elimine y între ecuațiile :

$$y^4 - 1 = 0$$

$$cy^3 + by^2 + ay + x = 0$$

și să se deducă valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ c & x & a & b \\ b & c & x & a \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$$

ordonat după puterile lui x și descompus în factori.

2. Dându-se ecuația

$$x^3 + px + q = 0,$$

să se formeze ecuația care are ca rădăcini produsele rădăcinilor ecuației date, luate 2 câte 2. Să se arate că cele două ecuații au aceiași condiție de realitate a rădăcinilor. Să se explice rezultatul.

3. Care este natura seriei, al cărei termen general este :

$$\sqrt[n]{n} - 1 - \frac{\text{Ln}}{n},$$

L însemnând logaritmul cu baza e .

B. PROBA PRACTICĂ.

(Timpul acordat : 2 ore).

Intr'o sferă de rază R să se înscrie cilindrul de volum dat $2\pi l^3$.

Să se discute, și în cazul particular $R = 2$, $l = 1$, să se calculeze înălțimea cea mai mică a cilindrului. Aproximația va fi mai mică decât 0,001.

ȘCOALA DE TOPOMETRIE DIN BUCUREȘTI

PROBA SCRISĂ DIN ANUL II.

Aprilie 1924

Geodezie.

Cunoscându-se, prin observațiuni directe, longitudinea l , latitudinea geografică φ a extremității A a unei laturi AB, precum și lungimea p în metri și direcțiunea z a aceleiași laturi, să se stabilească formulele care ne dau longitudinea l' și latitudinea φ' a celeilalte extremități B.

Se vor stabili formulele întâiu în ipoteza că pământul este sferic și apoi se vor corecta formulele găsite, ținând seamă de forma elipsoidală a pământului.

Aplicațiune: $l = 1^{\circ} 44' 23,5''$ Est Greenwich

$\varphi = 44^{\circ} 24' 51'', 3$ Nord

$z = 43^{\circ} 49' 30'', 1$

$p = 39.251, 20$ metri

$R_A = 6.370996$ metri

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{6.378.200^2 - 6.356.818^2}{6.378.200^2}.$$

BIBLIOGRAFIE.

Revista de Matematicas y fisicas elementales. Anul V. No. 12. Aprilie 1924. Buenos-Aires. Cinci ani ai revistei, de B. IG. BAIDAFF. „Societatea matematică argentină”, de B. IG. BAIDAFF.

Revista Științifică „V. Adamachi”. Vol. X, No. 3. Maiu 1924. Iași. Necesitatea mecanicii tehnice, de I. IONESCU. Ecuatiile hidrodinamice, de C. G. BEDREAG.

Journal de mathématique élémentaires, par H. VUIBERT. Anul 48. No. 16 Maiu 1924 și No. 17 Iunie 1924. Paris.

Revista matematică din Timișoara. Anul IV. No. 4. Iunie 1924. Timișoara. Câteva formule de însumare, de V. ALACI.

Foaia matematică. Anul I. No. 6. Iunie 1924. Chișinău. Asupra unei teoreme a lui CESARO, de B. M. BARBĂLATT.

Jurnal matematic. Vol. I No. 11. Iunie 1924. Arad. Asupra seriilor divergente, de T. POPOVICIU. Asupra curbelor de clasa a treia analagmatice în coordonate tangențiale trilineare, de T. POPOVICIU. Determinanții pseudeosimetrice, de T. POPOVICIU.

CLARO CORNELIO DASSEN. *Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina. IV. Las matematicas en la Argentina.* Buenos-Aires 1924.

FRANÇOIS SCHACHERL. *Sur l'influence de la pression sur la réfraction de l'hydrogène.* 1923. Brno.

EDOUARD CECIL. *Etude analytique de l'élément linéaire projectif d'une surface.* 1924. Brno.

O. BORUVKA. Contribuțiuni la teoria unor funcțiuni transcendente ale calculului integral. (În limba cehă, cu un rezumat în limba franceză). 1924. Brno.

L. SEIFERT. Asupra unei probleme analoage cu a lui Weddle. Rezultate noi asupra unor suprafețe noi de gradul al treilea și al patrulea. (În limba cehă, cu un rezumat în limba franceză). 1924. Brno.

G. FUBINI. Cercetări asupra teoriei congruențelor și complexelor de drepte. (În limba cehă, cu un rezumat în limba franceză). 1924. Brno.

M. LERCH. Studii asupra reziduurilor patratice, după un modul prim. Relațiuni noi cu teoria formelor patratice, având un determinant negativ și prim. (În limba cehă, cu un rezumat în limba franceză). 1923. Brno.

(Ultimele șase broșuri sunt extrase din Publicațiunile Facultății de științe ale Universității „Masaryk“ din Brno).

DAVID EMMANUEL. *Lecțiuni de teoria funcțiunilor.* Partea I. Curs profesat la Facultatea de Științe din București. Editura Casei Școalelor. București. Tipografia Cultura Națională.

C E R E R I.

112.* În scrierea lui DIMITRIE CANTEMIR, privitoare la sistemul religiei musulmane, sunt pasagii referitoare la matematici. Am dori ca un corespondent să rezume, într'un articol sau în o notă, acele pasagii.

I. IONESCU.

PROBLEME REZOLVATE.

PROBLEMA 2600. *Să se găsiască numerele întregi a și b, știind că suma cifrelor produsului ab este egală cu $a + b$.*

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Fie S suma cifrelor produsului ab , iar n și p numărul cifrelor numerelor a și b .

Pentru rezolvarea problemei, vom face următoarele observații.

1°. Suma cifrelor unui număr A este mai mică decât A .

2°. Niciunul din numerele a și b nu poate fi egal cu 1, căci dacă am avea $b = 1$, atunci produsul celor 2 numere ar fi a , iar suma lor $a + 1$. Suma cifrelor produsului a fiind, după 1°, mai mică decât a , nu va putea fi egală cu $a + 1$.

3°. Neegalitatea

$$(1) \quad A = 10^{n-1} + 10^{p-1} < 9(p+n) = B,$$

nu poate avea loc decât pentru $p+n$ egal cu 2, 3 sau 4. În adevăr, $p+n=2$,* dacă $n=1$ și $p=1$ deci

$$A = 2 < 18 = B.$$

$p+n=3$, dacă $n=1$ și $p=2$, deci

$$A = 11 < 27 = B,$$

$p+n=4$, dacă $n=1$ și $p=3$, sau $n=2$ și $p=2$, deci

$$A = 101 > 36 = B,$$

sau

$$A = 20 < 36 = B.$$

Cu acestea, se poate trece imediat la rezolvarea problemei. Din

$$(2) \quad 10^{n-1} < a < 10^n \quad \text{și} \quad 10^{p-1} < b < 10^p,$$

se deduce, prin înmulțire

$$10^{n+p-2} < ab < 10^{n+p},$$

ceea ce arată că ab poate avea $(n+p-1)$ sau $(n+p)$ cifre. Minimul și maximul lui S în aceste condițiuni, vor fi când vom avea respectiv

$$ab = 10^{n+p-2}, \quad \text{sau} \quad ab = 99\dots 9_{n+p},$$

care dă

$$(3) \quad 1 < S < 9(n+p).$$

Adunând neegalitățile (2), găsim

$$10^{n-1} + 10^{p-1} < a + b < 10^n + 10^p.$$

Cum, după enunț, S este egal cu $a + b$, urmează că trebuie să avem și

$$(4) \quad 10^{n-1} + 10^{p-1} < S < 10^n + 10^p.$$

Neegalitățile (3) și (4) nu pot avea loc, decât dacă avem

$$10^{n-1} + 10^{p-1} \geq 9(n + p),$$

ceea ce are loc, după 3^0 , pentru :

$$n = 1, 1, 2$$

$$p = 1, 2, 2.$$

Problema nu are deci soluții, decât printre numerele de 1 și 2 cifre. Vom considera 3 cazuri.

Cazul I. a și b sunt numere de câte o cifră, ambele diferite de 1. Avem

$$2 \leq a \leq 9, \quad 2 \leq b \leq 9 \quad \therefore \quad 4 \leq ab \leq 81.$$

S poate fi maximum 16 și minimum 4, deci putem avea cel mult

$$4 \leq a + b \leq 16,$$

dar dacă suma a 2 numere e maximum 16, produsul lor e maximum 64. Deci

$$4 \leq ab \leq 64.$$

În aceste condiții, maximum lui S este 14, deci

$$4 \leq S = a + b \leq 14.$$

De aci încolo, spiritul metodei este cunoscut și mergând din aproape în aproape, găsim următorul rezultat, pus sub formă de tabel :

Când	$4 \leq a + b \leq 14$	$4 \leq ab \leq 49$	deci	$4 \leq S \leq 13$
"	$4 \leq a + b \leq 13$	$4 \leq ab \leq 42$	"	$4 \leq S \leq 12$
"	$4 \leq a + b \leq 12$	$4 \leq ab \leq 36$	"	$4 \leq S \leq 11$
"	$4 \leq a + b \leq 11$	$4 \leq ab \leq 30$	"	$4 \leq S \leq 11$

Problema are deci soluții numai printre numerele a căror sumă este cuprinsă între 4 și 11. Descompunând aceste numere în sume de 2 părți mai mari ca 1, în toate felurile, avem :

$$\begin{aligned}
 4 &= 2 + 2 \\
 5 &= 2 + 3 \\
 6 &= 2 + 4 = 3 + 3 \\
 7 &= 2 + 5 = 3 + 4 \\
 8 &= 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 \\
 9 &= 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5 \\
 10 &= 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5 \\
 11 &= 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6.
 \end{aligned}$$

Din aceste descompuneri, se vede că răspund problemei numai numerele :

$$a=b=2 \quad \text{și} \quad a=3, \quad b=6.$$

Cazul II. a este de o cifră și b de 2 cifre. Ca în cazul I, avem

$$20 \leq ab \leq 891.$$

Maximul lui S este pentru $ab=889$, iar minimul lui $S=a+b$ este când

$$a=2 \quad \text{și} \quad b=10$$

deci

$$12 \leq S \leq 25.$$

Raționând ca la cazul I, construim următorul tabel :

Când	$12 \leq a+b \leq 25$	atunci	$12 \leq ab \leq 144$	deci	$12 \leq S \leq 18$
»	$12 \leq a+b \leq 18$	»	$12 \leq ab \leq 80$	»	$12 \leq S \leq 16$
»	$12 \leq a+b \leq 16$	»	$12 \leq ab \leq 60$	»	$12 \leq S \leq 14$
»	$12 \leq a+b \leq 14$	»	$12 \leq ab \leq 40$	»	$12 \leq S \leq 12.$

Deci $a+b=12$. Dar 12 se descompune în un singur fel în suma unui număr de o cifră, cu un număr de 2 cifre și anume :

$$12 = 2 + 10,$$

iar suma cifrelor lui 2×10 nu este 12. Deci, în cazul II, nu avem soluție.

Cazul III. a și b sunt de câte 2 cifre. Ca la I și II, avem

$$100 \leq ab \leq 9801 \quad \therefore \quad 20 \leq S \leq 34.$$

Când $20 \leq a+b \leq 34$, atunci $100 \leq ab \leq 288$, deci $20 \leq S \leq 19$ ceea ce este imposibil.

Problema are deci numai soluțiile:

$$a = b = 2,$$

$$a = 3 \text{ și } b = 6.$$

Notă. Au găsit cele 2 sisteme de soluțiuni, prin diferite încercări, d-nii: I. POPOVICIU (Lc. Moise Nicoară, Arad), N. GEORGESCU-ROEGEN (Lc. Militar, Mănăstirea Dealului) și N. CIORĂNESCU.

Soluțiunile d-lor nu sunt riguroase, ele încep prin următoarea afirmațiune „Se vede că a și b nu pot fi mai mari ca 10”. Unul încearcă să justifice această afirmațiune în felul următor „căci dacă a are 3 cifre, iar b are 2 cifre, ab are cel mult 5 cifre, suma cifrelor este cel mult 54, pe când $a + b$ este mai mare ca 100”. Această nu este un mod de a demonstra teoremele în matematică și corespondenții noștri trebuie să nu-l încerce, nici chiar când sunt începători, cum erau rezolvitorii citați mai sus, la data la care au trimis soluțiile d-lor.

G. B.

PROBLEMA 3044. Se dă un triunghi *automedian* ABC ($2a^2 = b^2 + c^2$) și fie K, D, D_1, D_2, D_3 punctul lui LEMOINE, reciprocul său și permutantele inverse ale lui D . Fie R punctul lui STEINER al triunghiului și R_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) permutantele directe și inverse ale lui R . Fie T_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) inversele punctelor R_i . Să se demonstreze că dreptele CK, BK, AD_1, CD_3, BD_2 trec respectiv prin punctele T_i ($i = 1, 2, \dots, 5$).

B. M. BARBĂLĂTT.

Soluție și generalizare dată de D-nul TIBERIU POPOVICIU (Arad).

Fie $K(x_1, y_1, z_1)$ un punct oarecare din planul unui triunghi ABC ; D, D_1, D_2, D_3 reciprocul lui K și permutantele inverse ale lui D . Fie apoi:

$$T_1[x_1(z_0 - x_0), y_1(x_0 - y_0), z_1(y_0 - z_0)]$$

$$T_2[x_1(x_0 - y_0), y_1(y_0 - z_0), z_1(z_0 - x_0)]$$

$$T_3[x_1(y_0 - z_0), y_1(x_0 - y_0), z_1(z_0 - x_0)]$$

$$T_4[x_1(x_0 - y_0), y_1(z_0 - x_0), z_1(y_0 - z_0)]$$

$$T_5[x_1(z_0 - x_0), y_1(y_0 - z_0), z_1(x_0 - y_0)]$$

cinci puncte în plan, x_0, y_0, z_0 fiind oarecare.

Ecuatiile dreptelor CK , BK , AD_1 , CD_3 , BD_2 , sunt respectiv
 $\alpha y_1 - \beta x_1 = 0$, $\alpha z_1 - \gamma x_1 = 0$, $\beta z_1 - \gamma y_1 = 0$, $\alpha y_1 - \beta x_1 = 0$,
 $\alpha z_1 - \gamma x_1 = 0$.

Aceste ecuații sunt evident verificate de punctele T_i , când avem

$$2x_0 = y_0 + z_0.$$

În acest caz deci, grupurile de puncte (C, K, T_1) ; (B, K, T_2) (A, D_1, T_3) ; (C, D_3, T_4) ; (B, D_2, T_5) sunt colineare, sau mai bine, observând că CK se confundă cu CD_3 și BK cu BD_2 , grupurile de puncte

(C, K, D_3, T_1, T_4) ; (B, K, D_2, T_2, T_5) ; (A, D_1, T_3) ,
sunt colineare.

Dacă acum considerăm cazul particular când

$$x_1 = x_0 = a^2 \quad , \quad y_1 = y_0 = b^2 \quad , \quad z_1 = z_0 = c^2,$$

punctul K este punctul lui LEMOINE, punctele T_i sunt inversele permutantelor punctului lui STEINER al triunghiului; iar între laturile triunghiului avem relația

$$2a^2 = b^2 + c^2.$$

Notă. Au rezolvat problema astfel cum a fost propusă, D-nii: EUGEN BALLAN, MIHAIL I. FOCȘENEANU, CONST. I. GEORGESCU, ION M. ȘERBĂNESCU, ADRIAN A. BUȘILĂ, LEON WEISS, VIRGIL GHÎȚESCU, G. MATEESCU, I. GOLDSTEIN, ION C. VĂSILIU, ALEX. NICULESCU, PAUL I. IONESCU, SOLOMON WEISS.

Coordonatele baricentrice ale diverselor puncte din enunțul problemei sunt :

$$\begin{aligned} & K(a^2, b^2, c^2) , D\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}\right) , D_1\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{b^2}\right) , \\ & D_2\left(\frac{1}{c^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^2}\right) , D_3\left(\frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{c^2}\right) , \\ & R\left(\frac{1}{b^2-c^2}, \frac{1}{c^2-a^2}, \frac{1}{a^2-b^2}\right) , R_1\left(\frac{1}{c^2-a^2}, \frac{1}{a^2-b^2}, \frac{1}{b^2-c^2}\right) , \\ & R_2\left(\frac{1}{a^2-b^2}, \frac{1}{b^2-c^2}, \frac{1}{c^2-a^2}\right) , R_3\left(\frac{1}{b^2-c^2}, \frac{1}{a^2-b^2}, \frac{1}{c^2-a^2}\right) , \\ & R_4\left(\frac{1}{a^2-b^2}, \frac{1}{c^2-a^2}, \frac{1}{b^2-c^2}\right) , R_5\left(\frac{1}{c^2-a^2}, \frac{1}{b^2-c^2}, \frac{1}{a^2-b^2}\right) , \end{aligned}$$

$$T_1 [a^2(c^2 - a^2), b^2(a^2 - b^2), c^2(b^2 - c^2)]$$

$$T_2 [a^2(a^2 - b^2), b^2(b^2 - c^2), c^2(c^2 - a^2)]$$

$$T_3 [a^2(b^2 - c^2), b^2(a^2 - b^2), c^2(c^2 - a^2)]$$

$$T_4 [a^2(a^2 - b^2), b^2(c^2 - a^2), c^2(b^2 - c^2)]$$

$$T_5 [a^2(c^2 - a^2), b^2(b^2 - c^2), c^2(a^2 - b^2)]$$

Observații. Figura se mai bucură de următoarele proprietăți:

1. Dreapta care unește punctul lui LONGCHAMPS cu mijlocul distanței dintre punctele lui BROCARD, și reciproca dreptei lui LEMOINE, se întretaie pe latura BC a triunghiului.

2. Fie K_a piciorul simedianei AK, B_m și C_m mijloacele laturilor CA, AB. Grupurile de puncte B, A, B_m , K_a și C, A, C_m , K_a sunt conciclice.

B. M. BARBĂLATT.

3. Fie S reciprocul punctului lui STEINER și S_1, S_2 permutantele sale directe. Grupurile de puncte (A, R, S), (B, R_1, S_1), (C, R_2, S_2) sunt colineare.

M. I. FOȘENEANU.

PROBLEMA 3101. Să se găsiască 3 numere întregi pozitive în progresie armonică, știind că suma lor este 39.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Soluție dată de d-nii: G. SIMIONESCU, M. PĂTROIANU, P. IONESCU, I. VASILIU (Lc. militar, Mănăstirea Dealului); I. COȘEREANU (Șc. Politehnică din Timișoara); P. KATZ (Șc. Politehnică din București); L. WEISS (Lc. V. Alexandri, Galați); V. COȘNIȚĂ (Lc. Codreanu, Bârlad); F. RABINOVICI (Lc. Laurian, Botoșani); I. TEODORESCU (Student, București).

Fie x, y, z numerele căutate. Conform enunțului, trebuie să avem

$$x + y + z = 39 \quad \text{și} \quad \frac{2}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

de unde se deduce

$$y + x = 39 - z \quad \text{și} \quad 2yx = z(39 - z),$$

deci y și x sunt rădăcinile ecuației

$$X^2 - (39 - z)X + \frac{z(39 - z)}{2} = 0$$

$$\therefore X = \frac{39 - z \pm \sqrt{3(39 - z)(13 - z)}}{2}.$$

Rezultă că, pentru ca X să fie întreg, trebuie ca $13-z$ să fie triplul unui patrat perfect, iar z să aibă cel mult valoarea 13 și cel puțin 1, căci el este întreg și pozitiv. Dând lui x cele 13 valori găsim

$z = \dots$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$3(39-z)(13-z)=1368$	1221	1080	945	906	693	576	465	360	261	168	81	0	

Din numerele șirului al doilea, numai 1221, 576,, 261 și 81 au terminațiunea unui patrat perfect, iar din acestea, numai 576 și 81 sunt patrurate perfecte.

Introduse în valoarea X , aceste valori ne dau următoarele 3 soluțiuni ale problemei :

$$x = 13 ; 18 ; 28.$$

$$y = 13 ; 9 ; 4.$$

$$z = 13 ; 12 ; 7.$$

Observațiuni. 1°. Au încercat să rezolve problema pe această cale, dar au găsit numai soluțiuni parțiale, după cum urmează: *a)* nu a găsit sistemul 13, 13, 13 d-l B. REINHORN; *b)* nu au găsit sistemul 12, 9, 18 d-nii: N. BOTEA, A. OPRAN, G. IONESCU-ZANE; *c)* au găsit numai sistemul 12, 9, 18, d-nii: G. MATEESCU, G. MIHOC; *d)* au găsit numai sistemul 7, 4, 28 d-nii: E. ȘTEFĂNESCU, S. MARIN, F. MARCUS, R. MIHĂILESCU, D. POPESCU, M. ADAM și I. SCHÄCHTER.

2°. D-l E. ȘTEFĂNESCU a încercat și problema generală, când suma celor 3 numere este un număr A , dar nu a rezolvat-o până la capăt.

3°. Intrebuintând rezultatele *eronate*, date de d-l I. RIZESCU în Nota matematică din *Gazeta Matematică* vol. XXVIII pagina 410, au găsit soluția parțială 7, 4, 28, d-nii: A. TAUBER, D. BLUMENFELD (Lc. Laurian, Botoșani); M. STAMATIU (Absolvent de liceu); B. BARBĂLATT (Lc. Bârlad); N. NICOLESCU (Șc. militară de Artilerie, Timișoara); T. ANGELESCU, M. BRĂTESCU-DANUBIU, S. LĂZĂRESCU (Lc. Ioan Maiorescu, Giurgiu); N. BOTEA (Lc. Cantemir, București); E. PĂLĂRIERU (Lc. Spiru Haret, București); A. MLADENOVICI (Lc. Particular), E. ȘTEFĂNESCU, L. CĂLDĂRARU, T. ANGELESCU, P. BLEIWEISS și S. WEISS.

4°. D-l N. ARCADIAN (Lc. Caracal) a găsit soluția parțială 12, 9, 18 servindu-se de soluția problemei 1730 din *Gazeta Matematică* vol. XXIV pag. 105.

5°. Am propus problema 3101 spre a da prilej corespondenților noștri să caute viciul de demonstrație a notei d-lui I. RIZESCU, publicată în *Gazeta Matematică* vol. XXVIII pagina 410. Deși unii corespondenți s'au servit de acea notă, totuși ei n'au observat că ea este necompletă și au ajuns, evident, la rezultate parțiale, după cum se vede la punctul 3°. Propun corespondenților să găsiască viciul de demonstrație al acelei note; rezultatele se vor publica sub formă de notă matematică.

6°. Problema 3101 poate fi considerată și ca o aplicație a problemei

1730, ceea ce a observat d-l N. ARCADIAN, care însă nu a aplicat decât parțial rezultatele acelei probleme. Iată rezolvarea completă a problemei 3101, bazată pe rezultatele date de soluția problemei 1730, dată în vol. XXIV pag. 105.

Soluțiile întregi ale ecuației

$$\frac{2}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

sunt date de formulele :

$$x = \rho m \alpha (\alpha + \beta) \quad ; \quad y = \rho m \beta (\alpha + \beta) \quad ; \quad z = 2 \rho m \alpha \beta,$$

în care m este un număr întreg oarecare, α și β sunt 2 numere întregi prime între ele, iar ρ este un număr egal cu 1 sau cu $\frac{1}{2}$, după cum α și β sunt de paritate diferită sau de aceeași paritate. Conform enunțului, trebuie să avem

$$(1) \quad x + y + z = \rho m [(\alpha + \beta)^2 + 2 \alpha \beta] = 39 = 1.3.13.$$

Deosebim 2 cazuri. *Cazul întâi*, $\rho = 1$. În acest caz, (1) dă unul din sistemele de egalități:

$$(2) \quad m = 1 \quad (2)' \quad (\alpha + \beta)^2 + 2 \alpha \beta = 39$$

$$(3) \quad m = 3 \quad (3)' \quad (\alpha + \beta)^2 + 2 \alpha \beta = 13$$

$$(4) \quad m = 13 \quad (4)' \quad (\alpha + \beta)^2 + 2 \alpha \beta = 3$$

$$(5) \quad m = 39 \quad (5)' \quad (\alpha + \beta)^2 + 2 \alpha \beta = 1.$$

Dacă în (2)' se înlocuiește $(\alpha + \beta)^2$ succesiv prin unul din pătratele perfecte nepereche, care se pot scădea din 39 și adică prin 1, 9 sau 25, se găsește că produsul (α, β) ar putea avea una din valorile 19; 15; 7, deci α și β ar putea avea valorile:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \alpha & 1 & ; & 19 & | & 1 & ; & 15 & | & 3 & ; & 5 & | & 1 & ; & 7 \\ \hline \beta & 19 & ; & 1 & | & 15 & ; & 1 & | & 5 & ; & 3 & | & 7 & ; & 1 \\ \hline \end{array}$$

care nu răspund problemei, căci pentru niciunul din aceste sisteme, $(\alpha + \beta)^2$ nu are valoarea corespunzătoare 1, 9 sau 25.

Considerând sistemul (3), (3)' găsim ușor rezultatele din tabelul

m	3	
$(\alpha + \beta)^2$	1	9
$\alpha \beta$	6	2
α	1 ; 6 ; 2 ; 3	1 ; 2
β	6 ; 1 ; 3 ; 2	2 ; 1

Din acest tabel, sunt acceptabile valorile

$$\alpha = 1, 2$$

$$\beta = 2, 1,$$

care dau soluțiile : $x = 9$ sau 18 , $y = 18$ sau 9 și $z = 12$.

În mod analog, se găsește că relațiile (4) și (4)' dau

$$\alpha = \beta = 1 \\ x = y = z = 13.$$

Cazul al doilea, $\rho = \frac{1}{2}$. Relația (1) devine

$$2(x + y + z) = m[(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta] = 78$$

și, procedând ca la cazul întâi, se găsește numai sistemul

$$\alpha = 1, \beta = 7 \text{ sau } \alpha = 7, \beta = 1 \\ x = 4 \text{ sau } 28; y = 28 \text{ sau } 4; z = 7.$$

LOCOT. COL. GH. BUCILIU.

PROBLEMA 3125. Fie O, I, I_a centrul cercului circumscris centrul cercului înscris și al cercului exînscriș în unghiul A al unui triunghi ABC . Să se demonstreze că dacă între unghiurile triunghiului avem relațiunea

$$\cos B + \cos C = 1,$$

dreapta OI este paralelă cu latura BC .

Să se demonstreze apoi că dreapta OI_a nu poate fi paralelă cu latura BC .

V. CRISTESCU.

Soluție dată de D-nul B. M. BARBĂLATT (Elev Cl. VII Liceul Codreanu, Bârlad).

1. De oarece I este totdeauna interior triunghiului, o condiție necesară pentru ca OI să fie paralelă cu BC , este ca O să se afle deasupra lui BC , adică unghiul A să fie ascuțit.

Punând atunci condiția ca distanțele dela I la BC și dela O la BC să fie egale, obținem

$$r = R \cos A. \quad (1)$$

Se știe însă că avem

$$r = 4R \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C = R(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$$

și introducând această valoare în (1), rezultă

$$\cos B + \cos C = 1. \quad (2)$$

Invers, dacă se dă relația (2) deducem transformând

$$\cos \frac{1}{2}(B - C) = 1 : 2 \sin \frac{1}{2}A \quad (3)$$

Pentru ca valoarea lui $\cos \frac{1}{2}(B - C)$ dată de (3), să fie mai mică decât $+1$, trebuie să avem

$$\sin \frac{1}{2}A \geq 1 : 2, \quad \therefore A \geq 60^\circ.$$

Mai deducem că unghiul A nu poate fi obtuz. În adevăr, dacă presupunem că $A \geq 90^\circ$, atunci avem $\sin \frac{1}{2}A \geq \sqrt{2}:2$, iar condiția (3) ne dă în această ipoteză

$$\cos \frac{1}{2}(B - C) \leq \sqrt{2}:2, \quad \therefore \quad \frac{1}{2}(B - C) \geq 45^\circ,$$

sau $B \geq 90^\circ + C$; triunghiul ar avea deci unghiurile A și B obtuze, ceea ce nu se poate. Deci

$$60^\circ \leq A \leq 90^\circ.$$

În condițiunile arătate mai sus, transformând relația (3) în sens invers, obținem pe (2) și (1) și vom deduce că Ol e paralelă cu BC . Așa dar, am demonstrat că relația (2) este necesară și suficientă.

2. Pentru că l_a este totdeauna sub BC , pentru ca Ol_a să fie paralelă cu BC , trebuie ca și O să se afle sub BC , adică unghiul A să fie obtuz. Atunci paralelismul dreptelor Ol_a și BC este exprimat prin relația

$$r_a = -R \cos A \quad (4)$$

și ținând seamă că

$$r_a = 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C = R (\cos B + \cos C - \cos A + 1),$$

obținem condiția

$$\cos B + \cos C + 1 = 0. \quad (5)$$

De oarece cosinusul unui unghi nu poate fi mai mic ca -1 , relația (5) este imposibilă, căci ea cere evident ca atât B , cât și C să fie mai mari ca 90° , ceea ce nu se poate; deci Ol_a nu poate fi paralelă cu BC .

Soluție dată de D-nii: MIRCEA I. ADAM (Constanța), DORIN POPESCU, FILIP GOLDSTEIN.

1. Pentru ca Ol să fie paralelă cu BC o primă condiție este ca unghiul A să fie ascuțit și apoi ca distanțele dela O și I la BC să fie egale. Fie A_m mijlocul laturei BC (proiecția lui O pe BC). Avem atunci

$$OA_m = R \cos A = r$$

și dacă ținem seamă de relația cunoscută

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + R/r,$$

obținem imediat condiția

$$\cos B + \cos C = 1.$$

2. Pentruca dreapta Ol_a să poată fi paralelă cu BC , este necesar ca unghiul A să fie obtuz. În acest caz avem

$$OA_m = -R \cos A.$$

Deci condiția este

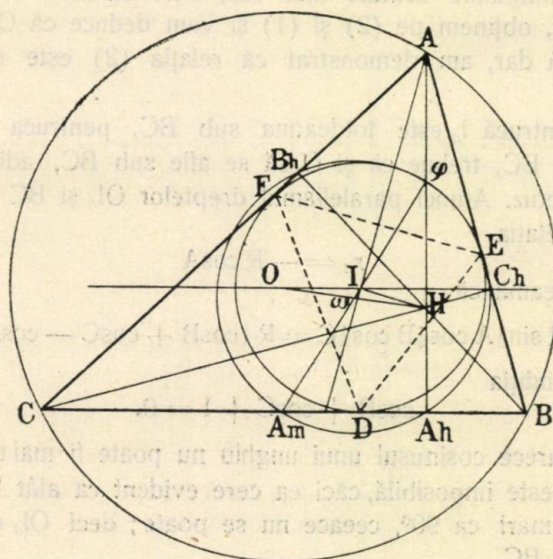
$$r_a = -R \cos A,$$

sau ținând seamă de relația cunoscută

$$2R \cos A = 2R + r - r_a$$

găsim

$$\cos A = 2 + r/R,$$



relațiune evident imposibilă și care se mai poate pune sub forma

$$\cos B + \cos C + 1 = 0.$$

Soluție dată de D-nul TRAIAN UDRISKY (Elev Cl. VI Liceul Moise Nicoară, Arad).

1. Soluția primei părți ca mai sus.

2. Pentruca Ol_a să fie paralelă cu BC , o primă condiție este ca unghiul A să fie obtuz. Fie A_m mijlocul laturei BC și P proiecția lui I_a pe BC .

Avem $BP = p - c$ și dacă presupunem că $B > C$, avem

$$PA_m = BP - BA_m = (p - c) - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(b - c).$$

Se știe apoi că $Ol_a^2 = R^2 + 2Rr_a$

Dacă Ol_a ar fi paralelă cu BC, atunci am avea $PA_m = Ol_a$ sau
 $\frac{1}{4}(b-c)^2 = R^2 + 2Rr_a \quad \therefore \quad (b-c)^2 > 4R^2$
 și dacă observăm că o latură a unui triunghi ȳarecare e mai mică
 ca diametrul cercului circumscris triunghiului, atunci deducem, a
 fortiori, că ar trebui să avem

$$(b-c)^2 > a^2, \quad \therefore \quad |b-c| > a,$$

adică latura a ar trebui să fie mai mică ca diferența celorlalte două,
 ceea ce nu se poate. Conchidem că Ol_a nu poate fi paralelă cu BC.

Observațiuni. Fie A_m mijlocul laturei BC; A_h, B_h, C_h pi-
 cioarele înălțimilor, H ortocentrul triunghiului, φ punctul lui FEU-
 ERBACH.

1. In triunghiul considerat avem relația $AH = 2r$.

TRAIAN UDRISKY.

2. In triunghiul special semnalat de D-nul V. CRISTESCU,
 dreapta IA_m trece prin punctul lui FEUERBACH φ .

In adevăr, tangenta în I la hiperbola lui FEUERBACH este Ol
 și cum aceasta este paralelă cu BC, rezultă că IA_m va fi diametrul
 conjugat diametrului paralel cu BC.

3. Dreapta care unește picioarele bisectoarelor exterioare este
 perpendiculară pe BC.

In adevăr, se știe că această dreaptă este polara trilineară a
 lui I, care se mai știe ¹⁾ că e perpendiculară pe Ol .

4. Fie L intersecția înălțimei AA_h cu dreaptă Ol . Avem $\varphi A_h = AL$.
 Această proprietate este consecința imediată a unei teoreme cu-
 noscute ²⁾.

5. Avem relațiile: $Ol^2 + R \cdot HA = R^2$; $Ol = \frac{1}{2}(c-b)$. ($c > b$).
 B. M. BARBĂLATT.

6. Punctul lui FEUERBACH φ este mijlocul segmentului AH ; φ
 coincide deci cu punctul eulerian de pe înălțimea AA_h .

In adevăr, φ fiind situat pe dreapta IA_m rezultă că centrul cer-
 cului celor nouă puncte se află și el pe IA_m ; deci φA_m este diametru
 în acest cerc.

1) ROUGHÉ et DE COMBEROUSSE, *Géométrie plane*, Nouvelle édition, p. 450,
 Scolie 7.3°.

2) F. G. — M. *Exercices de Géométrie*, VI-e éd., Question 1312, p. 609.
Gazeta Matematică, Vol. XXVIII, pag. 224.

7. Bisectoara AI este perpendiculară pe dreapta HI .

Aceasta rezultă din aceea că φ este mijlocul lui AH , iar $\varphi A = \varphi H = \varphi I = r$.

8. Punctele A, B_n, I, H, C_n , se află pe un cerc egal cu cercul I , având pe φ ca centru și pe AH ca diametru.

9. Triunghiul semnalat este, pe lângă triunghiul ioscel, singurul triunghi scalen în care punctul lui FEUERBACH se află pe una din înălțimile triunghiului.

În adevăr, dacă scriem că coordonatele normale

$$\sin^2 \frac{1}{2}(B - C), \quad \sin^2 \frac{1}{2}(C - A), \quad \sin^2 \frac{1}{2}(A - B)$$

ale punctului φ , verifică ecuația înălțimei AA_n , obținem condiția:

$$(\cos B - \cos C)(\cos B + \cos C - 1) = 0.$$

10. Între laturile triunghiului avem relațiunea

$$\begin{aligned} 2(b+c)(p-b)(p-c) &= abc, \\ \therefore (b+c)a^2 - 2bca - (b+c)(b-c)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Ecuația (6) are rădăcinile sale reale și de semne contrare.

Dacă presupunem $b > c$, ceea ce ne este permis din cauza simetriei în b și c , ecuația (6) ne dă

$$\begin{aligned} f(b-c) &= -2bc(b-c) < 0, \\ f(b+c) &= +2bc(b+c) > 0. \end{aligned}$$

Ecuația (6) are deci întotdeauna rădăcina pozitivă, cuprinsă între $(b-c)$ și $(b+c)$; ea poate forma un triunghi real cu valorile date lui b și c .

V. CRISTESCU.

Notă. D-nul MIHAIL I. FOCȘENEANU a rezolvat problema considerând triunghiul ABC ca triunghiul ortic al triunghiului $Ia Ib Ic$, iar D-nul ION C. VASILIU a dat o bună soluție cu ajutorul coordonatelor baricentrice.

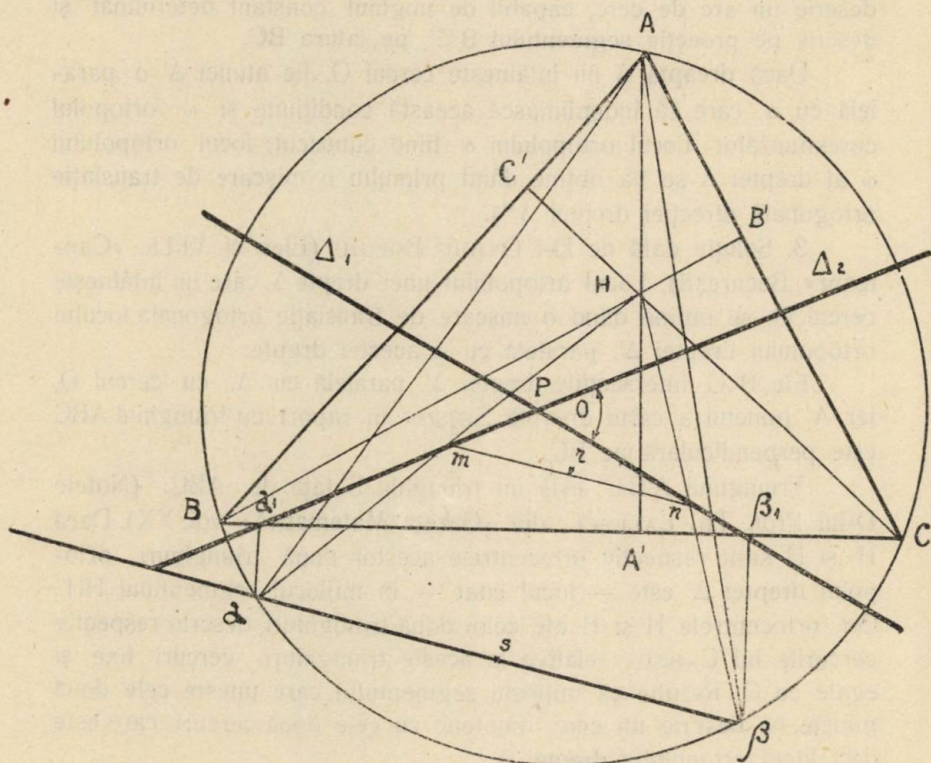
Au rezolvat prima parte a problemei, D-nii: N. P. ARCADIAN, ILIE IONESCU-BREZULICA, LEON WEISS, N. G. BOTTEA, OVIDIU G. POPEA, LEON BRÜLL, CONST. CIORĂNESCU, GH. D. SIMIONESCU, M. H. BRĂTESCU-DANUBIU, PAUL BLEIWEISS, A. URZICĂ, EM. ȘTEFĂNESCU.

PROBLEMA 3146. *În triunghiul ABC , latura BC e fixă, iar unghiul A constant. Se cere locul ortopolului unei drepte fixe Δ , în raport cu triunghiul ABC .*

M. GHERMĂNESCU.

1. Soluție dată de D-nii: M. ADAM, E. BERCOVICI, O. BOLGIU, N. BOTEA, M. GRÜNBAUM, POPESCU DORIN, W. SOLOMON, I. VASILIU, L. VLAȚIU și S. WEISS.

Fie B', C' proiecțiile vârfurilor fixe B, C pe dreapta Δ . Ortopolul ω se găsește la intersecția proiecțiilor punctelor B', C' respectiv pe AC, AB .



Observăm că unghiurile $B'\omega C'$ și BAC sunt suplimentare, căci au laturile respectiv perpendiculare. Unghiul A fiind constant, unghiul $B'\omega C'$ va fi și el constant, deci ω va descrie un arc de cerc pe $B'C'$ și capabil de unghiul $(180^\circ - A)$.

2. Soluție dată de D-nii: N. BOTEA (Elev cl. VI Lic. «Cantemir», București), O. POPEA (Elev cl. VII Liceul Real din Chișinău), L. WEISS (Elev cl. VII Lic. «V. Alexandri», Galați), M. FOCȘENEANU și N. BLAHA (Inginer).

Fie B', C' intersecțiile dreptei Δ cu cercul fix O , circumscris triunghiului ABC . Ortopolul dreptei Δ , în raport cu triunghiul ABC ,

este intersecția dreptelor lui SIMSON ale punctelor B', C' , în raport cu acest triunghi, care fac între ele un unghi, având ca măsură jumătatea arcului constant BC' .

Pe de altă parte, aceste două drepte trec respectiv prin proiecțiile punctelor B, C' , pe dreapta fixă BC , care fiind de asemenea fixe, rezultă că intersecția lor, adică ortopolul dreptei Δ , va descrie un arc de cerc, capabil de unghiul constant determinat și descris pe proiecția segmentului BC' , pe latura BC .

Dacă dreapta Δ nu întâlnește cercul O , fie atunci Δ' o paralelă cu Δ , care să îndeplinească această condițiune și ω' ortopolul corespunzător. Locul ortopolului ω' fiind cunoscut, locul ortopolului ω al dreptei Δ se va obține dând primului o mișcare de translație ortogonală direcției dreptei Δ^* .

3. Soluție dată de D-I OVIDIU BOLGIU (Elev cl. VI Lic. «Cantemir», București). Locul ortopolului unei drepte Δ , care nu întâlnește cercul O , se obține dând o mișcare de translație ortogonală locului ortopolului dreptei Δ' , paralelă cu Δ acestei drepte.

Fie B', C' intersecțiile dreptei Δ' , paralelă cu Δ , cu cercul O , iar A' punctul a cărui dreaptă SIMSON în raport cu triunghiul ABC este perpendiculară pe BC .

Triunghiul $A'B'C'$ este un triunghi S față de ABC . (Notele D-lui Prof. TR. LALESCU, din «Gazeta Matematică» vol. XX). Dacă H' și H sunt respectiv ortocentrele acestor două triunghiuri, ortopolul dreptei Δ' este — locul citat — în mijlocul segmentului HH' . Ori, ortocentrele H' și H ale celor două triunghiuri, descriu respectiv cercurile lui CARNOT relative la aceste triunghiuri, cercuri fixe și egale cu O . Rezultă că mijlocul segmentului, care unește cele două puncte, va descrie un cerc, omotetic cu cele două cercuri, care este deci locul ortopolului dreptei Δ' .

Observațiuni. 1. Problema se poate trata analog ca în prima soluțiune în cazul isopolului.

M. ADAM.

2. Ortopolul dreptei Δ în raport cu triunghiul BHC descrie acelaș cerc.

Ortopolul dreptei Δ în raport cu triunghiul BIC , I fiind centrul cercului înscris, descrie un cerc.

M. GRÜNBAUM.

*3. Fie m, n, r, s respectiv mijloacele segmentelor $B'H, C'H, mn, B'C'$.

a) Punctele m, n descriu cercuri omotetice cercului BHC , centrele de omotetie fiind $B'C'$, iar raportul de omotetie fiind $\frac{1}{2}$.

*) D. V. Ionescu: Notă 48, „Gazeta Matematică” XXIX.

b) Lungimea mn este constantă, egală cu $\frac{1}{2} B'C'$ și pentru orice poziție a lui A pe cercul O , este tangentă unui cerc concentric cu cercul celor nouă puncte, corespunzător triunghiului ABC .

c) Punctele mn se află, pentru orice poziție a lui A , pe cercul celor nouă puncte al triunghiului ABC .

N. BLAHA.

4. Când dreapta Δ , este un diametru al cercului O , $B'C'$ este un diametru al locului.

L. WEISS.

Notă. La soluțiunea a doua, numai D-nii: N. BOTEA și O. POPEA au examinat cazul când dreapta Δ nu întâlnește cercul O .

M. G.

PROBLEMA 3154. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, în care AB e latura perpendiculară pe baze. Paralela dusă la baze, prin intersecția I a diagonalelor trapezului, întâlnește latura AB în E . Să se demonstreze că dreapta EI este bisectoara unghiului CED .

N. IONESCU-ZANE.

Soluție dată de D-nii: OCTAV M. FLORESCU și PETRE M. PETREANU (Elevi Cl. V Liceul Ioniță Asan, Caracal); ION P. NICULESCU (Elev Cl. VI Liceul Roman Vodă, Roman); GH. JOJA și GH. BĂRBULESCU (Elevi Liceul Militar, Târgu-Mureș); NICOLAE NICOLESCU (Elev Școala Militară de Artilerie, Timișoara); GH. I. GROFȘOREANU; MARIUS GEORGESCU, GH. P. BOGDAN, VICTOR LEPĂDATU, EDGAR C. RUSSU, GH. L. COSMOVICI, ADRIAN NOVAC, VASILE VÂRLAN, EUGEN D. GEORGESCU, CONST. GIURUMESCU, OCTAV H. BURSTIN (Elevi Liceul Internat, Iași); DAVID BLUMENFELD, SYMON KATZ și ALEXANDRU TAUBER (Elevi Liceul Laurian, Botoșani); M. I. PĂTROIANU, VALERIU MANOPE, ION C. VASILIU (Elevi Liceul Militar, Mănăstirea Dealului); I DE-ARIE S. SCHÄCHTER (Elev Cl. V Liceul Comunității Israelite, Galați); FROIM MARCUS (Elev Cl. VIII Liceul Grigore Ghica, Dorohoiu); D. M. TEODORESCU (Elev Cl. VII Liceul Mihai Viteazul); MIRCEA I. ADAM (Constanța); CORNELIU POPESCU (Elev Cl. IV Liceul Giurgiu); OVIDIU POPEA (Elev Liceul B. P. Hajdău, Chișinău); DORIN POPESCU (Elev Cl. VII Liceul Constanța); NICOLAE JOJE, LEON BRÜLL, BENEDICT A. REINHORN, C. IONESCU-BUJOR și PAUL BLEIWEISS (Elevi Liceul Cantemir Vodă, București); ROMEO MIHĂILESCU (Râmnicul-Vâlcea); ION M.

MIU (Comuna Amărăștii de jos); LEON WEISS (Elev Cl. VII Liceul Galați); MIRCEA I. VASILESCU (Liceul Giurgiu); CHIRIAC I. GEORGESCU (Elev Cl. VIII, Comuna Grindu, Ialomița); N. I. POPESCU, SAMUIL RABINOVICI (Cetatea Albă); ARNO KAHANE, V. LĂZĂRESCU, ANGELO P. IONESCU, TR. ANGELESCU, V. C. GABRIELESCU.

În triunghiul ABC, dreapta EI fiind paralelă cu BC, avem

$$AE : EB = AI : IC. \quad (1)$$

Pe de altă parte, triunghiurile AID și CIB sunt asemenea, căci au unghiurile egale; deci

$$AI : IC = AD : BC. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$$AE : EB = AD : BC,$$

relație care ne arată că triunghiurile dreptunghice AED și BEC sunt asemenea, căci au catetele proporționale. Deducem de aici că avem

$$\sphericalangle ADE = \sphericalangle BCE.$$

Dar, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DEI$ și $\sphericalangle BCE = \sphericalangle CEI$, ca alterne interne; deci

$$\sphericalangle DEI = \sphericalangle CEI.$$

Unii din corespondenți după ce au demonstrat asemănarea triunghiurilor dreptunghice AED și BEC, au conchis că unghiurile DEI și CEI sunt egale, de oarece complimentarele lor sunt egale.

II. Soluție dată de D-nii: N. TEODORESCU (Elev Cl. V Liceul Spiru Haret), CONST. I. CIORĂNESCU (Elev Cl. VI Liceul Mănăstirea Dealului), ȘTEFAN FL. LĂZĂRESCU și M. H. BRĂTESCU-DANUBIU (Elevi Liceul Giurgiu).

Construim figura simetrică cu cea din enunț, în raport cu latura AB a trapezului. Fie atunci C', D' și I' simetricele punctelor C, D și I în raport cu AB. Figura DCC'D' este un trapez isoscel și proprietatea de demonstrat este aproape evidentă.

În adevăr, triunghiurile EBC și EBC' fiind egale, avem $\sphericalangle ECB = \sphericalangle EC'B$. Dar, $\sphericalangle DEI$ este egal cu $\sphericalangle EC'B$, ca corespondente, iar $\sphericalangle CEI$ este egal cu $\sphericalangle ECB$, ca alterne interne.

D-nul AL. I. STOENESCU (Student, Școala Politehnică) a demonstrat problema servindu-se de proprietățile patrulaterului complet.

Au rezolvat bine problema, servindu-se de construcțiuni auxiliare, D-nii: ȘTEFAN T. EPURE, ILIE IONESCU-BREZUICA, MIHAIL I. BOTEZ, G. CAZACU, LEON CĂLDĂRARU, GH. D. SIMIONESCU, PAUL I. IONESCU, AL. CH. MLADENOVICI, AL. A. OIFRAN, D. NICULESCU, VIRGIL COȘNIȚĂ, ION ST. COȘNIȚĂ, N. BOTEȘ și GH. IONESCU-ZĂNE, EM. ȘTEFĂNESCU.

Iar D-nii: MARTINIAN P. BOGDAN, N. SIMIONESCU, P. MIRESCU, AL. COMĂNESCU-BĂLTENI, cu ajutorul geometriei analitice, când prin geometria elementară e așa de simplu!!

PROBLEMA 3166. Fie A' , B' , C' picioarele înălțimilor unui triunghi ABC , H ortocentrul și O centrul cercului circumscris. Ducem cercul $AB'HC'$ și diametrul AO , care întâlnește acest cerc în A_1 și fie B_1 și C_1 punctele analoage cu A_1 . Să se demonstreze că triunghiul $A_1B_1C_1$ este înscris în cercul descris pe HO ca diametru.

ION C. VASILIU.

Soluție și generalizare date de D-nii: MIRCEA I. ADAM (Constanța), MIHAIL I. FOCSENEANU (Școala militară de Artilerie, Timișoara), SOLOMON WEISS (Elev cl. VII Liceul «V. Alexandri», Galați), OVIDIU POPEA (Chișinău), AL. TAUBER.

În general, fie M și N două puncte oarecare din planul unui triunghi $A_1A_2A_3$, sau al unui poligon oarecare $A_1A_2 \dots A_n$. Cercurile descrise pe MA_1 , MA_2 , $MA_3 \dots MA_n$ ca diametre, taie dreptele NA_1 , $NA_2, \dots, NA_n$ în niște puncte N_1 , $N_2, \dots, N_n$, care se găsesc pe cercul descris pe MN ca diametru. La fel, cercurile descrise pe NA_1 , $NA_2, \dots, NA_n$ ca diametre, taie pe $MA_1, MA_2, \dots, MA_n$ pe cercul cu diametru MN , căci aceste puncte sunt proiecțiile lui M (respectiv ale lui N) pe dreptele $NA_1, NA_2, \dots$ (respectiv $MA_1, MA_2, \dots$).

Observație. Proprietatea se menține în general când dreptele $MA_1, MA_2, \dots, MA_n$ subîntind arce de mărime unghiulară α constantă. În acest caz, punctele $N_1, N_2, \dots, N_n$ sunt pe două cercuri care trec prin M și N și subîntind arcele α și $180^\circ - \alpha$.

MIRCEA I. ADAM.

Notă. D-nii: C. BERDAN (Bârlad), EMILIAN ILIESCU, A. B. REINHORN și AL. CH. MLADENOVICI (București) au observat că punctul O din enunț poate fi oarecare.

Au rezolvat problema propusă, D-nii: N. GH. BOTTEA, LEON M. BRÜLL, GH. L. COSMOVICI, PAUL I. IONESCU, GH. IONESCU-ZANE, M. BRĂTESCU-DANUBIU, ADRIAN NOVAC, ION GH. CONSTANTINESCU, CONST. I. CIORĂNESCU, VIRGIL COȘNIȚĂ, N. NICOLESCU, C. GIURUMESCU, ȘT. T. EPURE, GH. P. BOGDAN, GH. SIMIONESCU, GH. I. GHIMICESCU, V. C. GABRIELESCU.

EXERCITII.

105. Se cer numerele de trei cifre, niciuna fiind 0, așa că suma și produsul cifrelor lor să fie patrate sau cuburi.

T. N. ANGELESCU.

R. Suma este coprinsă între 2 și 28 și deci nu am putea avea decât patratele 4, 9, 16, 25 sau cuburile 8, 27. Dar:

$$\begin{aligned} 4 &= 1.1.4 = 1.2.2 & ; & \quad 9 = 1.1.9 = 1.3.3 & ; & \quad 8 = 1.1.8 = 1.2.4. \\ 16 &= 1.2.8 = 2.2.4 = 1.4.4 & ; & \quad 25 = 1.5.5 & ; & \quad 27 = 1.3.9 = 3.3.3. \end{aligned}$$

Numai la factorii 1.4.4 suma este un patrat și la factorii 2.2.4 un cub. De aci soluțiile:

144, 414, 441 ; 224, 242, 422.

106. Cum trebuie ales n , pentruca $(n^4 + 2n^3 - 61n^2 - 62n + 336)$ să se dividă cu 15000?

E. ȘTEFĂNESCU.

R. Avem $15000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4$. Expresia se descompune în factorii $(n-7)$, $(n-2)$, $(n-3)$, $(n+8)$. Factorii diferă unul de altul cu 5. Deci trebuie să avem fiecare $\mathcal{M} 5$, sau $n = \mathcal{M} 5 + 2 = 5p + 2$. Înlocuind factorii devin $5(p-1)$; $5p$; $5(p+1)$; $5(p+2)$. Dar $(p-1)p(p+1)(p+2)$ se divide cu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 = 2^3 \cdot 3$, c. c. e. d. d.

107. Dacă n numere de câte n cifre se divid cu N , determinantul acelor n^2 cifre se divide cu N .

T. N. ANGELESCU.

R. E destul a înmulți coloanele cu 10^{n-1} , 10^n , 10^{n+1} , ..., 10 , 1 și a înlocui prima cu suma coloanelor. Pe prima coloană es cele n numere date, care se divid toate cu N și deci N divide întreaga coloană. El este deci un divizor al determinantului.

108. Să se arate că între unghiurile unui triunghi avem relațiunea:

$$\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} - \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C} = \cos A \cos B \cos C (\operatorname{tg}^2 A - \operatorname{tg}^2 B).$$

AUREL GH. PANAITESCU.

R. Prima parte se poate scrie

$$\frac{\operatorname{tg}^2 A - \operatorname{tg}^2 B + (\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B) \operatorname{tg} C}{(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C)}$$

și împărțind atunci ambele părți cu $(\operatorname{tg}^2 A - \operatorname{tg}^2 B)$, obținem:

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B)(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)(\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A)} = \cos A \cos B \cos C.$$

$$\text{Dar } \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{\sin C}{\cos A \cos B}, \text{ etc., } \sum \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C, \text{ etc.}$$

109. Să se demonstreze că dacă între elementele unui triunghi avem relația

$$2S = \frac{a^2}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C},$$

triunghiul este dreptunghic în A.

FLOREA NEGRETZU.

R. Se știe că aria S a unui triunghi e dată de relația

$$2S = \frac{a^2}{\cotg B + \cotg C}.$$

Va trebui deci să avem

$$\frac{a^2}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \frac{a^2}{\cotg B + \cotg C} \quad \therefore \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \cotg B + \cotg C$$

$$\therefore (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)(\operatorname{tg} B \times \operatorname{tg} C - 1) = 0.$$

Soluția $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 0$ nu este admisibilă, căci ar trebui să avem $B + C = 180^\circ$.

Soluția $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 1$, dă $\operatorname{tg} B = \cotg C$, $\therefore B + C = 90^\circ$.

PROBLEME PROPUSE.

3191. Să se găsiască trei numere consecutive $(n-1), n, (n+1)$, respectiv divisibile prin alte trei numere consecutive $(m-1), m, (m+1)$.

E. ȘTEFĂNESCU.

3192. Care sunt cuburile mai mici ca un milion, la care ultimele trei cifre formează un patrat?

I. DRAGOMIR.

3193. În triunghiul ABC, latura BC e fixă, iar unghiul A constant. Bisectoarele unghiului A taie cercul circumscris în D și E, iar latura BC respectiv în F și G. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor DF și GE.

GH. SIMIONESCU.

3194. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor unui triunghi ABC, R și r raza cercului circumscris și a cercului înscris triunghiului, h_a, h_b, h_c înălțimile sale, φ punctul lui FEUERBACH, X, Y, Z proiecțiile lui φ pe laturile BC, CA, AB. Să se demonstreze relațiunea

$$\frac{YB_1}{R+r-h_b} = \frac{ZC_1}{R+r-h_c} + \frac{XA_1}{R+r-h_a}.$$

$(a > b > c)$.

V. CRISTESCU.

3195. Fie H ortocentrul unuia din triunghiurile ABC înscrise într'un cerc O; $(A_a), (B_b), (C_c)$ cercurile descrise respectiv din A, B, C ca centre și cu ka, kb, kc ca raze. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul k , dreapta care unește pe H cu centrul radical D al cercurilor $(A_a), (B_b), (C_c)$ trece printr'un punct fix F. Să se găsiască valoarea lui k , pentru care D și F se confundă.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

3196. Să se rezolve sistemul:

$$\sin(x+y) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y,$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \sin x + \sin y.$$

I. IONESCU.

3197. Să se găsiască numărul de rădăcini reale ale ecuației

$$e^{kx} - x = 0,$$

k fiind real.

Să se deducă, ca un caz particular, numărul de rădăcini reale ale ecuației :

$$a^x = x^a,$$

cantitățile fiind alese așa ca părțile ecuației să fie reale. Să se deducă de aici inegalitatea

$$\frac{a}{L a} \geq e$$

$a \geq 1$. Să se dovediască această inegalitate și direct. L înseamnă logaritmul în baza e .

TH. ANGHELUȚĂ.

3198. Dacă ecuația $f(x) = 0$ are toate rădăcinile reale, ecuația

$$f^4 - 4k f^3 f'^2 - 2k^3 f'^2 f''^2 + 4k^2 f f'^2 f'' + k f'^4 = 0,$$

are și ea toate rădăcinile reale, k fiind pozitiv.

B. BARBĂLATT.

3199. Se dă o parabolă și un cerc cu centrul în focarul F și tangent la directoarea parabolei. Prin F , se duce o secantă variabilă, care taie cercul în C și C' , iar parabola în D și D' . Fie M unul din punctele de intersecție ale paralelelor la directoare, duse prin C și C' , cu paralelele la axa parabolei duse prin D și D' . Să se afle și să se construiască locul punctelor M , când secanta variabilă se învârtă în jurul lui F .

PETRE TROFIMOV.

3200. O minge de fotbal cade vertical dela 10 m. înălțime. Presupunând că din cauza înclinării terenului în punctul de cădere, mingea ricoșează, sărind sub un unghi oarecare, apoi la a doua cădere fenomenul se repetă și tot așa mereu până se oprește mingea, se întreabă :

La ce depărtare maximă poate ajunge mingea dela punctul de cădere, admitând că viteza de ricoșat este numai $\frac{2}{3}$ din viteza de cădere (aceasta din cauza frecărilor cu terenul și a imperfecțiunii elasticității mingiei) și rezistența aerului se neglijează ?

CĂPITAN I. LINTEȘ.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam I. M. (2895, 3103, 21, 49, 57, 58, 62, 68, 72, E, P, R); Angelescu T. (3101, 35); Arcadian N. (2298, 3149, 59, 67); Barbălat M. B. (3158); Basacov G. (3188); Berdan C. (3136, 56, 67, 78); Bleiweiss Paul (2880, 3101, 67, 68, 82); Bogdan G. (E); Bolgiu O. (3132); Botea N. (3122, 36, 67, 88, P, R); Brătescu Danubiu M. (2922, 3085, 146, 58, 68); Brüll Leon (3167); Căldăraru L. (3101); Ciorănescu I. Const. (3146, 56, 67, E, P); Cosmovici L. G. (3138, 47); Coșniță Virgil (3167, E); David G. (3062); Diaconescu T. (3117); Epure T. St. (3117, 59, 78); Focșeneanu Mihail (3054, 85, 95, A, N); Ghimădescu Gh. (3097, 120, 39, 67, 78); Goldstein F. (3097, 115, 20, 39, 59); Iliescu Emilian (3167, 68); Ionescu Angelo (3172); Ionescu-Bujor T. C. (3097, 151, 72); Ionescu-Zane Gh. (3146); Ionescu Paul (2985, 3147, 56, 67); Kahane Arno (3172); Katz S. (3149); Lăzărescu M. V. (3172); Lăzărescu S. (3188, E); Lepădatu I. V. (3167); Miu M. I. (3097, 172); Mladenovici Alex. (3062, 100, 51, E); Nicolescu Nicolae (3158, 68); Novac Adrian (3017, 178); Orănescu O. (E, P); Pălărieru Eug. (3167, 68); Părvulescu T. (E); Pătroianu I. M. (3017, 21, 67, 91, 146, 47); Petreanu P. (3172); Popea Ovidiu (3024, 138, 51, 56); Popescu Dorin (2895, 3073, 151, 56, 62, 72, 82); Popescu Nicolae (3158); Popovici Tiberiu (3110); Reinhorn B. (3132); Russu Edgar (3098, E); Samoilă D. (3156); Schächter I de Arie (3172); Schächter Ozias (3132); Simionescu D. Gh. (3147, 56, 62, 72); Ștefan M. (E); Ștefănescu Emil (3101, 47, 49, 51, 59, 72, P); Stoica A. (3188, E); Tăiler G. (3121, E); Tauber Alex. (3158); Teodorescu N. (3151, 62); Tudorache S. (3159); Udrisky Traian (3046, 47, 135, 46, 49, 59); Vainfeld Theodor (3172); Vasilescu M. (3146, 49); Vasiliu C. I. (2985, 3021, 136, 47, 56, 62, 67, 78, E); Weiss Leon (2946, 53, 3034, 151, 58, 67, 88, E, N, P); Weiss Solomon (2298, 3046, 139, 46, 49, 67, 88, E, N).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1948, 2222, 329, 54, 59, 60, 77, 83, 96, 402, 21, 24, 52, 85, 623, 61, 82, 89, 773, 818, 56, 79, 91, 910, 18, 71, 72, 78, 3053, 56, 90, 93, 98, 100, 02, 03, 04, 09, 11, 13, 28, 31, 32, 33, 40, 44, 48, 58, 70, 73, 74, 79, și 85, nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

28 VOLUME

Colecțiunea întreagă Lei 1500,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 70 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI și XXV, care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie*. (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

2. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. N. Abramescu, *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăugită*, 1921. (Epuizată).

4. A. G. Ioachimescu și G. Țițeica, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. Tr. Lalescu, *Tratat de Geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăugită*, 1923 Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice Lei 20,—

7. Gh. Lazăr, *Trigonometria drept unghiulară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) Lei 5,—

8. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăugită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme Lei 60,—

9. G. Eni. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, *Vocabular Matematic* Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăoga taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul*. Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septembrie ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimite D-lui: I. D. Teodor, Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București.

*Om. Asociațiunii pentru cultura
și literatura poporului Român din Sibiu*



Sibiu

GAZETA MATEMATICĂ

APARE ODATĂ PE LUNĂ

1923/24

Complete 28
ANUL XXIX.

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1924.



SUMARUL

1. † Ion D. Teodor.
2. Asupra unei teoreme a lui Hermite . . . N. Abramescu.
3. O proprietate a indicatorilor de ordin superior . . . Căpitan I. Linteș.
4. Note matematice: 77—85.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 113, 114.
7. Probleme rezolvate: 2319, 2349, 2650, 2849, 2853, 2880, 3032, 3103, 3120, 3132.
8. Exerciții: 110—115.
9. Probleme propuse: 3201—3210.
10. Tabla de Materii.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET

1924

SPRE ȘTIINȚA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică”** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXIX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politehnică din București, **Tr. Lalescu**, Doctor în Matematici, Profesor Universitar și **I. D. Teodor**, Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Școala Politehnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice” se vor trimite D-lui **GEORGE BORNEANU**, Inginer, Directorul Fabricilor de chibrituri și timbre, București.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor rediă în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela D-l *Ing. G. Borneanu*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poștă.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evita confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

În vederea sporirii taxelor poștale, corespondenții pot trimite de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsa spații albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecință.

Nu se admite însă a se trata pe aceeași foale mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, creațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ”, trebuie să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 56, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 61, 95, 3005, 13, 19, 42, 45, 55, 60, 69, 75, 89, 90, 107, 12, 14, 27, 29, 31, 34, 40, 41, 48, 50, 60, 61, 63, 65, 69, 71, 75, 76, 77, 80, 81, 83, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 200, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10.

† ION D. TEODOR.

*Membrii Societății «Gazeta Matematică» și eminenții corespondenți ai acestei reviste, adunați la Concursul din anul acesta, au văzut cu îndurerare lipsa, din mijlocul lor, a Inginerului inspector general **Ion D. Teodor**, Cassier și membru în Delegațiunea Societății, în ultimii 15 ani. Rugile adresate atunci, de toți, Celui A Tot Puternic, pentru în-sănătoșirea lui, nu au fost ascultate, căci fusese sorocit de Dânsul, ca pe ziua de 30 Iulie, să fie chemat în Impărăția celor drepți. Căci bun și îndatoritor, milostiv și drept a fost în toată viața lui! Și-a îndeplinit totdeauna cu sârguință, conștiinciozitate și cu zel toate însărcinările ce i s'au dat, sau pe care și le-a luat singur. A îngrijit de funcționarii și lucrătorii pe cari i-a avut sub ordine, de familiile și de copiii lor, mai mult decât de sănătatea lui. A muncit și a luptat pentru ideal mai mult decât pentru lucrurile trecătoare ale acestei vieți!*

Ion D. Teodor s'a născut la Ștefănești, județul Botoșani, în anul 1879, Februarie 5. După terminarea claselor primare, a făcut Liceul la Iași și apoi Școala Națională de Poduri și Șosele din București, pe care a terminat-o, ca șef de promoțiune, în anul 1901. În acelaș an, a fost numit inginer în Administrația Regiei Monopolurilor Statului, în care a rămas până la sfârșitul vieții sale, trecând prin toate treptele ierarhiei, și anume: Sub Director la Fabrica de tutun, apoi Director la Fabrica de chibrituri din București și, din 1921, Director general al Regiei Monopolurilor Statului. Apreciat de toți conducătorii Corpului tehnic al Statului, dânsul a urcat repede diferitele grade ale acestui Corp, ajungând Inginer-Șef în 1912 și Inginer Inspector general în 1922.

Pentru activitatea și conștiinciozitatea sa, a fost chemat în 1908, ca Profesor la Școala de Conducători și a suplinat, în diferite rânduri, catedra de Statică Grafică la Școala Națională de Poduri și Șosele, până la 1915, când a fost numit titular al acestei catedre, la care i s'a alăturat și cursul de Beton Armat.

În timpul războiului a fost trimis, cu diferite misiuni, în Rusia, unde a fost surprins de revoluțiune. Numai după o rătăcire de mai bine de un an, prin Nordul și Apusul Europei, s'a reîntors în țară cu

sănătatea mult sdruncinată. Acî, în loc de liniște, a avut de luptat îndelung cu dezorientarea conducătorilor față de mișcările muncitorești, care i-au adus multe zile și nopți de zbuciumuri și neodihnă.

Unul din exemplele cele mai frumoase pe care le lasă iubitul nostru coleg posterității, este activitatea lui la «Gazeta Matematică». În administrațiunea în care a funcționat dînsul, se cerea mai mult rezolvarea de probleme economice și sociale, iar nu științifice, și de aceea, nu a avut matematica printre ocupațiunile lui de predilecțiune. Cu toate acestea, în 1906, cere înscrierea în redacția «Gazetei Matematice», care s'a transformat în 1909 în Societatea care tipărește această Revistă. Cu toate că în acel an nu eră decît de trei ani printre noi, totuși Adu-narea generală i-a dat în unanimitate sarcina de Cassier și toată grija administrațiunii acestei reviste și a Societății, funcțiuni pentru care trebuia să plătiască în loc de a fi plătit cu altceva, decît cu mulțumirea su-fletiască de a contribui la răspîndirea și propășirea științei române! Cu modul acesta, a făcut și parte din Delegațiunea Societății timp de 15 ani, reprezentînd-o totdeauna cu pricepere și demnitate. Prin îngri-jirea lui, revista și-a achitat la zi toate plățile și s'a expediat abonaților la data fixată, totdeauna când a fost liniște în țară. După războiu, readucerea revistei mai repede la starea ei înfloritoare la care se găsea înainte de 1916, stare care azi face admirația lumii științifice streine, se datorește lui **Ion D. Teodor**; el a dat tipărirea actualei Imprimerii, unde să plătesc cheltuelile reale fără surplusuri pentru speculă. Lui se datorește și reînceperea cu câțiva ani mai de vreme, a Concursurilor «Gazetei Matematice» și a frumoaselor serbări dela finele lor.

Ion D. Teodor a fost un susținător devotat și neobosit al «Ga-zetei Matematice» și un neîntrecut reprezentant al intereselor ei ca Delegat al Societății. Prin moartea lui, la etatea numai de 45 ani, So-cietatea noastră încearcă o pierdere foarte dureroasă. Toți membrii află-tori în București în ziua de 2 August, și-au făcut datoria de a asista la Serviciul religios pentru înmormîntarea lui, iar colegul nostru **V. Cristescu**, a arătat asistenței meritele mult regretatului nostru camarad.

«Gazeta Matematică» se asociază și pe această cale la doliul nemîngăiatei sale soții și o asigură că memoria lui **Ion D. Teodor** va rămîne vecinică în Societatea noastră.

ASUPRA UNEI TEOREME A LUI HERMITE.

Se cunosc soluțiile date de HERMITE¹⁾, BIEHLER²⁾ LAGUERRE³⁾, următoarei probleme de algebră: Fie $\alpha + \beta i, \dots, \lambda + \mu i$ cantități imaginare, în care coeficienții lui i au același semn. Dacă se pune:

$$\Pi (x - \alpha - \beta i) = (x - \alpha - \beta i) \dots (x - \lambda - \mu i) = F(x) + i \Phi(x),$$

ecuația $pF(x) + q\Phi(x) = 0$, unde p și q sunt numere reale arbitrare, are toate rădăcinile reale.

În ceea ce urmează, vom da o nouă demonstrație acestei teoreme și vom face o observare asupra rădăcinilor ecuațiilor $F(x) = 0$ și $\Phi(x) = 0$.

Să considerăm expresiunea:

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = f(x, y) + i\varphi(x, y),$$

$$z_s = a_s + ib_s, \quad z = x + iy.$$

Acest produs nu se anulează de cât pentru punctele $z_1, z_2, \dots, z_n$; deci curbele:

$$f(x, y) = (x - a_1) \dots (x - a_n) - \Sigma (y - b_1)(y - b_2) \dots (x - a_3) \dots \dots (x - a_n) + \dots = 0,$$

$$\varphi(x, y) = \Sigma (y - b_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - \Sigma (y - b_1)(y - b_2)(y - b_3) \dots (x - a_4) \dots (x - a_n) + \dots = 0,$$

au numai aceste n puncte comune.

Considerând curba:

$$pf(x, y) + q\varphi(x, y) = 0,$$

ce trece prin cele n puncte considerate, direcțiile asimptotice ale acestei curbe sunt date de grupul termenilor de gradul n :

$$p(x^n - C_n^2 x^{n-2} y^2 + C_n^4 x^{n-4} y^4 - \dots) + q(C_n^1 x^{n-1} y - C_n^3 x^{n-3} y^3 + \dots) = 0,$$

1) HERMITE, Sur l'indice des fractions rationnelles (Bulletin de la Société mathématique de France, t. 7, p. 131).

2) BIEHLER, Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles (Journal de Borchardt, t. 87, p. 350).

3) LAGUERRE, Oeuvres, t. II.

adică de ecuația

$$\frac{C_n^1 X - C_n^3 X^3 + \dots}{1 - C_n^2 X^2 + C_n^4 X^4 - \dots} + \frac{p}{q} = 0, \quad X = \frac{y}{x}.$$

Dar aceasta este tocmai ecuația care dă pe $\operatorname{tg} \alpha/n = X$, când se cunoaște $\operatorname{tg} \alpha = -p/q$, care se știe că are toate rădăcinile reale, corespunzătoare, pe cercul trigonometric, unghiurilor:

$$\alpha/n + k\pi/n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Deci curba $pf(x, y) + q\varphi(x, y) = 0$, are n ramuri la infinit, reale, în direcțiile $(\alpha/n + k\pi/n)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, iar în cazul când $\alpha \neq 0$, $p \neq 0$, niciuna din aceste direcții nu e paralelă cu Ox .

Dar aceste ramuri infinite trec prin cele n puncte $z_1, z_2, \dots, z_n$ ale curbei și deci, tăind curba cu o paralelă cu Ox , care să lase toate aceste puncte de o parte a ei (adică aceste puncte să aibă ordonatele de același semn), această paralelă $y = a$ va tăia curba $pf(x, y) + q\varphi(x, y) = 0$, adică cele n ramuri infinite în puncte reale, date de ecuația:

$$pf(x, a) + q\varphi(x, a) = 0,$$

sau, în cazul problemei considerate, de ecuația

$$pf(x, 0) + q\varphi(x, 0) = 0, \quad pF(x) + q\Phi(x) = 0,$$

care, deci, trebuie să aibă toate rădăcinile sale reale și astfel teorema lui HERMITE este demonstrată.

Observare. Se vedem acum ce relație este între rădăcinile ecuațiilor $F(x) = 0$ și $\Phi(x) = 0$. Pentru aceasta, să observăm că direcțiile asimptotice ale curbelor $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ sunt date de ecuațiile

$$C_n^1 X - C_n^3 X^3 + \dots = 0, \quad 1 - C_n^2 X^2 + C_n^4 X^4 - \dots = 0,$$

ale căror rădăcini sunt reale și corespunzătoare, pe cercul trigonometric, unghiurilor

$$0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}, \frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}, \dots, \frac{\pi}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Dar, se vede că razele corespunzătoare primelor unghiuri se găsesc respectiv între razele ce corespund celor de al doilea unghiuri și cum curbele $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ trec prin cele n puncte $z_1, \dots, z_n$, ne mai având altele comune, ramurile lor infinite pornesc din aceste n puncte, unele separând pe altele; deci, o paralelă cu Ox , ce lasă de aceeași parte toate punctele $z_1, \dots, z_n$, va tăia primele n ramuri în n puncte ce separă punctele de intersecție cu celelalte $(n-1)$ ramuri, căci una este în direcția Ox , deci rădăcinile ecuației $F(x) = 0$ separă pe ale ecuației $\Phi(x) = 0$.

N. ABRAMESCU.

O PROPRIETATE A INDICATORILOR DE ORDIN SUPERIOR.

Dacă φ_i reprezintă indicatorul de ordinul i al lui N , îmi propun, în cele ce urmează, să arăt că:

$$N-1 \leq \sum_1^n \varphi_i < 2N,$$

unde $\varphi_n = 1$.

Pentru aceasta, voi arăta mai întâiu că avem:

$$\sum_1^n \varphi_i \leq \frac{(N - \varphi_n)^n \sqrt[n]{\varphi_n}}{\sqrt[n]{N} - \sqrt[n]{\varphi_n}},$$

unde nu socotim deocamdată $\varphi_n = 1$.

În adevăr, avem:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= N \cdot K_1 \\ \varphi_2 &= \varphi_1 \cdot K_2 \\ . & \\ \varphi_n &= \varphi_{n-1} \cdot K_n. \end{aligned}$$

Prin înmulțire, găsim că:

$$\varphi_n = N \cdot K_1 \cdot K_2 \dots K_n.$$

Dar :

$$K_1 > K_2 > \dots > K,$$

căci dacă :

$$K_1 = \pi(a-1)/\pi a,$$

atunci :

$$K_2 = K'_1 \cdot \pi(b-1)/\pi b,$$

unde K'_1 poate fi K_1 , sau mai mic decât K_1 , iar

$$\pi(b-1)/\pi b < 1.$$

Aceasta ne arată că :

$$\varphi_n \leq N \cdot K_1^n,$$

de unde :

$$K_1 \geq \sqrt[n]{\varphi_n/N}.$$

Avem apoi :

$$\varphi_1 \leq N \cdot \sqrt[n]{\varphi_n/N}$$

$$\varphi_2 \leq \varphi_1 \cdot \sqrt[n]{\varphi_n/N} \leq N \sqrt[n]{(\varphi_n/N)^2}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi_n \leq \varphi_{n-1} \sqrt[n]{\varphi_n/N} \leq \dots \leq N \sqrt[n]{(\varphi_n/N)^n}.$$

Adunând aceste neegalități, găsim :

$$\sum_1^n \varphi_i \leq N [\sqrt[n]{\varphi_n/N} + \sqrt[n]{(\varphi_n/N)^2} + \dots + \sqrt[n]{(\varphi_n/N)^n}],$$

ceea ce ne dă :

$$\sum_1^n \varphi_i \leq N \sqrt[n]{\varphi_n/N} \frac{1 - \varphi_n/N}{1 - \sqrt[n]{\varphi_n/N}}.$$

Sau :

$$\sum_1^n \varphi_i \leq \frac{(N - \varphi_n) \sqrt[n]{\varphi_n}}{\sqrt[n]{N} - \sqrt[n]{\varphi_n}}.$$

Observare: Dacă:

$$\varphi_n = 1,$$

atunci avem:

$$\sum_1^n \varphi_i \leq \frac{N-1}{n \sqrt{N-1}}.$$

Dar cum $\sqrt[n]{N} > 1 + \frac{N-1}{n} \quad ^1)$

iar $n < N$

$$\frac{N-1}{n} > \frac{1}{2}$$

urmează că:

$$2 \sqrt[n]{N} > 3$$

și prin urmare:

$$\frac{N-1}{\sqrt[n]{N}-1} < 2N.$$

Deci putem scrie că:

$$\sum_1^n \varphi_i < 2N,$$

ceea ce constituie o interesantă proprietate.

Deasemenea, observând că:

$$\sum_1^n \varphi_i = N \cdot K_1 + \varphi_1 \cdot K_2 + \dots + \varphi_{n-1} K_n$$

și ținând seamă că

$$\varphi_x = 1, \text{ deci } \varphi_{n-1} = 2,$$

urmează că avem:

$$K_n = \frac{1}{2}.$$

1) Aceasta din seria:

$$\sqrt[n]{N} = 1 + \frac{N-1}{n} + \frac{(N-2)^2}{2!n(n-1)} + \dots$$

Apoi cum:

$$K_1 > K_2 > \dots > K_n,$$

înseamnă că:

$$\sum_1^n \varphi_i \geq (N + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1}) \frac{1}{2},$$

sau:

$$2 \sum_1^n \varphi_i \geq N + \sum_1^{n-1} \varphi_i,$$

de unde:

$$\sum_1^n \varphi_i + \varphi_n \geq N.$$

Cum $\varphi_n = 1$, avem:

$$\sum_1^n \varphi_i \geq N - 1.$$

Deci putem scrie:

$$N - 1 < \sum_1^n \varphi_i < 2N,$$

care constituie iarăși o importantă proprietate și care se poate enunța astfel:

Suma tuturor indicatorilor unui număr, este cuprinsă între acel număr, mai puțin o unitate și dublul numărului.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

NOTE MATEMATICE.

77. *Alte zece Astronomii diverse.* (A se vedeă Nota 40, pag. 212.

21. Alexandrină.	Vezi G. Bigourdan.	— L'Astronomie.	Pag. 379.
22. Arabă.	»	»	» 297.
23. Bizantină.	»	»	» 397.
24. Coperniciană.	»	»	» 337.
25. Mongolă.	»	»	» 379.
26. Planetară.	»	»	» 376.
27. Poziție.	»	»	» V.
28. Primitivă.	»	»	» V.
29. Romană.	»	»	» 379.
30. Siderală.	»	»	» VI.

(Va urmă).

I. IONESCU.

78. *Nu pot exista trei numere consecutive cu acelaș indicator.* D-l CĂPITAN I. LINTESȘ a demonstrat această teoremă în *Gazeta Matematică* Anul XXIX pag. 16. Iată aci o demonstrație mai simplă. În acel articol, se arată că două numere consecutive N și $(N+1)$ nu pot avea acelaș indicator de cât dacă sunt de forma $(2^z - 1)$ și 2^z , cu condiția ca $(2^z + 1)$ să fie prim, adică $(N+2)$ prim. Pentru ca perechia $(N+1)$, $(N+2)$ să aibă acelaș indicator, trebuie ca $(N+1+2)$ să fie prim. Ar trebui deci ca două numere consecutive $(N+2)$ și $(N+3)$ să fie prime, ceea ce nu se poate, dacă $N > 0$.

O. POPEA.

79. *Asupra exercițiului No. 105, enunțat astfel: Se cer numerele de trei cifre, niciuna fiind zero, așa ca suma și produsul cifrelor lor să fie pătrate sau cuburi.*

Prin modul cum se indică la pag. 437 rezolvarea, s'au găsit numai o parte din soluții, deoarece, în loc să se caute câte trei cifre semnificative, formând termenii unei sume, ce nu poate fi decât unul din numerele 4, 8, 9, 16, 25 și 27, s'a descompus aceste numere în factori, considerându-le astfel ca produsul cifrelor, iar nu ca sumă.

Procedându-se la descompunerea în termenii unei sume, s'ar fi găsit soluțiile 144, 414, 441, 224, 242, 422, 333, 466, 646, 664, 889, 898, 988, 999, iar nu numai primele șase.

MAIOR GH. I. LITEANU.

80. *Asupra unei teoreme.*

În G. M. Anul XXVI, pag. 59 am stabilit că:

$$\frac{\pi p(N^p)}{\pi(N)} - 1 = \mathcal{M}p$$

unde $\pi(N)$ este produsul divizorilor lui N , [iar p un număr prim care nu divide pe N .

Teorema nu este însă întotdeauna adevărată, deoarece relația de mai sus devine adevărată în cazul când:

$$\frac{\pi(N^p)}{[\pi(N)]^p} - 1 = \mathcal{M}p,$$

căeece se observă ușor din stabilirea demonstrației, căci:

$$\pi(N) = N^{\frac{1}{2}}n$$

și
$$\pi(N^p) = N^{\frac{1}{2}}n',$$

unde:

$$n = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \dots$$

$$n' = (\alpha p + 1)(\beta p + 1)(\gamma p + 1) \dots$$

și deci:

$$\frac{\pi(N^p)}{[\pi(N)]^p} = N^{n'-n} = N^{k(p-1)}.$$

CĂPIT. I. LINTEȘ.

81. Rezolvarea în numere întregi a ecuației

$$(1) \quad X^2 + Y^2 = Z^2.$$

În *Gazeta Matematică* vol. XIV, pag. 65, D-l G. ȚIȚICA publică un articol cu titlul acesta, dând pe o elegantă cale geometrică, următoarele rezultate:

Dacă p și q sunt 2 numere întregi prime între ele și $p > q$, atunci ecuația (1) are soluțiunile:

$$(I) \quad X = \frac{p^2 - q^2}{2}; \quad Y = pq; \quad Z = \frac{p^2 + q^2}{2},$$

când p și q sunt ambii fără soț; și soluțiunile

$$(II) \quad X = p^2 - q^2; \quad Y = 2pq; \quad Z = p^2 + q^2,$$

când p și q nu sunt ambii fără soț.

Cred că este deajuns a menționa numai sistemul (II), căci dacă X, Y, Z este un sistem de soluții, atunci și $2X, 2Y, 2Z$ va fi un sistem de soluții și invers.

Dealtfel, lucrul se poate verifica și direct. Fie

$$p = 2r + 1, \quad q = 2r' + 1.$$

Sistemul (I) ne dă soluțiile:

$$X_1 = 2(r^2 + r - r'^2 - r'); \quad Y_1 = (2r + 1)(2r' + 1);$$

$$Z_1 = 2r^2 + 2r + 2r'^2 + 2r' + 1;$$

iar sistemul (II) dă soluțiile:

$$X_2 = 4(r^2 + r - r'^2 - r'); \quad Y_2 = 2(2r+1)(2r'+1);$$

$$Z_2 = 2(2r^2 + 2r + 2r'^2 + 2r' + 1),$$

precum și sistemul X_1, Y_1, Z_1 , conform observației de mai sus.

Concluzia este deci că formulele generale ale soluției ecuației (1) sunt:

$$X = p^2 - q^2; \quad Y = 2pq; \quad Z = p^2 + q^2,$$

în care p și q sunt 2 numere prime între ele. Dacă, dând lui p și q unele valori, găsim:

$$X = mX'; \quad Y = mY'; \quad Z = mZ',$$

atunci evident că și X', Y', Z' sunt soluții de ale problemei.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

82. *Generalizarea problemei 3049.* (G. M. Vol. XXVIII pag. 434). Fie d_a, d_b, d_c distanțele dela un punct M din planul unui triunghi la vârfurile sale A, B, C ; α, β, γ unghiurile făcute de MA, MB, MC respectiv cu CA, AB, BC . Avem

$$\sum d_a [\cos \alpha + \cos (A - \alpha)] = a + b + c. \quad (1)$$

În adevăr, aplicând triunghiului MBC o relație cunoscută, avem

$$a = d_b \cos (B - \beta) + d_c \cos \gamma,$$

iar triunghiurile MCA și MAB ne dau alte două relații analoage, care adunate cu prima, ne dau tocmai relația ce ne-am propus să demonstrăm.

Când M este ortocentrul triunghiului, suntem în cazul problemei 3049 și avem:

$$\alpha = 90^\circ - C, \quad \beta = 90^\circ - A, \quad \gamma = 90^\circ - B,$$

iar relația (1) devine

$$\sum d_a (b + c) = 2R (a + b + c) = 4pR = 16R^2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$$

Când M este centrul cercului circumscris, relația obținută este aceeași ca și în cazul ortocentrului.

În cazul centrului cercului înscris, găsim

$$\sum d_a \cos \frac{1}{2}A = p.$$

În fine, putem presupune că M coincide cu diverse puncte re-

marcabile ale triunghiului, precum punctele lui BROCARD, centrele cercurilor exînscrie, etc.

MIRCEA I. ADAM.

Constanța.

83. *Asupra problemei 1606.* (G. M. Vol. XVII pag. 148). Voiu da o soluție simplă acestei probleme, în care se cere să se găsiască maximul expresiei

$$E = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C,$$

în care A, B, C sunt unghiurile unui triunghi.

Din relațiile

$$a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2R,$$

deducem
$$E = \frac{1}{4R^2} (a^2 + b^2 + c^2). \quad (1)$$

Dacă HO este distanța între ortocentru și centrul cercului circumscris triunghiului, se știe că avem

$$\overline{HO}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

iar expresia (1) devine

$$E = \frac{9}{4} - \frac{\overline{HO}^2}{4R^2}.$$

Deci maximul lui E are loc odată cu minimul lui $\overline{HO}:R$, adică în cazul triunghiului echilateral, când distanța HO este nulă.*)

MIRCEA ADAM.

84. *Asupra neegalității* $\sin \frac{\pi}{x} > \frac{1}{x}$ ($x > 3$). La concursul «Gazetei» din anul 1923, D-l D. V. IONESCU, a dat o demonstrație geometrică acestei inegalități. Iată o demonstrație algebrică. Fie

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{x} - \frac{1}{x},$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 - \pi \cos \frac{\pi}{x} \right).$$

*) Pentru o metodă analoagă, a se vedea, Nota matematică No. 20 din G. M. Vol. XVII, pag. 133.

(V. C.)

Când x variază dela 3 la $+\infty$, semnul lui $f'(x)$ depinde de semnul cantității: $1 - \pi \cos \frac{\pi}{x}$. Însă ecuația:

$$\cos \frac{\pi}{x} = \frac{1}{x},$$

admite o singură rădăcină între 2 și 3. Deci:

$$f'(x) < 0, \text{ când: } 3 < x < +\infty.$$

Deci când x variază dela 3 la $+\infty$, $f'(x)$ rămânând negativă, $f(x)$ scade neîncetat dela $f(3) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$, la $f(\infty) = 0$. Deci: $f(x) > 0$.

$$\therefore \sin \frac{\pi}{x} > \frac{1}{x}.$$

ALEXANDRU TAUBER.

Elev cl. VIII-a Lic. „Laurian”, Botoșani

85. Integrala lui Poisson în domeniul complex.

Convergența integralei lui POISSON:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)f(a + \theta) d\theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2},$$

în domeniul complex*) unde a și r sunt cantități complexe, iar funcțiunea $f(z)$ e continuă și periodică pentru valorile reale ale lui z și holomorfă pentru z situat în interiorul cercului de rază 1, ne-devenind infinită în acest domeniu, se poate stabili cu ușurință prin aplicarea teoriei reziduurilor.

Să facem, în această integrală, schimbarea $z = e^{i\theta}$, vom obține:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{(1-r^2)f(a + \log z/i)}{(z-r)(1-rz)} dz. \quad (r) < 1.$$

În interiorul cercului de rază unu, funcțiunea de sub semnul

*) A se vedea Nota D-lui A. ANGELESCU (Comptes-rendus, Paris 1924 5 Maiu).

f e holomorfă, având polul simplu $z=r$, iar reziduul corespunzător este $\frac{1}{2\pi i} \dot{f}(a + Lr/i)$. Rezultă :

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i} f\left(a + \frac{\text{Log } r}{i}\right) = f\left(a + \frac{\text{Log } r}{i}\right).$$

Dacă facem ca r să tindă către 1, atunci obținem :

$$\lim_{r \rightarrow 1} I = f(a).$$

-Dacă $(r) > 1$, atunci integrala I , are în interiorul cercului C polul simplu $z=1/r$, iar reziduul corespunzător este

$$-\frac{1}{2\pi i} f(a + i \text{Log } r).$$

În acest caz :

$$\lim_{(r) \rightarrow 1} I = 2\pi i \cdot \frac{-1}{2\pi i} \lim f(a + i \text{Log } r) = -f(a).$$

M. GHERMĂNESCU.

BIBLIOGRAFIE.

Foaia matematică, Anul I. No. 7. Iulie 1924. Chișinău. Rezolvarea generală a unor probleme de divizibilitate, de CĂP. I. LINTES.

Revista matematică din Timișoara. Anul IV. No. 5. Iunie 1924. Timișoara. Relațiuni între unghiurile unui triunghi, de T. POPOVICIU.

Revista Artileriei. Anul XXXVII. No. 8. Iunie 1924. Timișoara, Influența ploaiei asupra bătăii, de CĂP. I. LINTES.

Anales de la Sociedad Científica Argentina. Tomul XCVII. Ianuarie—Aprilie 1924. Buenos Aires. Iuțea undelor de supratensiune în instalațiunile electrice, de E. FASSENDER. Sborul planat, de L. M. DINNELLI. Câteva observațiuni asupra teoriei relativității, de B. FISCH.

Journal de mathématique élémentaires par H. Vuibert. Anul 48. No. 18. Iunie No. 19, 20. Iulie 1924. Paris. Asupra unei noi interpretări geometrice a unui sistem de ecuații de gradul întâiu, de J. CROISSARD.

Journal matematic. Volumul I. No. 12. Iunie 1924. Arad. Către cititori, de T. POPOVICIU. (Se anunță încetarea apariției și o viitoare înviere). Teoreme asupra poligoanelor regulate, de TIBERIU POPOVICIU.

Bulletin of the American mathematical Society. Vol. XXX. No. 3—4. Martie—Aprilie 1924. New-York. A 16-a Adunare regulată a Secțiunii din Sud-Vest, de E. B. STOUFFER. Probleme în transformările involuționale ale spațiului, de V. SYDNER. O generalizare a silogismului, de B. A. BERNSTEIN. O anumită formă quadratică chinară, de E. T. BELL. Invariantii formelor sub grupul binar linear omogen G_6 modulul 2, de O. E. GLENN. Aplicarea teoriei idealelor la analiza Diofantină, de G. E. WAHLIN. În memoria lui ARTHUR DUNN PITCHER. Lecțiunile colloquim ale lui EVANS, de I. A. BARNETT. Funcțiunile algebrice ale lui H. W. E. JUNG, de E. S. ALLEN. Operile lui KLEIN, vol. III, de V. SNYDER. Geometria diferențială a lui BIANCHI, de L. P. EISENHART. Rapoartele Comisiunii internaționale pentru învățământul matematicilor și studiul lui W. LOREY asupra instrucțiunii în Universitățile germane, de R. C. ARCHIBALD.

Bulletin de la Section scientifique de l'Académie Roumaine. Asupra structurii atmosferei solare joase, zisă cromosfera, de N. DONICI și E. von PAHLEN. Iluminarea crepusculară dela 2 Iulie 1923, de N. DONICI. Asupra legii asimptotice a câtorva clase de valori caracteristice, de T. LALESCU.

C E R E R I.

113. În Biblioteca liceului „Brătianu” din Pitești, se găsește o carte de pe la 1668 scrisă de THOMAS HOBBS. Un capitol este intitulat: „*Problemata Physica, una cum Magnitudine circuli & duplicatione cubi, ad Rëgem*”.

Ce se știe despre cunoștințele matematice ale acestui filosof?

F. NEGRETZU.

114. S'a arătat undevă cum se poate găsi cătăl a doi determinanți?

F. NEGRETZU.

PROBLEME REZOLVATE.

PROBLEMA 2319 *). Să se rezolve în numere întregi ecuația :

$$x^3 + y^3 + z^3 = 4^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

x, y, z fiind termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

GH. I. DUMITRESCU.

Soluție dată de D-nii: GH. ALDEA, ANTON CEZAR PARTENI, ALFRED ARNOLD, RADU AUGUSTIN, ALEX. TH. BĂDĂRĂU, V. I. BĂ-

*) O altă soluție a acestei probleme a mai fost publicată la pag. 89, vol. XXIII.

DULESCU, RADU BELIAN, H. BERLINBLUM, AVRAM BRENER, CORNELIU A. BULGĂREANU, VICTOR CEAUȘOGLU, V. CERNAT, CRONBERG, HORIA CUȘUTĂ, MIȘU DAVIDESCU, I. DAVIDSOHN, I. A. DEMIR, AURELIU DIMITRIU, TR. DINULESCU, AL. FLORESCU, VICTOR G. GEORGEACOPOL, G. GEORGESCU, ST. D. GHIOLU, SORIN GOROVEI, E. GRIGORESCU, L. HAHN, MIHAI D. HANGAN, ALEX. JUSTER, V. C. LUNGU, L. KAHANE, SEB. KAUFMANN, ALEXANDRU KIWOVICZ, D-TRU M. LĂZĂRESCU, IOAN M. LĂZĂRESCU, M. GHERMĂNESCU, ȘTEFAN MANOIL, ALEX. MANOLIU, P. MELAS, ȘT. NEGOESCU, VASILE NEGULESCU, DORIN I. NICOLAESCU, C. NICOLAU, ȘTEFAN NICOLESCU, O. ORĂNESCU, I. PANTOLEON, RADU I. PETTEU, VALERIU PINTILESCU, ALEXANDRU POPESCU, ALEXANDRU N. POPESCU, MORITZ REINHORN, G. ROSENBERG, H. SCHAPIRA, JEAN SILBERMAN, CONST. ȘTEFĂNESCU, LUCA L. TEODORIU, ALEXANDRU D. TRIANDOF, PAUL TUDORAN, IOAN N. VELESCU, ADRIAN VLĂDESCU, DAVID I. VOGEL și ȘTEFAN VORONCA.

Fie: $x = t - r$, $y = t$, $z = t + r$ trei numere în progresie aritmetică. Fiindcă x , y , z sunt întregi, rezultă că t și r sunt și ei întregi. Conform enunțului, avem :

$$(t - r)^3 + t^3 + (t + r)^3 = 16 + (t - r)^2 + t^2 + (t + r)^2$$

$$\dots \quad 3t^3 + 6tr^2 = 16 + 3t^2 + 2r^2.$$

Putem scrie încă :

$$2r^2(3t - 1) + t^2(3t - 1) = 16 + 2t^2,$$

$$\dots \quad (1) \quad 2r^2 + t^2 = \frac{8 + t^2}{3t - 1}.$$

Trebuie să satisfacem în numere întregi această relație.

Primul membru fiind pozitiv, trebuie și al 2-lea să fie pozitiv, deci: $t \geq 1$. Trebuie apoi ca $(3t - 1)$ să dividă pe $(8 + t^2)$ sau pe 2. Ori, dacă t este par, $(3t - 1)$ este impar și n'ar putea divide pe $(8 + t^2)$ care este impar.

Rămâne numai ca $(3t - 1)$ să dividă pe 2, adică $3t - 1 = 2$ și deci $t = 1$. În acest caz, relația (1) devine :

$$2r^2 + 1 = 9$$

și deci: $r = \pm 2$. Atunci deducem: $x = -1$, $y = 1$, $z = 3$ sau: $x = 3$, $y = 1$, $z = -1$.

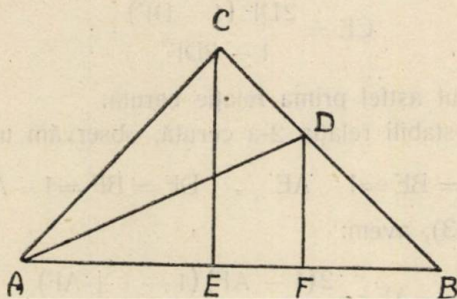
Observare. Mulți din corespondenții de mai sus sunt azi cu studiile terminate, fiind profesori, ingineri sau militari distinși, unii fiind membri la «Gazeta Matematică».

PROBLEMA 2349. În triunghiul ABC , în care $AB = 1$, $\angle A < 90^\circ$ și $\angle B = 45^\circ$, se duce bisectoarea AD a unghiului A și perpendicularele CE și DF pe latura AB . Să se stabilizească relațiunile:

$$CE = \frac{2DF(1-DF)}{1-2DF^2} \quad \text{și} \quad AE = \frac{2AF-1}{4AF-2AF^2-1}.$$

V. ALACI.

Soluție dată de D-nii: ALFRED ARNOLD, RADU S. AUGUSTIN, SORIN CARNABEL, V. CERNAT, H. D. CIOCEANU, ION CONSTANTINESCU, IOAN COȘEREANU, VICTOR CRONBERG, MIȘU I. DAVIDESCU, AURELIU DIMITRIU, DOBRESCU BĂBICI, GH. I. DUMITRESCU, AL. FLORESCU, GHEORGHE GEORGESCU, MIHAIL GHERMĂNESCU, MIHAI D. HANGAN, GH. G. IONESCU, I. V. IONESCU, ALEX. JUSTER, L. KAHANE, P. MELAS, CAMIL I. MITESCU, ILIE M. NEGULESCU, A. TH. NICOLAU, V. I. NICULESCU, ȘTEFAN NICULESCU, O. ORĂRESCU, THEODOR I. PINTEA, TIBERIU POPOVICIU, G. RIZESCU, LUCA TEODORIU, NICULAE VĂLEANU și ȘT. VORONCA.



AD fiind bisectoară în triunghiul CAB , avem:

$$AB/AC = DB/DC.$$

Cum $AB = 1$, $DC = BC - DB$, rezultă:

$$(1) \quad 1/AC = DB/(BC - DB).$$

Triunghiurile dreptunghice BDF și BCE sunt și isoscele, fiindcă $\angle B = 45^\circ$, atunci

$$BF = DF, \quad BE = CE$$

și din ele deducem:

$$\overline{DB}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{BF}^2 = 2\overline{DF}^2 \quad \text{și} \quad \overline{BC}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{EB}^2 = 2\overline{CE}^2,$$

de unde:

$$DB = DF\sqrt{2}, \quad BC = CE\sqrt{2}.$$

Atunci (1) devine:

$$(2) \quad \frac{1}{AC} = \frac{DF\sqrt{2}}{CE\sqrt{2} - DF\sqrt{2}} = \frac{DF}{CE - DF}.$$

Din triunghiul dreptunghic ACE, rezultă însă:

$$\overline{AC}^2 = \overline{CE}^2 + (1 - CE)^2 = 2\overline{CE}^2 - 2CE + 1.$$

Ridicând relația (2) la patrat și înlocuind valoarea găsită pentru $\overline{AC}^2$, găsim:

$$\frac{1}{2\overline{CE}^2 - 2CE + 1} = \frac{\overline{DF}^2}{\overline{CE}^2 - 2CE \cdot DF + \overline{DF}^2}$$

$$\therefore \quad \overline{CE}^2 - 2CE \cdot DF = 2\overline{CE}^2 \cdot \overline{DF}^2 - 2CE \cdot \overline{DF}^2,$$

$$\text{sau:} \quad \overline{CE}^2 (1 - 2\overline{DF}^2) = 2CE \cdot DF (1 - DF).$$

Simplificând cu CE, deducem:

$$(3) \quad CE = \frac{2DF(1 - DF)}{1 - 2\overline{DF}^2}.$$

Am obținut astfel prima relație cerută.

Pentru a stabili relația 2-a cerută, observăm ușor, pe figură:

$$CE = BE = 1 - AE, \quad DF = BF = 1 - AF,$$

substituind în (3), avem:

$$1 - \overline{AE} = \frac{2(1 - AF)(1 - 1 + AF)}{1 - 2(1 - AF)^2}.$$

...

$$\overline{AE} = 1 - \frac{2AF(1 - \overline{AF})}{4\overline{AF} - 2\overline{AF}^2 - 1} = \frac{2AF - 1}{4\overline{AF} - 2\overline{AF} - 1}$$

și avem astfel a 2-a relație cerută.

Altă soluție. AD fiind bisectoara unghiului A, notând:

$$\sphericalangle BAD = \alpha, \text{ rezultă că: } \sphericalangle BAC = 2\alpha.$$

Observând acum că $AD = 1$ și $\sphericalangle B = 45^\circ$, putem scrie:

$$(4) \quad \begin{aligned} sp\ 2\alpha &= CE, & cp\ 2\alpha &= AE \\ sp\ \alpha &= DF, & sp\ \alpha &= AF, \end{aligned}$$

unde $sp\ \alpha$ și $cp\ \alpha$ înseamnă sinusul patratic și cosinusul patratic ale arcului α .

Am demonstrat însă în articolul „Studiul unor funcțiuni periodice care admit o formulă de adițiune în raport cu ele însăși» din «G. M.», anul XVII, No. 7, pag. 244, că:

$$sp\ 2\alpha = \frac{2\ sp.\ \alpha\ (1 - sp\ \alpha)}{1 - sp^2\ \alpha},$$

$$cp\ \alpha = \frac{2\ cp\ \alpha - 1}{4\ cp\ \alpha - 2\ cp^2\ \alpha - 1}.$$

Folosind relațiile (4), aceste relații devin:

$$CE = \frac{2\ DF\ (1 - DF)}{1 - DF^2}, \quad AE = \frac{2\ AF - 1}{4\ AF - 2\ AF^2 - 1},$$

adică tocmai relațiile cerute.

Observare. Mulți din corespondenții de mai sus, sunt azi cu studiile terminate, fiind profesori, ingineri sau militari distinși, unii fiind membri la «G. M.».

V. A.

PROBLEMA 2650. *Se trage cu aceeași gură de foc și sub aceleași unghiuri de tragere, două proiectile, cu încărcături diferite, la interval de 6 secunde.*

Ce distanță va fi între cele două proiectile la un moment dat t ?

Discuție.

Să se studieze cazul când încărcăturile sunt aceleași, însă variază unghiul de tragere.

CĂPITAN I. LINTES.

Fie x_1, y_1 coordonatele la momentul t ale primului proiectil și x_2 și y_2 ale celui de al doilea. Dacă proiectilele sunt trase cu încărcături diferite, înseamnă că vitezele inițiale ale celor două proiectile vor fi diferite. Fie deci v_1 și v_2 cele două viteze inițiale, cu care sunt asvârlite proiectilele. În vid, vom avea ecuațiile :

Pentru primul proiectil :

$$1) \quad \begin{cases} x_1 = v_1 t \cos \alpha \\ y_1 = v_1 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Pentru al doilea proiectil :

$$2) \quad \begin{cases} x_2 = v_2 (t - \theta) \cos \alpha \\ y_2 = v_2 (t - \theta) \sin \alpha - \frac{1}{2} g (t - \theta)^2 \end{cases}$$

unde α este unghiul de tragere și g accelerația gravitației.

Fie d distanța în momentul t între cele două proiectile, atunci :

$$3) \quad d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

și înlocuind valorile coordonatelor, găsim :

$$4) \quad d^2 = (v_1 - v_2)^2 t^2 + [2 v_2 \theta + (2 - \theta) g \theta (v_1 - v_2) \sin \alpha] t + v_2^2 \theta^2 + g \theta^2 (2 - \theta) v_2 \sin \alpha + g \theta^2 [1 - g \theta + \frac{1}{2} g \theta^2].$$

Cum $v_1, v_2, \theta, \alpha, g$ sunt constante, înseamnă că d^2 variază parabolic, fiind de forma :

$$d^2 = A t^2 + B t + C.$$

Minimul lui d^2 va fi când :

$$5) \quad t = \frac{2 v_2 \theta + g \theta (2 - \theta) (v_1 - v_2) \sin \alpha}{2 (v_1 - v_2)^2},$$

valoare care ne dă și minimul lui d .

Dacă se presupune că *încărcăturile sunt aceleași*, adică $v_1 = v_2 = v_0$, și unghiurile de tragere diferite, α_1 și α_2 , atunci, la un moment dat t , coordonatele celor două proiectile vor fi :

$$6) \quad \begin{cases} x_1 = v_0 t \cos \alpha_1 \\ y_1 = v_0 t \sin \alpha_1 - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

și

$$7) \quad \begin{cases} x_2 = v_0 (t - \theta) \cos \alpha_2 \\ y_2 = v_0 (t - \theta) \sin \alpha_2 - \frac{1}{2} g (t - \theta)^2. \end{cases}$$

Inlocuind acum în 3) valorile acestor coordonate, găsim :

$$8) \quad d^2 = 2[v_0^2 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] t^2 - [2v_0^2 - 2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + g] t + (v_0^2 + \frac{1}{2}g) t^2$$

unde presupunem că $\alpha_1 > \alpha_2$.

Aceasta ne arată că, și în acest caz, d^2 variază parabolic, având minimumul pentru :

$$9) \quad t = \frac{g}{4[v_0^2 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]}$$

CĂPITAN I. LINTES.

PROBLEMA 2849. Să se rezolve și să se discute ecuațiunea

$$x^4 + 2ax^3 + 2bx^2 + a(2b - a^2)x + \lambda = 0.$$

LOCOT. COL. GH. BUCLIU.

Soluție dată de D-l GH. D. POPESCU (Șc. Politehnică din București).

Conform Notei D-lui LOCOT. COL. GH. BUCLIU din *Revista Matematică din Timișoara*, vol. IV pag. 53, discuția ecuației

$$(1) \quad x^4 + px + q = 0,$$

este rezumată în tabloul

$$p^2 - 4q \geq 0 \quad \begin{cases} p < 0 \text{ și } q > 0, \dots 4 \text{ răd. reale} \\ q < 0 \text{ » } p \text{ ori cum, } 2 \text{ răd. reale și } 2 \text{ imaginare.} \\ p > 0 \text{ » } q > 0, \dots 4 \text{ răd. imaginare.} \end{cases}$$

$$p^2 - 4q < 0 \quad \dots \dots \dots 4 \text{ rădăcini imaginare.}$$

Făcând transformarea

$$x = y - a/2,$$

ecuația dată devine

$$(2) \quad y^4 + \left(2b - \frac{3a^2}{2}\right) y^2 + \frac{5a^4}{16} - \frac{a^2 b}{2} + \lambda = 0.$$

Apropiind pe (2) de (1) se vede că

$$p = 2b - \frac{3a^2}{2} \quad ; \quad q = \frac{5a^4}{16} - \frac{a^2 b}{2} + \lambda$$

$$p^2 - 4q = (2b - a^2)^2 - 4\lambda.$$

Referindu-ne la nota citată, discuția ecuației (2) și deci a celei date, este următoarea :

a) Toate rădăcinile vor fi reale când vom avea simultan :

$$(2b - a^2)^2 - 4\lambda > 0 \quad \dots \quad 4\lambda < (2b - a^2)^2 \quad (3)$$

$$2b - \frac{3a^2}{2} < 0 \quad \dots \quad b < \frac{3a^2}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5a^4}{16} - \frac{a^2b}{2} + \lambda > 0 \quad \dots \quad 2a^2b - \frac{5a^4}{4} < 4\lambda \quad (5).$$

Pentru a contopi neegalitățile (3) și (5), e destul a compara termenii cari nu conțin pe 4λ . Pentru aceasta, scriem

$$2a^2b - \frac{5a^4}{4} \geq (2b - a^2)^2$$

$$\dots \quad 0 \geq (4b - 3a^2)^2$$

Atâta timp cât a și b sunt reali, nu putem avea decât

$$0 < (4b - 3a^2)^2$$

și deci

$$(6) \quad 2a^2b - \frac{5a^4}{4} < (2b - a^2)^2.$$

Cu aceasta, relațiunile (3), (4) și (5) devin

$$(7) \quad 2a^2b - \frac{5a^4}{4} < 4\lambda < (2b - a^2)^2$$

$$(8) \quad b < 3a^2/4.$$

b) Ecuațiunea dată va avea 2 rădăcini reale și 2 imaginare când vom avea

$$\frac{5a^4}{16} - \frac{a^2b}{2} + \lambda < 0$$

$$\dots \quad 4\lambda < 2a^2b - \frac{5a^4}{4},$$

oricare ar fi relația de mărime între a și b .

c) Toate rădăcinile vor fi imaginare, când vom avea

$$(9) \quad 2b - \frac{3a^2}{2} > 0 \quad \dots \quad \frac{3a^2}{4} < b$$

$$(10) \quad \frac{5a^4}{16} - \frac{a^2b}{2} + \lambda > 0 \quad \therefore \quad 2a^2b - \frac{5a^4}{4} < 4\lambda,$$

sau când

$$(11) \quad (2b - a^2)^2 - 4\lambda < 0 \quad \therefore \quad (2b - a^2)^2 < 4\lambda.$$

Ținând seamă de (6), condițiunile (9), (10), (11) se exprimă prin

$$(12) \quad 3a^2/4 < b \quad \text{și} \quad (2b - a^2)^2 < 4\lambda.$$

$$d) \text{ Când} \quad 4\lambda = 2a^2b - 5a^4/4,$$

ecuația (2) se reduce la

$$y^2 \left(y^2 + 2b - \frac{3a^2}{2} \right) = 0,$$

care are toate rădăcinile reale, numai dacă

$$b < 3a^2/4.$$

$$e) \text{ Când} \quad 4\lambda = (2b - a^2)^2,$$

ecuațiunea (2) se reduce la

$$\left[y^2 - \left(\frac{3a^2}{4} - b \right) \right]^2 = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt reale cu condiția (8).

Discuția de până aici se rezumă în următorul tablou, în care

$$A = 2a^2b - \frac{5a^4}{4} \quad \text{și} \quad B = (2b - a^2)^2,$$

iar λ variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

4λ	$-\infty$	A		B	$+\infty$
Felul rădăcinilor	2 reale 2 imagi- nare	2 nule 2 reale sau imaginare	4 reale	2 rădăcini egale și de semne con- trare reale sau imagi- nare	4 imagi- nare.

Observațiuni. 1°. Soluțiunile primite nu au discuția completă și, în parte, nici exactă. Citez pe :

D-nii : M. ADAM, M. H. BRĂTESCU-DANUBIU și A. TAUBER cari au pus ecuațiunea sub forma

$$(x^2 + ax)^2 + (2b - a^2)(x^2 + ax) + \lambda = 0$$

D-nii : L. IONESCU și M. BOGDAN (Lc. Caracal), cari în colaborare, au pus

$$x = y + h$$

au anulat coeficientul lui y^3 și au ajuns la ecuația (2), pe care însă n'au discutat-o.

2°. D-l E. ȘTEFĂNESCU a întrebuițat tot transformarea

$$x = y - a/2,$$

dar n'a făcut discuția complet.

3°. Dacă la ecuația dată în enunț, se adună și se scade a^2x^2 și $\left(\frac{2b-a^2}{2}\right)^2$,

ea se transformă în

$$\left(x^2 + ax + \frac{2b-a^2}{2}\right)^2 + \left[\lambda - \left(\frac{2b-a^2}{2}\right)^2\right] = 0,$$

a cărei discuție se face cu ușurință.

GHI. B.

PROBLEMA 2853. Se trage cu o gură de foc, în vid, două proiectile cu unghiurile de tragere α_1 și α_2 și cu vitezele inițiale v_1 și v_2 .

Se cere :

a) Cum trebuie să fie α_1 față de α_2 și v_1 față de v_2 , astfel ca cele două traectorii, fiind în același plan vertical, să se intersecteze într'un punct I diferit de origină ?

b) În ce caz un al treilea proiectil tras cu aceeași gură de foc, cu unghiul de tragere α_3 și viteza inițială v_3 , trece prin același punct I ?

c) Să se studieze cazul când :

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \quad \text{și} \quad v_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2).$$

CĂPITAN I. LINTES.

a) Ecuațiile celor două traectorii sunt :

$$1) \quad y = x \operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{gx^2}{2v_1^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1).$$

$$2) \quad y = x \operatorname{tg} \alpha_2 - \frac{gx^2}{2v_2^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2),$$

unde g este accelerația gravitației.

Pentru ca aceste două traectorii să se intersecteze într'un punct diferit de origină, I , coordonatele lui vor fi soluțiunile sistemului 1) și 2).

Dar din 1) și 2), deducem că:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{gx}{2v_1^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1) = \operatorname{tg} \alpha_2 - \frac{gx}{2v_2^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2),$$

de unde:

$$\dot{x} = \frac{2(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1)}{g \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}{v_2^2} - \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}{v_1^2} \right)}.$$

Trebuie ca $x > 0$, pentru ca I să fie real și prin urmare:

I) Dacă $\alpha_2 > \alpha_1$, atunci va trebui să avem și:

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}{v_2^2} > \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}{v_1^2},$$

adică:

$$v_1 \geq v_2.$$

II) Dacă $\alpha_2 < \alpha_1$, atunci, în acelaș mod, se deduce că va trebui să avem:

$$v_1 \leq v_2.$$

b) Ecuația unui al treilea proiectil tras cu elementele α_3 și v_3 , va fi:

$$3) \quad y = x \operatorname{tg} \alpha_3 - \frac{gx^2}{2v_3^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_3).$$

Punând și aici condițiunile succesive, ca traectoria 1) să se întâlnească cu 2), apoi cu 3), și 2) cu 3), vom forma următorul tabel de condiții:

$\alpha_1 > \alpha_2$	$\alpha_2 < \alpha_1$	Traectoria 1) cu 2)
$v_1 \geq v_2$	$v_1 \leq v_2$	
$\alpha_3 > \alpha_1$	$\alpha_3 < \alpha_1$	1) cu 3)
$v_1 \geq v_3$	$v_1 \leq v_3$	
$\alpha_3 > \alpha_2$	$\alpha_3 < \alpha_2$	2) cu 3)
$v_2 \geq v_3$	$v_2 \leq v_3$	

De aci — urmând o progresie a indicilor elementelor de tragere — obținem condițiunile :

$$\begin{array}{c|c} \alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1 & \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 \\ v_1 \geq v_2 \geq v_3 & v_1 \leq v_2 \leq v_3 \end{array}$$

pentru ca cele trei traectorii să se întâlnească.

In concluzie : pentru ca cele trei traectorii să se poată întâlni într'un punct diferit de origină, trebuie condiția : dacă unghiurile de tragere sunt în progresie crescătoare, vitezele inițiale să fie în progresie descrescătoare și invers¹⁾.

Observare : Condițiunile de intersecție s'ar fi obținut scriind determinantul de condiție între coeficienții celor trei ecuațiuni.

c) In cazul când

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \quad \text{și} \quad v_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2),$$

știm că dacă $a < b$, atunci

$$a < \frac{a+b}{2} < b,$$

prin urmare, vom avea :

$$\alpha_2 > \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} > \alpha_1$$

$$\text{și} \quad v_2 < \frac{v_1 + v_2}{2} < v_1$$

sau invers ; așa dar, în acest caz, cele trei traectorii pot fi concurente într'un punct diferit de origină.

Observare : Acelaș caz ar fi fost și când :

$$\alpha_3 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \quad \text{și} \quad v_3 = \sqrt{v_1 v_2},$$

sau

$$\alpha_3 = \frac{2\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad \text{și} \quad v_3 = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2},$$

adică în cazul mediei geometrice sau armonice.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

1) Această proprietate a dat naștere obuzierelor și mortierelor în artilerie.

PROBLEMA 2880. Se ştie că pentru a ghici o carte aleasă de cineva dintr'un pachet de 21 de cărţi, se procedează în felul următor: se împart cărţile în trei pachete egale, aceste pachete se suprapun, punând la mijloc pachetul cu cartea aleasă, apoi se fac din nou 3 pachete egale. Se suprapun aceste pachete, punându-se la mijloc pachetul care conţine cartea aleasă şi se refac pentru a 3-a oară 3 pachete egale. Se pune la mijloc pachetul care conţine cartea aleasă şi se numără dela fundul pachetului 11 cărţi. Cartea a 11-a este cartea aleasă.

Să se demonstreze că atunci când vom avea $3(2n+1)$ cărţi, făcând aceleaşi operaţii, vom găsi cartea aleasă numărând după ultima operaţie $2+3n$ cărţi dela fund. Când vom avea $6n$ cărţi, va trebui să numărăm $3n$ sau $3n+1$ cărţi după ultima operaţie. Când vom număra $3n$ şi când $3n+1$ cărţi? Există o lege analoagă şi pentru cazul când numărul cărţilor nu este multiplu de 3?

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Soluţia acestei probleme este cuprinsă în soluţia problemei 2453, aşă cum este generalizată în *Gazeta Matematică* Vol. XXIX, pagina 61. În adevăr:

1) Când avem $3(2n+1)$ cărţi, suntem în cazul n nepereche al problemei 2453. Cartea aleasă se va găsi numărând

$$\frac{3(2n+1)+1}{2} = 2 + 3n,$$

după ultima operaţie.

2) Când avem $6n$ cărţi, cartea aleasă se va găsi numărând

$$\frac{1}{2} 6n + 1 = 3n + 1 \text{ sau } \frac{1}{2} 6n = 3n,$$

după cum $3n \geq m$; m fiind rangul cărţii în grupul respectiv la primul aranjament.

3) Legea cerută pentru cazul $n \neq$ multiplu de 3 este chiar problema 2453.

Notă. 1°. La problema 2880, am primit trei soluţii parţiale. Rezolvitorii, ale căror nume au fost anunţate pe copertele numerelor anterioare, s'au pus în cazul particular

$$3(2n+1) = 52$$

şi au redus problema la cea cunoscută şi enunţată în problemă. De aceea, nu-mai menţionez aici.

2°. In octombrie 1921, când am propus problema 2880, nu aveam cunoștință de problema 2453, propusă în septembrie 1916, căci din cauza unei lungi absențe din țară, nu citisem numerele „Gazetei Matematice” cu începere dela 15 noiembrie 1914. Am luat cunoștință de apropierea dintre cele 2 probleme prin o comunicare datată 16 noiembrie 1921, făcută de D-l M. GHERMĂNESCU, unul din propunătorii problemei 2453. Recunosc întâietatea D-lor M. GHERMĂNESCU și G. NICULESCU asupra generalizării acestei chestiuni, dar nu renunț la paternitatea asupra problemei 2880.

GH. B.

PROBLEMA 3032. Fie (c, d) și (a, b) două perechi de numere prime între ele. Să se demonstreze că dacă

$$\frac{c}{d} = \frac{ma + nb}{pa + qb},$$

atunci avem și

$$\frac{a}{b} = \frac{nd - qc}{pc - md},$$

iar diferența $np - mq$ este egală cu produsul dintre c. m. m. c. d. al termenilor primei fracții și c. m. m. c. d. al termenilor ultimei fracții; m, n, p , și q sunt numere întregi.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-nii: I. B. FLORESCU (Șc. Politehnică, București); I. S. TEODORESCU (Absolvent Lc. Ploiești); A. TAUBER (Lc. Botoșani); M. ADAM, ȘT. MARIN (Lc. Constanța); O. POPEA (Lc. Chișinău); E. ȘTEFĂNESCU (Lc. Spiru Haret, București); I. DRAGOMIR, C. TOMESCU (Lc. Cantemir, București); W. SOLOMON (Lc. Matei Basarab, București) și P. KATZ (Lc. Comunității Israelite, Galați).

Din prima relație, deducem succesiv:

$$\begin{aligned} pac + qbc &= mad + nbd \\ pac - mad &= nbd - qbc \\ a(pc - md) &= b(nd - qc), \end{aligned}$$

care este tocmai relația a doua.

D și D' fiind c. m. m. c. d. respectivi ai termenilor primei și ai celei de-a doua fracțiune, avem:

$$ma + nb = Dc \quad \text{și} \quad nd - qc = D'a.$$

$$\therefore D = \frac{ma + nb}{c} \quad \text{și} \quad D' = \frac{nd - qc}{a}$$

$$\therefore DD' = np - mq.$$

Observațiuni. 1°. D-l A. TAUBER observă că fracția a doua se deduce din prima, chiar când (c, d) , (a, b) nu ar fi prime între ele. Această condiție este însă necesară pentru demonstrarea părții a doua a problemei.

2°. D-l W. SOLOMON observă că dacă

$$\frac{c}{d} = \frac{ma - nb}{pa - qb}, \quad \text{atunci} \quad \frac{a}{b} = \frac{qc - nd}{pc - md}.$$

D-sa a examinat și alte relațiuni analoage.

PROBLEMA 3103. *Să se demonstreze că numărul divizorilor lui $1.2....n$ este cel mult 2^{n-1} .*

A. TAUBER.

Soluție dată de D-l M. ADAM (Constanța).

Să presupunem că avem un număr de forma :

$$N = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n,$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ factori primi sunt egali între ei, atunci evident că numărul divizorilor lui N va fi :

$$1) \quad n(N) = (\alpha + 1)(\beta + 1) \dots (\lambda + 1) 2^{n-(\alpha+\beta+\dots+\lambda)},$$

care reprezintă expresia generală a numărului divizorilor unui număr de forma dată în problemă.

Căutând maximum lui 1), adică numărul maxim de divizori pe care îl poate avea un număr de forma lui N , găsim că trebuie să avem :

$$\alpha = \beta = \gamma = \dots = \lambda = 0,$$

adică toți factorii a_i să fie primi și atunci :

$$n(N)_{\text{maxim}} = 2^n.$$

Pentru cazul problemei, $a_1 = 1$, și neglijându-l, avem:

$$n(N)_{\text{maxim}} = 2^{n-1}.$$

Soluție dată de D-nii : T. ANGELESCU (Giurgiu), C. IONESCU (Cantemir Vodă), AL. MLADENOVICI (cl. V r. particular), M. PĂ-

TROIANU, G. SIMIONESCU (Lic. Milit. Mănăstirea Dealului) și EM. ȘTEFĂNESCU.

Considerăm numerele: $2, 3, 4, \dots, n$, atunci cu aceste numere se vor forma atâți divizori câte grupe de produse de câte: *unu, doi, trei, ..., (n-1), n*, se vor forma, plus 1.

Dar cum produsul a: *două, trei, ..., n-i* numere pot da un număr cuprins în acel șir, urmează dar că numărul divizorilor va fi *cel mult egal* cu numărul:

$$n(N) = C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1} + 1 = 2^{n-1}.$$

Observațiune. 1. Pentru cazul de față, $n(N) = 2^{n-1}$, numai când $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$; pentru $n > 6$ avem:

$$n(N) < 2^{n-1}.$$

Observația aceasta au făcut-o numai D-nii: M. ADAM și GH. SIMIONESCU.

2. Numărul exact al divizorilor unui număr de forma:

$$N = n!$$

se poate astfel afla:

Se descompune numărul în factori primi:

$$n! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \dots \cdot p^l$$

unde notând cu $E(I)$ întregii cuprinși în I , (notația lui LEGENDRE), avem:

$$a = E\left(\frac{n}{2}\right) + E\left(\frac{n}{2^2}\right) + \dots + E\left(\frac{n}{2^\alpha}\right)$$

$$\text{unde } \alpha = E\left[\frac{\log n}{\log 2}\right]$$

$$b = E\left(\frac{n}{3}\right) + E\left(\frac{n}{3^2}\right) + \dots + E\left(\frac{n}{3^\beta}\right)$$

$$\text{unde } \beta = E\left[\frac{\log n}{\log 3}\right]$$

$$l = E\left(\frac{n}{p}\right) + E\left(\frac{n}{p^2}\right) + \dots + E\left(\frac{n}{p^\pi}\right)$$

$$\text{unde } \pi = E\left[\frac{\log n}{\log p}\right]$$

(De obicei $\pi = 1$).

În acest mod, calculați fiind exponenții $a, b, c, \dots, l$, avem:

$$n(N) = (a+1)(b+1)\dots(l+1).$$

3. D-l T. ANGELESCU, afirmă că dacă:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= n(n!) & \text{și} & & \eta_1 &= 2^{n-1} \\ \eta_2 &= n(n!!) & \text{și} & & \eta_2 &= 2^{2n-1} - 1. \\ & \dots & & & & \\ & \dots & & & & \end{aligned}$$

Aceasta nu se poate preciza însă, deoarece urmând soluțiunea problemei 3103, găsim că:

$$\eta_2 = 2^{n!-1}$$

etc....

4. Mulți corespondenți, în soluțiunile trimise, s'au mărginit să raționeze astfel:

Dacă:

$$N = 2.3.4 \dots n$$

atunci:

$$n(N) = \underbrace{(1+1)(1+1)\dots(1+1)}_{\text{de } n-1 \text{ ori}}$$

Aceasta, conform regulei de găsierea numărului divizorilor, pe care le-o recomand s'o mai revadă odată, dar mai cu atenție.

5. Un corespondent ne trimite o simplă verificare pentru $n = 1, 2, 3, 4, 5$ și 6 ; și conchide apoi că problema e adevărată și pentru celelalte valori (?!).

CĂPITAN I. L.

PROBLEMA 3120. *Să se demonstreze că, în orice triunghi, avem relațiunile:*

$$- a \cotg A + b \cotg B + c \cotg C = 2(r_a - R)$$

$$a \cotg A - b \cotg B + c \cotg C = 2(r_b - R)$$

$$a \cotg A + b \cotg B - c \cotg C = 2(r_c - R)$$

Adunând, parte cu parte, aceste trei relațiuni, obținem o relațiune cunoscută.

GH. D. POPESCU.

I. Soluție dată de D-nii: MIRCEA I. ADAM, N. P. ARCADIAN, OVIDIU C. POPEA, TRAIAN N. ANGELESCU, MARIN ȘTEFAN, N. I. NICOLESCU, M. CH. BOGDAN, PAUL BLEIWEISS, I. S. TEODORESCU, I. COȘEREANU, VICTOR LEPĂDATU, MARTINIAN P. BOGDAN, M. I. FOCȘENEANU, S. GH. TUDORACHE, EMIL ȘTEFĂNESCU, DORIN POPESCU, MARIN GH. DUMITRESCU, TRAIAN TUNARU, M. I. PĂTROIANU, ADRIAN NOVAC, MARIUS GEORGESCU, C. GIURUMESCU, EUGEN GEORGESCU, OCTAV H. BURSTIN, B. A. REINHORN.

Se cunosc relațiile :

$$2R \cos A = 2R + r - r_a \quad \text{și} \quad 2R \sin A = a,$$

care, prin împărțire, ne dau : $a \cotg A = 2R + r - r_a$.

Analog obținem relațiile :

$$b \cotg B = 2R + r - r_b, \quad c \cotg C = 2R + r - r_c.$$

Avem deci, ținând seamă că $r_b + r_c = 4R + r - r_a$,

$$-a \cotg A + b \cotg B + c \cotg C = 2R + r + r_a - (r_b + r_c) = 2(r_a - R).$$

Analog, demonstrăm celelalte două relații.

Adunând, parte cu parte, cele trei relații, găsim :

$$\Sigma a \cotg A = 2(r_a + r_b + r_c - 3R) = 2(R + r),$$

relație cunoscută (*Culegere de Probleme, Trigonometria XIX. 4*).

II. Soluție dată de D-nii : B. M. BARBĂLLAT, GH. I. GROFȘOREANU, CONST. I. GEORGESCU, GH. I. GHIMICESCU, HORIA A. VARLAM, FILIP S. GOLDSTEIN, PAUL I. BLEIWEISS, ȘTEFAN EPURE, ADRIAN A. BUȘILĂ, DAVID BLUMENFELD, LEON WEISS, MIRCEA A. VASILESCU, M. I. STAMATIU, S. I. RINGLER, I. GOLDSTEIN, LEON BRÜLL, V. I. DORNEANU, LEON CĂLDĂRARU.

Se știe că avem relațiunea :

$$-\cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C - 1.$$

Dacă înmulțim termenii din ambele părți ale acestei relații respectiv cu

$$a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2R$$

și ținem seamă de relația $r_a = 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C$, căpătăm prima relație din enunț. Analog cu celelalte.

III. Soluție dată de D-nul I. N. GEORGESCU-VAL. În virtutea formulelor :

$$\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}A, \quad \sin A = 2 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A,$$

prima relație din enunț se poate scrie :

$$-a \left(\frac{1}{\sin A} - \operatorname{tg} \frac{1}{2}A \right) + b \left(\frac{1}{\sin B} - \operatorname{tg} \frac{1}{2}B \right) + c \left(\frac{1}{\sin C} - \operatorname{tg} \frac{1}{2}C \right) = 2(r_a - R).$$

Dar, $a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C = 2R$; deci

$$a \operatorname{tg} \frac{1}{2}A - b \operatorname{tg} \frac{1}{2}B - c \operatorname{tg} \frac{1}{2}C = 2(r_a - 2R).$$

Ori: $a \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = r_a - r_b$, etc., și înlocuind obținem relația clasică

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

Au dat bune soluții, analoage cu soluția I sau II, D-nii: ȘT. FL. LĂZĂRESCU, I. P. ILIESCU, MIRCEA GH. STAVRAT, ILIE IONESCU-BREZUICA, I. TH. POPOVICI, PETRE G. SPACU, ANGELO IONESCU, V. VÂRLAN, VIRGIL GHÎȚESCU, P. A. MIRESCU, M. H. BRĂTESCU-DANUBIU, C. C. BĂRBULESCU, D. M. TEODORESCU, A. GH. PANAITESCU, LAURENȚIU L. VLAȚIU, C. BERDAN, VIRGIL COȘNIȚĂ.

Alte soluții de D-nii: TR. UDRISKY, RADU D. CĂDERE, ED. C. RUSSU, MARCEL L. GOLDSTEIN, EMIL A. BERCOVICI, N. G. BOTEAN, CORNELIU C. IONESCU, V. C. GABRIELESCU, EUGEN PĂLĂRIERU, ION C. VASILIU, PAUL I. IONESCU, D. SAMOILĂ, EMILIAN POPP, P. KATZ, ROMEO MIHĂILESCU, MIRCEA I. SIMIONESCU, GH. D. SIMIONESCU, SOLOMON WEISS, AL. CH. MLADENOVICI.

PROBLEMA 3132. Să se arate că:

$$\alpha^2! = \mathcal{M}(\alpha!)^{\alpha+1},$$

α fiind un număr întreg și pozitiv.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

I. Soluție și generalizare dată de D-l M. ADAM (Constanța).

Este evident că produsul a m numere consecutive se va împărți prin $m!$, adică

$$q(q+1)(q+2) \dots (q+m-1) = \mathcal{M}(m!).$$

În cazul nostru, avem:

$$\alpha^2! = 1.2.3 \dots (\alpha-1) \alpha (\alpha+1) \dots 2\alpha (2\alpha+1) \dots \alpha^2.$$

Fiecare din grupele cuprinse între $\alpha - 2\alpha$, $2\alpha - 3\alpha$, ... sunt divizibile cu $(\alpha-1)!$, adică:

$$(m\alpha+1)(m\alpha+2) \dots [(m+1)\alpha-1] = \mathcal{M}(\alpha-1)!$$

Deci scoatem α factoriali de $(\alpha-1)$, și ne mai rămâne produsul:

$$\alpha.2\alpha.3\alpha \dots \alpha^2 = \alpha^\alpha \cdot \alpha!,$$

așa că cei α factoriali de $(\alpha-1)$ se completează cu α^α și devin factoriali de α . În total avem $(\alpha+1)$ factoriali de $\alpha!$, deci:

$$\alpha^2! = \mathcal{M}(\alpha!)^{\alpha+1}.$$

Urmând aceeași cale găsim :

$$(\alpha^2 + 1)(\alpha^2 + 2) \dots \alpha^3 = \mathcal{M}(\alpha!)^{\alpha^2}$$

$$(\alpha^3 + 1)(\alpha^3 + 2) \dots \alpha^4 = \mathcal{M}(\alpha!)^{\alpha^3}$$

și în general :

$$(\alpha^n + 1)(\alpha^n + 2) \dots \alpha^{n+1} = \mathcal{M}(\alpha!)^{\alpha^n}.$$

Deci, în general, problema se poate pune sub forma :

$$\alpha^n! = \mathcal{M}(\alpha!)^{1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{n-1}},$$

sau

$$\alpha^n! = \mathcal{M}(\alpha!)^{\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}}.$$

II. Altă generalizare, dată de D-nii : O. G. POPEA, GHEORGHE GH. MIHOC, T. POPOVICI.

Să ne propunem a demonstra că :

$$\alpha^n! = \mathcal{M}(\alpha!)^{\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}}.$$

Pentru aceasta, observăm mai întâi, că cel mai mare exponent al lui α , care divide produsul $\alpha^n!$, este :

$$\beta = E\left(\frac{\alpha^n}{\alpha}\right) + E\left(\frac{\alpha^n}{\alpha^2}\right) + \dots + 1$$

$$\beta = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \dots + 1$$

$$= \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}.$$

Prin urmare :

$$\alpha^n! = \mathcal{M}(\alpha)^{\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}}.$$

Să vedem acum care este cel mai mare exponent al unui număr $\alpha - i$, care divide produsul $\alpha^n!$.

Avem :

$$\lambda_i = E\left[\frac{\alpha^n}{\alpha - i}\right] + E\left[\frac{\alpha^n}{(\alpha - i)^2}\right] + \dots + E\left[\frac{\alpha^n}{(\alpha - i)^m}\right],$$

unde presupunem că :

$$E \left[\frac{\alpha^n}{(\alpha - i)^m} \right] = 1;$$

atunci, cu siguranță, vom avea $m > n$.

Dar observăm că :

$$E \left[\frac{\alpha^n}{(\alpha - i)} \right] > \alpha^{n-1}$$

$$E \left[\frac{\alpha^n}{(\alpha - i)^2} \right] > \alpha^{n-2}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$E \left[\frac{\alpha^n}{(\alpha - i)^{m-k}} \right] > 1,$$

prin urmare:

$$\lambda_i > \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}.$$

Așa dar, vom avea :

$$\alpha^n ! = \mathcal{M}_i (\alpha - i)^{\alpha_i};$$

a fortiori, vom avea și

$$\alpha^n ! = \mathcal{M}_i (\alpha - i)^{\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}}.$$

Ori, dând lui i valori dela 1 pânăla $(\alpha - 1)$, vom conchide lesne că :

$$\alpha^n ! = \mathcal{M}_1 (\alpha - 1)^{\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}}$$

$$\alpha^n ! = \mathcal{M}_2 (\alpha - 2)^{\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha^n ! = \mathcal{M}_1 (1)^{\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}}.$$

Ținând seamă și de diviziunea cu $\alpha^{\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}}$, vedem că :

$$\alpha^n ! = \mathcal{M}_1 (\alpha !)^{\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}}.$$

VI. Soluție dată de D-nii: MARIN ȘTEFAN, N. BOTEA, DORIN POPESCU, AL. MLADENOVICI, LEON BRÜLL, B. REINHORN, OZIAS SCHÄCHTER, GH. IONESCU-ZANE.

Scrim pe $\alpha^2!$ astfel:

- 1) $1.2.3 \dots \alpha$
- 2) $(\alpha+1)(\alpha+2) \dots 2\alpha$
- 3) $(2\alpha+1)(2\alpha+2) \dots 3\alpha$
-
-
- $\alpha)$ $[(\alpha-1)\alpha+1][(\alpha-1)\alpha+2] \dots \alpha.\alpha.$

Ori fiecare din rândurile 1), 2), ... $\alpha)$ sunt produse de α numere consecutive și deci divizibile fiecare cu $\alpha!$. Se mai observă apoi că ultima coloană este formată din numerele $\alpha, 2\alpha, \dots, \alpha\alpha$, prin urmare produsul lor va fi: $\alpha\alpha.\alpha!$ și deci:

$$\alpha^2! = \mathcal{M}(\alpha!)^{\alpha+1}.$$

Observație. D-l ȘTEFAN MARIN a generalizat problema urmând o cale analogă cu soluția IV.

Notă. Iată o altă formă ce se poate da problemei:

Să se arate că:

$$\frac{(\alpha n)!}{(\alpha!)^n} = \mathcal{M} n!$$

În adevăr, urmând analog cu soluția IV, vom vedea că obținem n linii de numere consecutive, al căror produs este divizibil cu $\alpha!$, deci produsul tuturor va fi divizibil cu $(\alpha!)^n$. Apoi ultima coloană va fi compusă din numerele $\alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha$, deci produsul lor va fi divizibil și cu $n!$ și atunci (αn) va fi divizibil cu $(\alpha!)^n.n!$

Când $\alpha = n$, suntem în cazul prob. 3132. Tot așa se poate arăta că:

$$\frac{(\alpha.\beta.\gamma)!}{(\alpha!)^{\beta\gamma}} = \mathcal{M}(\beta\gamma)!,$$

sau:

$$\frac{(\alpha.\beta.\gamma)!}{[(\alpha\beta)!]^{\gamma}} = \mathcal{M}\gamma!$$

Putem astfel obține expresiuni oricât de generale.

De altfel, din teorema lui M. WEILL, stabilită de F. G. TEIXEIRA în Bull. Soc. math. France 9 (1880) pag. 172, se deduce că:

$$\frac{(\alpha n)!}{(\alpha!)^n} = \mathcal{M} n!$$

Apoi D. ANDRÉ, în C. R. Acad. sc. Paris 94 (1882) pag. 426, afirmă că expresiunea $(\alpha n)!/(\alpha!)^n$ se divide chiar cu o putere a lui $n!$, pe care în urmă (1883), A. DE POLIGNAC a determinat-o mai exact, dar pe care eu nu o pot da aici, deoarece în Buletinul, din care am luat citațiunile de mai sus, nu este dat. Ar fi interesant însă pentru corespondenții G. M. să cerceteze cu ce putere a lui $n!$ se divide

$$\frac{(\alpha n)!}{(\alpha!)^n} ?$$

CĂPIT. I. LINTEȘ.

EXERCITIIL.

110. Se cer patratele de patru cifre la care numărul format de ultimele două cifre este produsul primelor două.

F. G. POPESCU.

R. Luăm ultimele două cifre, care pot termina un patrat și care se pot descompune în produs de două cifre. Avem: $01=1 \times 1$; $21=3 \times 7$; $81=9 \times 9$; $04=1 \times 4=2 \times 2$; $64=8 \times 8$; $25=5 \times 5$; $16=2 \times 8=4 \times 4$; $36=4 \times 9=6 \times 6$; $56=7 \times 8$; $09=1 \times 9=3 \times 3$; $49=7 \times 7$. Facem suma cifrelor și dacă este M_3 și un M_9 le suprimăm; suprimăm pe cele ce sunt M_3+2 și mai rămân 21; 81; 04; 1×4 ; $36=4 \times 9$; $09=1 \times 9$; 49. Am putea avea 3721; 7321; 9981; 1404; 4104; 4936; 9436; 1909; 9109; 7743. Extrăgând rădăcina, găsim numai $3721=61^2$.

111. Se cer patratele de trei cifre ale căror răsturnate sunt tot patrate.

G. TAILER.

R. Luăm numerele de două cifre care pot termina un patrat și le scriem înainte o cifră, așa că răsturnatul primelor două să termine cu un patrat. Procedăm la eliminare cu M_3 și M_3+2 . Găsim soluțiile:

$$\begin{array}{ll} 169 = 13^2, & 144 = 12^2, \\ 961 = 31^2, & 441 = 21^2. \end{array}$$

112. Se cere un număr de trei cifre, așa că produsul ultimelor două cifre să fie numărul format de primele două, iar jumătatea acestui număr este produsul cifrelor extreme.

O. M. FLORESCU.

R. Avem ecuațiile:

$$10s + z = zu \quad ; \quad \frac{1}{2}(10s + z) = su.$$

De aci ese imediat $z = 2s$ și prima ecuație dă $6 = u$. De aci soluțiile 126; 246; 366; 486.

113. Să se demonstreze că :

$$|a - b| \geq ||a| - |b||.$$

P. SERGESCU.

R. Fie $a = \alpha + i\beta$, $b = \gamma + i\delta$. Inegalitatea revine la :

$$(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2 \geq [\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}]^2$$

$$\alpha\gamma + \beta\delta \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2},$$

care se reduce la inegalitatea evidentă

$$(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 \geq 0.$$

114. Să se demonstreze relațiunea

$$\frac{a(rb - rc)}{rb + rc} + \frac{b(rc - ra)}{rc + ra} + \frac{c(ra - rb)}{ra + rb} = 0.$$

MARIN ȘTEFAN.

R. Relațiunile cunoscute

$$rb = 4R \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} A, \quad rc = 4R \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B, \text{ ne dau}$$

$$rb - rc = 4R \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} (B - C), \quad rb + rc = 4R \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} (B + C) = 4R \cos^2 \frac{1}{2} A.$$

$$\begin{aligned} \text{Deci } \sum \frac{a(rb - rc)}{rb + rc} &= 2R \sum \frac{\sin A \sin \frac{1}{2} (B - C)}{\cos \frac{1}{2} A} = 4R \sum \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} (B - C) \\ &= 4R \sum \cos \frac{1}{2} (B + C) \sin \frac{1}{2} (B - C) = 2R \sum (\cos B - \cos C) = 0. \end{aligned}$$

115. Să se demonstreze, că într'un triunghi u oarecare, avem relațiunea

$$\sum \frac{ab}{c} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} A + \operatorname{tg} \frac{1}{2} A}{(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C)} = \frac{2r}{R} (r + 4R).$$

MAURICIU GHELBER.

R. Ne servim de relațiunile

$$a = r_a (\operatorname{tg} \frac{1}{2} B + \operatorname{tg} \frac{1}{2} C), \text{ etc.}, \quad a = h_a (\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C), \text{ etc.}$$

Prima parte a relației devine atunci

$$\begin{aligned} \sum \frac{ab}{c} \cdot \frac{c}{rc} \cdot \frac{h_a h_b}{ab} &= \sum \frac{h_a h_b}{rc} = \sum \frac{4S^2}{abr_c} = \frac{4S}{abc} \sum c(p - c) \\ &= \frac{4S}{4RS} [2p^2 - (a^2 + b^2 + c^2)] = \frac{1}{R} (2r^2 + 8Rr) = \frac{2r}{R} (r + 4R). \end{aligned}$$

PROBLEME PROPUSE.

3201. Care sunt perechile de fracții cu numărători și numitori mai mici ca 10, al căror produs se poate obține împărțind suma numărătorilor prin suma numitorilor ?

I. IONESCU.

3202. Să se găsiască patrate perfecte, ale căror cifre micșorate toate cu câte o unitate, să ne dea tot patrate perfecte.

O. POPEA.

3203. Câte cifre are numărul :

$$N = 5^{5^5} ?$$

TABLA DE MATERII

A. ANTOHIE

A. ANTOHIE

1. Introducere 1

2. Scopul lucrării 2

3. Metodologia cercetării 3

TABLA DE MATERII

4. Rezultatele cercetării 4

5. Concluzii 5

6. Bibliografie 6

7. Anexa 7

8. Concluzii 8

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE.

Aritmetica.

	Pag.
<i>Căpitan I. Linteș.</i>	O problemă și o teoremă asupra indicatorilor . . . 16
<i>Wilhelm I. Solomon.</i>	O problemă de Aritmetică 368
<i>Căpitan I. Linteș.</i>	O proprietate a indicatorilor de ordin superior 444

Geometria.

<i>Constantin I. Georgescu.</i>	Proprietăți ale unui triunghi important . . . 82
<i>Grigore C. Moisiț.</i>	Teoreme asupra triunghiului 162, 205, 281
<i>Mihail I. Focșeneanu.</i>	O generalizare a teoremei lui <i>Franke</i> 167
<i>Alexandru I. Guțu.</i>	Asupra dreptelor lui <i>Simson</i> , tangente la cercul celor nouă puncte 286

Algebra.

<i>Ing. N. Kaufmann.</i>	Rezolvarea unui sistem de ecuații 123
<i>I. Ionescu.</i>	Elemente a calcului practic 241
<i>Th. Angheluță.</i>	Asupra determinantului simetric stâng 324
<i>N. Abramescu.</i>	Asupra unei teoreme a lui <i>Hermite</i> 442

Geometria Analitică.

<i>Ernest Abason.</i>	O chestiune de Geometrie Analitică 81
<i>N. Abramescu.</i>	Asupra spiralei logaritmice 322
<i>A. Angelescu.</i>	O proprietate funcțională comună cercului și spi- ralei logaritmice 364

Mecanica.

<i>Locot. I. Linteș.</i>	Asupra cronografului <i>Joly</i> 43
<i>Căpitan I. Linteș.</i>	Ecuațiile traectoriei unui proiectil în aer . . . 406

Analiza.

<i>A. Angelescu.</i>	Asupra unei formule a lui <i>Hermite</i> 201
----------------------	--

Diverse.

<i>Ioan G. Bușilă,</i>	} Premiile și alte dispozițiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice“ 12
<i>Gh. Em. Filănescu.</i>	
<i>I. Vardala, G. Nichifor.</i>	
<i>Tr. Lalescu.</i>	
	Regulamentul premiului „Vasile Conta“ 14
	Unul din primii profesori de Matematică mun- teni: Simeon Marcovici 41
<i>Delegația societății.</i>	Concursul „Gazetei Matematice“ 84
<i>Tr. Lalescu.</i>	Câteva date asupra lui Simion Marcu, zis apoi Marcovici, ca profesor de Matematică . . . 121

Lt. Col. Gh. Buicliu,	}	Raportul Comisiunii pentru acordarea premiului	
Ing. N. Georgescu,		de matematici aplicate la științele militare, pe	
Ing.-Şef C. D. Orăşanu.	}	intervalul 1 septembrie 1922—1 august 1923	245
Gh. Em. Filipescu,		Raportul Comisiunii pentru acordarea premiului	
Ernest Abason.	}	„Inginer H. Capriel”, pe intervalul 1922—23	246
N. I. Georgescu.		† Niculae Nicolescu	361
G. Țițeica.		Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice”	362
P. Sergescu.		Cursuri de matematici la Paris, în anul școlar	
		1922—1923	401
		† Ioan D. Teodor	441

B. NOTE MATEMATICE.

1 I. Ionescu.	Alte zece aritmetici diverse	19
2 W. Solomon.	Asupra calculului puterilor asemenea a primelor n numere	19
3 Grigore Zapan.	Problema 1448 din „Suplemento al Periodico di Matematica”	20
4 D. V. Ionescu.	Asupra inegalității $1+x < e^x$ (x fiind real și pozitiv)	20
5 Gh. D. Popescu.	Un alt mijloc de demonstrație a unor teoreme dela criteriile de convergență	21
6 I. Ionescu.	Alte zece algebre diverse	47
7 Căpitan I. Linteș.	O problemă	48
8 M. Ghermănescu.	Asupra sumei puterilor asemenea ale termenilor unei progresiuni aritmetice	50
9 I. M. Șerbănescu.	Asupra problemei 2595	51
10 Th. Angheluță.	Asupra condițiilor de compatibilitate ale unui sistem liniar de ecuații	52
11 I. Al. Stoenescu.	Asupra problemei 2871, G. M., XXVII	54
12 G. D. Popescu.	Generalizarea unor serii	55
13 I. Stoenescu.	Asupra generalizării unei chestiuni dela Concursul G. M.	56
14 I. Ionescu.	Zece astronomii diverse	86
15 J. I.	Numerația sanscrită	87
16 V. V.	Asupra problemei 1128	87
17 Maior Gh. Liteanu.	Asupra problemei 3107	87
18 B. M. Barbălat.	Asupra notei 88	88
19 Tiberiu Popoviciu.	Asupra problemei 3018	89
20 Alex. V. Niculescu.	Asupra unei probleme de algebră	89
21 Stoenescu Al. I.	Asupra formulei lui Cardan	91
22 M. Ghermănescu.	Asupra curbelor triunghiulare simetrice	92
23 I. Ionescu.	Alte zece algebre diverse	129
24 Căpit. Gr. Zapan.	O nouă demonstrație a teoremei lui Fermat	130
25 I. B. Florescu.	În ce caz patrulul unui termen din șirul lui Fibonacci divide alți termeni?	131
26 Căpitan I. Linteș.	Imaginare de ordin superior	133
27 Eug. I. Ballan.	Asupra problemei 2939	134
28 P. Sergescu.	Asupra sâmburilor simetrice pozitivi $G(x, y)$	135
29 I. Ionescu.	Alte zece aritmetici diverse	170
30 M. Froim.	Generalizarea problemei 2966	170
31 O. Popea.	Asupra notei 94, din Anul XXVIII al G. M.	171
32 I. B. Florescu.	Asupra notei No. 94 din Anul XXVIII	171
33 O. N. Ț.	Asupra problemei 1730 (G. M. vol. XXVIII, pag. 410)	172
34 Căpitan I. Linteș.	O completare	173
35 Căpitan I. Linteș.	O generalizare	173
36 B. M. Barbălat.	Asupra unor proprietăți ale dreptei lui Simson	174

	Pag.
37 Micu Grünbaum. Asupra problemei 1718	174
38 M. G. Asupra problemei 2992	175
39 Adrian A. Bușilă. Generalizarea problemei 16, C. d. P. de Mecanică (Cap. I, pag. 3)	176
40 I. Ionescu. Alte zece astronomii diverse	212
41 I. Ionescu. Asupra calendarului	212
42 Alex. Tauber. Asupra problemei 2073	213
43 I. B. Florescu. Termen de ordin negativ în șirul lui Fibonacci	213
44 D. V. Ionescu. Asupra unei chestiuni propuse la Concursul „Gazetei Matematice“ din acest an	215
45 I. B. Florescu. O generalizare a șirului lui Fibonacci	213
45 Dobrescu-Băbici. Calculul sumei puterilor a n^a a numerelor naturale	248
47 N. A. Rezolvarea cuadraturei cercului de D-nul Charles Nordmann	249
48 D. V. Ionescu. Teorema ortopolului	251
49 Wilh. Solomon. O generalizare	252
50 P. Sergescu. Asupra notei 26	253
51 C. Avramescu. Asupra problemei 2336	253
52 I. Ionescu. Alte zece algebre diverse	288
53 I. Florescu. Asupra exercițiului 52, Anul XXVIII, pag. 261	289
54 Th. Angheluță. Observare asupra combinațiilor	289
55 Al. I. Panaitescu. Asupra problemei 3094	291
56 B. M. Barbălat. Asupra unor triunghiuri omologice	291
57 Căpitan I. Linteș. Asupra notei No. 24 din G. M. No. 4, XXIX	292
58 Emil Ștefănescu. Asupra rezolvării în numere întregi a ecuației: $x^2 + y^2 = z^2$	293
59 Leon Weiss. Chestiuni de limită	294
60 I. Ionescu. Alte zece mecanici diverse	328
61 Lt. Col. Gh. Buicliu. Extinderea unei observațiuni	328
62 Căpitan I. Linteș. O teoremă	329
63 M. Ghermănescu. O chestiune de examen	331
64 O. Popea, C. Ber- dan și I. Vasiliu. } O rectificare	332
65 I. Ionescu. Alte zece geometrii diverse	375
66 Căpitan I. L. Asupra articolului: O problemă cu indicatori	375
67 M. Ghermănescu. Asupra teoremei lui Fermat	376
68 Lt. Col. Gh. Buicliu. Câteva numere interesante	377
69 Corn. C. Ionescu. Asupra unei sume	411
70 M. Gh. Asupra problemei 3142	412
71 M. Ghermănescu. O generalizare a șirului lui Fibonacci	413
72 Lt. Col. Gh. Buicliu. Frații sau frângerii	413
73 Leon Weiss. Asupra problemei 22, Cap. IX. Culegere, Algebra	414
74 Alex. Tauber. Generalizarea unei probleme de Algebră	414
75 Mircea I. Adam. Exercițiul 77	415
76 N. Ciorănescu. Asupra unor produse trigonometrice	416
77 I. Ionescu. Alte zece astronomii diverse	447
78 O. Popea. Nu pot exista trei numere consecutive cu același indicator	448
79 Maior G. I. Liteanu. Asupra exercițiului No. 105	448
80 Căpitan I. Linteș. Asupra unei teoreme	448
81 Lt. Col. Gh. Buicliu. Rezolvarea în numere întregi a ecuației: $X^2 + Y^2 = Z^2$	449
82 Mircea I. Adam. Generalizarea problemei 3049	450
83 Mircea Adam. Asupra problemei 1606	451
84 Alex. Tauber. Asupra neegalității: $\sin \frac{\pi}{x} > \frac{1}{x}$ ($x > 3$)	451
85 M. Ghermănescu. Integrala lui Poisson în domeniul complex	452

C. CHESTIUNI DE EXAMEN.

	Pag.
Facultatea de Științe din București	Examenele de Algebră superioară și Analiză, din octombrie 1923
Școala Politehnică din București	Examenul de admitere în Anul I (noiembrie 1923)
Facultatea de Științe din București	Examenele de bursă (octombrie 1923)
Școala militară de artilerie	Lucrare scrisă la Balistica exterioară
Examenul de capacitate pentru profesorii de liceu	Proba de licență (aprilie 1923)
Gazeta Matematică	Concursul din 1924
Facultatea de Științe din Cluj	Examenul de Algebră superioară (iunie 1924)
Școala de Topometrie din București	Proba scrisă din Anul II (aprilie 1924)

D. BIBLIOGRAFII.

Ernest Abason.—Chestiuni de examen	22
Mathesis	23, 143, 180, 224, 256, 297
Revista de matematicas y físicas elementales	23, 58, 95, 143, 224, 256, 297, 377, 418
Journal de mathématiques élémentaires	23, 95, 143, 180, 224, 256, 297, 339, 377, 418, 453
Revista matematică din Timișoara	23, 58, 95, 143, 180, 256, 339, 378, 418, 453
Dr. Václav Hlavaty.—Varietăți cu două dimensiuni în spațiul cu patru dimensiuni	58
Otácar Boruvka.—Asupra rădăcinilor imaginare ale ecuației: $\Gamma(z)=a$	58
Dr. J. Kaucký.—Contribuțiuni la teoria ecuațiilor cu diferențe finite	58
T. Frejka & F. Balas.—Contribuțiuni la studiul constituirii acidului abietic	58
Eduard Čech.—Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine	58
B. Hostínský.—L'équilibre de l'électricité sur une surface cylindrique	58
Anales de la Sociedad científica Argentina	58, 95, 225, 339, 453
Ad. Mineur.—Cubiques anallagmatiques	58
Societatea română de Științe.—Buletinul de științe matematice pure și aplicate	95, 256
Buletinul de matematică pură și aplicată	95, 226, 297
Gh. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, Tr. Lalescu și G. Țițeica } Vocabular matematic	95
Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine	142, 226, 338, 454
Bulletin of the american mathematical society	142, 143, 224, 338, 454
H. Bosmans.—Antonio Favaro (1847—1922)	143
Y. Haag.—Cours complet de mathématiques spéciales	144
Y. Haag.—Exercices du cours de mathématiques spéciales	144
G. Verriest.—Cours de mathématiques générales	144
Șt. Cristescu.—La lumière relative et l'expérience de Michelson	145
Gaston Julia.—Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier	145
General Sc. Panăitescu.—Dela Omer la Einstein	145
Journal matematic	180, 225, 256, 297, 339, 378, 419, 453
P. Sergescu.—Sur la distribution des valeurs caractéristiques des noyaux de Marty $N(x, y) = A(x)k(x, y)$	180
E. Abasohn.—Probleme de electricitate și electrotehnică	180
Căpitan I. Linteș.—Concentrarea focurilor, contribuțiuni la întrebuințarea artileriei	180

	Pag.
Foaia matematică	224, 256, 297, 339, 377, 418, 453
„Vlăstarul“, Revista Liceului „Spiru Haret“	225, 257
Revista Artileriei	226, 256, 339, 453
Scoala Politehnică din Timișoara. Anuarul	226
Enrique Herrero Ducloux.—Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina III. Las ciencias químicas	226
Cristobal M. Hicken.—Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina VIII. Los estudios botánicos	226
J. Neuberg.—Propriété de deux tétraèdres polaires réciproques par rapport à une conique centrée	226
J. Neuberg.—Généralisation de la théorie des foyers des coniques	226
M. Kritchick.—Equations binômes	226
Georges Tzitzèica.—Géométrie différentielle projective des réseaux	226
Revista științifică „V. Adamachi“	256, 418
A. Angelesco.—Sur les zéros de certaines fonctions	257
A. Angelesco.—Sur les fonctions génératrices des polynomes d'Hermite	257
A. Angelesco.—Sur certaines équations différentielles linéaires	257
A. Angelesco.—Sur une propriété Stieltjes	257
P. Sergesco.—Extension aux noyaux symétrisables des théorèmes de M. Weyl	257
G. Naneș.—Le Calendrier	257
Anuarul Societății „Matematica Bărlădeană“	257
M. Lecat.—Bibliographie des déterminants à plus de deux dimensions	297
Șt. N. Mirea.—Notes sur le calcul des ailes d'un avion	297
Ramon G. Loyarte.—Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina. Partea II. Evolucion de la fisica	339
Maurice Lecat.—Bibliographie de la Relativité	378
N. Abramescu.—Résumé des principales propriétés des polynomes orthogonaux	379
N. Abramescu.—Sur les courbes associées des convergence des séries de polynomes à deux variables complexes	379
Ing. N. Blaha.—Proprietăți din geometria triunghiului, în legătură cu cercul lui Taylor, Lemoine, Adams, etc.	379
Căpitan Linteaș Ion.—Balistica exterioară	379
Claro Cornelio Dassen.—Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina. IV. Las matematicas en la Argentina	419
François Schacherl.—Sur l'influence de la pression sur la réfraction de l'hydrogène	419
Edouard Cech.—Etude analytique de l'élément linéaire projectif d'une surface	419
O. Boruvka.—Contribuții la teoria unor funcțiuni transcendente ale calculului integral	419
L. Seifert.—Asupra unei probleme analoage cu a lui Weddle	419
G. Fubini.—Cercetări asupra teoriei congruențelor și complexelor de drepte	419
M. Lerch.—Studii asupra reziduurilor pătratice, după un modul prim	419
David Emmanuel.—Lecțiuni de teoria funcțiilor. Partea I	419

E. CERERI.

No. cererii	Pagina la care a fost:		No. cererii	Pagina la care a fost:	
	Propusă	Dat răspuns		Propusă	Dat răspuns
90	397 (XXVII)	24, 379	109	298	
104	24		110	339	
105	58		111	Răspuns la cererea No. 90	
106	96		112	419	
107	145		113	454	
108	226		114	454	

G. PROBLEME PROPUSE.

a) Repartizarea problemelor propuse după materii.

<i>Aritmetica.</i>	3091, 3092, 3093, 3101, 3102, 3103, 3104, 3111, 3112, 3113, 3121, 3122, 3123, 3131, 3132, 3133, 3141, 3142, 3143, 3151, 3152, 3161, 3162, 3163, 3171, 3172, 3173, 3181, 3182, 3183, 3184, 3191, 3192, 3201, 3202, 3203.
<i>Geometria.</i>	3094, 3095, 3096, 3105, 3106, 3107, 3108, 3114, 3115, 3124, 3126, 3127, 3135, 3136, 3144, 3145, 3146, 3153, 3154, 3155, 3164, 3165, 3166, 3174, 3175, 3176, 3185, 3186, 3187, 3193, 3194, 3195, 3204, 3205, 3206.
<i>Algebra.</i>	3097, 3098, 3109, 3110, 3117, 3118, 3128, 3129, 3134, 3138, 3147, 3148, 3149, 3156, 3157, 3158, 3167, 3168, 3169, 3177, 3178, 3188, 3196, 3197, 3207, 3208, 3209.
<i>Trigonometria.</i>	3088, 3099, 3116, 3119, 3120, 3125, 3137, 3139, 3159.
<i>Geometria analitică.</i>	3170, 3179, 3199, 3210.
<i>Mecanica.</i>	3100, 3130, 3140, 3150, 3160, 3180, 3190, 3200.
<i>Analiza.</i>	3189.

b) Indicarea paginei la care a fost propusă sau rezolvată.

<i>Pagina la care a fost:</i>			<i>Pagina la care a fost:</i>		
No. Problemei	Propusă ¹⁾	Rezolvată ²⁾	No. Problemei	Propusă ¹⁾	Rezolvată ²⁾
171 . . .	{ 76 (II) 198 (XVI)	NR	1008 . . .	{ 244 (X) 462 (XVI)	NR
485 . . .	{ 104 (V) 198 (XVI)	NR	1056 . . .	100 (XI)	NR
581 . . .	{ 148 (VI) 51 (XI) 238 (XVI)	NR	1058 . . .	100 "	NR
585 . . .	{ 172 (VI) 238 (XVI)		1083 . . .	172 "	NR
676 . . .	{ 148 (VII) 196 (VII)		1092 . . .	196 "	NR
691 . . .	{ 278 (XVI)	NR	1146 . . .	76 (XII)	NR
766 . . .	{ 124 (VIII) 319 (XVI)		1156 . . .	100 "	
825 . . .	{ 288 (VIII) 358 (XVI)		1162 . . .	124 "	NR
886 . . .	{ 172 (IX)	NR	1178 . . .	172 "	NR
887 . . .	{ 172 " 358 (XVI)	NR	1180 . . .	172 "	NR
914 . . .	267 (IX)	NR	1188 . . .	228 "	
944 . . .	52 (X)	NR	1214 . . .	296 "	NR
1000 . . .	{ 220 (X) 438 (XVI)	NR	1236 . . .	64 (XIII)	NR
			1270 . . .	192 "	NR
			1271 . . .	192 "	NR
			1287 . . .	256 "	NR
			1297 . . .	288 "	NR
			1299 . . .	319 "	NR
			1307 . . .	320 "	
			1310 . . .	352 "	

1) Numărul latin din paranteză indică volumul colecției, s. ex. 172 (VI), înseamnă că problema 585 a fost propusă la pag. 172 din volumul VI; problemelor mai vechi nerezolvate încă, sau rectificate, li s'a publicat din nou enunțul, s. ex: problema 585 s'a mai publicat la pag. 238 vol. XVI.

2) NR înseamnă că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru acelea în dreptul cărora nu e trecut niciun număr, redacția posedă soluțiuni bune care nu au fost încă publicate.

Pagina la care a fost :

No. problemei Propusă¹⁾ Rezolvată²⁾

1333 . . .	{ 32 (XIV)	
1342 . . .	{ 198 (XVIII)	
1343 . . .	64 (XIV)	
1355 . . .	96	NR
1364 . . .	128	NR
1367 . . .	128	NR
1377 . . .	160	NR
1379 . . .	160	NR
1384 . . .	191	NR
1386 . . .	192	NR
1398 . . .	224	NR
1399 . . .	{ 224	NR
1412 . . .	{ 200 (XVI)	NR
1424 . . .	256 (XIV)	NR
1434 . . .	228	NR
1434 . . .	320	NR
1450 . . .	352	NR
1482 . . .	64 (XV)	NR
1489 . . .	96	
1490 . . .	96	123
1497 . . .	128	
1500 . . .	128	
1511 . . .	160	
1533 . . .	224	
1534 . . .	224	
1553 . . .	288	NR
1563 . . .	320	
1564 . . .	320	
1576 . . .	352	
1577 . . .	352	
1584 . . .	{ 372	NR
1587 . . .	{ 158 (XX)	NR
1591 . . .	372 (XV)	NR
1591 . . .	39 (XVI)	
1608 . . .	80	
1626 . . .	159	NR
1632 . . .	159	
1637 . . .	160	NR
1650 . . .	200	NR
1656 . . .	239	
1676 . . .	279	NR
1679 . . .	280	NR
1690 . . .	320	
1702 . . .	360	
1711 . . .	399	
1729 . . .	440	NR
1733 . . .	463	NR
1734 . . .	463	
1735 . . .	464	NR
1753 . . .	80 (XVII)	NR
1764 . . .	120	NR
1773 . . .	160	
1778 . . .	199	

Pagina la care a fost :

No. problemei Propusă¹⁾ Rezolvată²⁾

1782 . . .	200 (XVII)	
1783 . . .	200	339
1790 . . .	240	NR
1799 . . .	280	
1807 . . .	320	
1823 . . .	400	
1831 . . .	439	
1835 . . .	440	NR
1840 . . .	466	
1858 . . .	78 (XVIII)	
1876 . . .	119	NR
1882 . . .	120	NR
1884 . . .	{ 158	
1891 . . .	{ 200	NR
1892 . . .	160	
1898 . . .	160	
1898 . . .	199	
1905 . . .	200	NR
1906 . . .	200	NR
1911 . . .	239	
1914 . . .	{ 239	NR
1922 . . .	{ 280	
1929 . . .	278	
1929 . . .	279	NR
1933 . . .	280	
1934 . . .	{ 280	
1937 . . .	{ 320	
1937 . . .	318	
1944 . . .	319	NR
1945 . . .	320	NR
1948 . . .	358	
1949 . . .	358	NR
1958 . . .	359	
1959 . . .	360	NR
1968 . . .	399	
1969 . . .	399	
1973 . . .	{ 400	NR
1976 . . .	{ 461	
1979 . . .	431	
1979 . . .	431	NR
1983 . . .	432	
1986 . . .	462	
1987 . . .	462	NR
1991 . . .	38 (XIX)	
2003 . . .	40	NR
2004 . . .	40	NR
2016 . . .	79	NR
2017 . . .	80	NR
2018 . . .	80	
2024 . . .	118	
2025 . . .	119	
2031 . . .	120	
2032 . . .	120	NR
2035 . . .	159	

Pagina la care a fost:

No. problemei	Propusă ¹⁾	Rezolvată ²⁾
2038 . . .	159 (XIX)	
2048 . . .	198 "	
2055 . . .	200 "	
2056 . . .	200 "	
2058 . . .	200 "	
2063 . . .	238	
	280 "	
2065 . . .	239 "	
2070 . . .	240 "	NR
2074 . . .	278 "	NR
2079 . . .	279 "	
2081 . . .	279 "	
2083 . . .	280 "	
2091 . . .	319 "	
2096 . . .	320 "	
2097 . . .	320 "	
2106 . . .	358 "	
2108 . . .	359 "	
2110 . . .	359 "	
2111 . . .	360 "	NR
2112 . . .	360 "	NR
2116 . . .	398 "	
2117 . . .	398 "	
2118 . . .	399 "	
2122 . . .	399 "	379
2129 . . .	438 "	
2130 . . .	460 "	
2133 . . .	439 "	
2138 . . .	439 "	
2144 . . .	461 "	
2145 . . .	462 "	
2147 . . .	462 "	
2170 . . .	119 (XX)	NR
2176 . . .	120 "	
2187 . . .	160 "	
2191 . . .	197 "	
2194 . . .	197 "	
2197 . . .	198 "	
2203 . . .	199 "	
2217 . . .	239 "	
2222 . . .	240 "	
2227 . . .	279 "	
2233 . . .	280 "	
2234 . . .	280 "	
2235 . . .	280 "	
2240 . . .	318 "	
2247 . . .	320 "	
2248 . . .	320 "	
2249 . . .	320 "	
2250 . . .	320 "	
2263 . . .	359 "	
2264 . . .	360 "	
2265 . . .	360 "	
2266 . . .	360 "	

Pagina la care a fost:

No. problemei	Propusă ¹⁾	Rezolvată ²⁾
2274 . . .	398 (XX)	
2278 . . .	399 "	
2281 . . .	400 "	
2282 . . .	400 "	
2284 . . .	439 "	
2289 . . .	439 "	
2290 . . .	439 "	
2295 . . .	461 "	
2298 . . .	462 "	
2300 . . .	462 "	NR
2301 . . .	462 "	
2302 . . .	462 "	
2308 . . .	{ 39 (XXI)	
	{ 80 "	
2311 . . .	40 "	
2318 . . .	{ 79 "	
	{ 160 "	
2319 . . .	79 "	454
2320 . . .	79 "	
2329 . . .	118 "	
2330 . . .	118 "	
2332 . . .	119 "	
2336 . . .	120 "	24
2337 . . .	120 "	
2338 . . .	120 "	
2340 . . .	157 "	58
2343 . . .	157 "	
2344 . . .	158 "	
2346 . . .	158 "	
2347 . . .	158 "	NR
2349 . . .	159 "	456
2353 . . .	159 "	NR
2354 . . .	198 "	
2356 . . .	199 "	
2357 . . .	199 "	
2358 . . .	199 "	
2359 . . .	199 "	
2360 . . .	199 "	
2365 . . .	200 "	
2366 . . .	200 "	60
2370 . . .	239 "	
2375 . . .	240 "	
2377 . . .	240 "	
2380 . . .	278 "	
2381 . . .	278 "	
2382 . . .	278 "	
2383 . . .	278 "	
2386 . . .	279 "	
2390 . . .	280 "	
2391 . . .	280 "	NR
2392 . . .	280 "	NR
2394 . . .	318 "	
2395 . . .	318 "	NR
2396 . . .	319 "	

Pagina la care a fost :

No. problemei	Propusă ¹⁾	Rezolvată ²⁾
2397 . . .	319 (XXI)	
2398 . . .	319	"
2402 . . .	320	"
2405 . . .	320	"
2408 . . .	359	" NR
2414 . . .	360	" NR
2416 . . .	360	"
2421 . . .	399	"
2422 . . .	399	" NR
2423 . . .	399	"
2428 . . .	439	" NR
2430 . . .	439	" NR
2431 . . .	439	"
2434 . . .	440	" NR
2435 . . .	440	"
2436 . . .	440	"
2439 . . .	440	" NR
2440 . . .	459	" NR
2443 . . .	459	" NR
2444 . . .	459	" NR
2448 . . .	460	" NR
2453 . . .	31 (XXII)	61
2456 . . .	31	" NR
2458 . . .	32	"
2459 . . .	32	"
2461 . . .	32	" NR
2462 . . .	62	" NR
2466 . . .	63	" NR
2469 . . .	63	" NR
2471 . . .	64	" NR
2473 . . .	64	" 342
2477 . . .	95	" NR
2478 . . .	95	"
2479 . . .	95	" NR
2481 . . .	96	" NR
2484 . . .	96	" NR
2487 . . .	120	" NR
2491 . . .	120	" 344
2497 . . .	144	"
2500 . . .	144	" NR
2501 . . .	167	" NR
2502 . . .	167	" NR
2503 . . .	167	" NR
2510 . . .	191	" NR
2511 . . .	191	" NR
2512 . . .	192	" 382
2524 . . .	240	" NR
2529 . . .	262	" NR
2537 . . .	287	" NR
2539 . . .	288	" NR
2543 . . .	311	" NR
2544 . . .	311	" NR
2545 . . .	312	" NR
2546 . . .	312	" NR

Pagina la care a fost :

No. problemei	Propusă ¹⁾	Rezolvată ²⁾
2552 . . .	47 (XXIII)	
2553 . . .	47	"
2555 . . .	48	" NR
2556 . . .	48	" NR
2560 . . .	72	" NR
2566 . . .	120	"
2569 . . .	120	" NR
2571 . . .	144	" NR
2573 . . .	144	"
2575 . . .	168	"
2577 . . .	168	" NR
2578 . . .	168	" NR
2580 . . .	192	" NR
2582 . . .	192	" 97
2585 . . .	215	"
2586 . . .	216	"
2587 . . .	216	" NR
2591 . . .	240	" NR
2593 . . .	264	" NR
2596 . . .	288	" NR
2597 . . .	288	" NR
2598 . . .	288	"
2599 . . .	288	" NR
2600 . . .	16 (XXIV)	419
2602 . . .	16	" NR
2604 . . .	31	" 26
2605 . . .	31	"
2607 . . .	31	" NR
2608 . . .	32	" NR
2609 . . .	32	"
2610 . . .	160	"
2613 . . .	48	" 257
2615 . . .	64	" 383
2623 . . .	80	" NR
2631 . . .	112	"
2635 . . .	112	" NR
2638 . . .	127	" NR
2640 . . .	128	"
2641 . . .	128	"
2643 . . .	128	" NR
2644 . . .	143	" 298
2645 . . .	143	" NR
2647 . . .	143	" NR
2650 . . .	175	" 458
2651 . . .	176	"
2654 . . .	176	"
2655 . . .	191	" NR
2656 . . .	191	" NR
2658 . . .	191	" NR
2660 . . .	191	" NR
2661 . . .	192	"
2664 . . .	24 (XXV)	
2665 . . .	24	" NR
2669 . . .	24	" NR

Pagina la care a fost:

No. problemei Propusă¹⁾ Rezolvată²⁾

2671 . . .	48 (XXV)	NR
2674 . . .	63 "	
2675 . . .	63 "	NR
2682 . . .	64 "	
2683 . . .	79 "	
2684 . . .	80 "	NR
2686 . . .	80 "	NR
2688 . . .	80 "	
2689 . . .	80 "	
2692 . . .	108 "	NR
2693 . . .	108 "	301
2694 . . .	108 "	
2695 . . .	109 "	NR
2696 . . .	109 "	NR
2701 . . .	141 "	
2706 . . .	142 "	
2709 . . .	142 "	NR
2713 . . .	143 "	NR
2717 . . .	143 "	NR
2719 . . .	144 "	
2727 . . .	168 "	NR
2731 . . .	191 "	
2735 . . .	192 "	NR
2738 . . .	192 "	NR
2743 . . .	216 "	303
2745 . . .	216 "	NR
2747 . . .	239 "	63
2748 . . .	240 "	28
2752 . . .	264 "	100
2758 . . .	56 (XXVI)	NR
2759 . . .	56 "	181
2764 . . .	78 "	NR
2765 . . .	79 "	
2769 . . .	79 "	NR
2773 . . .	80 "	
2778 . . .	104 "	NR
2780 . . .	104 "	NR
2789 . . .	135 "	NR
2792 . . .	137 "	
2795 . . .	159 "	
2796 . . .	159 "	
2799 . . .	159 "	
2803 . . .	160 "	
2809 . . .	192 "	NR
2814 . . .	192 "	NR
2815 . . .	215 "	347
2818 . . .	216 "	
2820 . . .	216 "	
2822 . . .	216 "	
2825 . . .	247 "	100
2827 . . .	247 "	
2828 . . .	248 "	
2829 . . .	248 "	NR
2835 . . .	279 "	

Pagina la care a fost:

No. problemei Propusă¹⁾ Rezolvată²⁾

2837 . . .	279 (XXVI)	
2838 . . .	279 "	
2841 . . .	280 "	
2849 . . .	335 "	461
2850 . . .	335 "	
2851 . . .	335 "	
2853 . . .	336 "	464
2856 . . .	38 (XXVII)	
2860 . . .	39 "	
2861 . . .	40 "	
2864 . . .	40 "	
2865 . . .	70 "	NR
2872 . . .	71 "	
2874 . . .	72 "	348
2875 . . .	72 "	101
2879 . . .	102 "	
2880 . . .	103 "	467
2886 . . .	104 "	NR
2887 . . .	104 "	227
2888 . . .	104 "	NR
2889 . . .	104 "	NR
2891 . . .	143 "	
2895 . . .	143 "	
2898 . . .	144 "	
2899 . . .	183 "	
2902 . . .	183 "	NR
2905 . . .	184 "	182
2906 . . .	184 "	
2909 . . .	221 "	NR
2910 . . .	221 "	
2912 . . .	222 "	NR
2913 . . .	222 "	
2915 . . .	222 "	
2916 . . .	223 "	NR
2918 . . .	224 "	
2920 . . .	262 "	
2922 . . .	263 "	
2923 . . .	302 "	349
2926 . . .	264 "	NR
2928 . . .	303 "	185
2929 . . .	303 "	
2931 . . .	303 "	
2932 . . .	304 "	
2936 . . .	343 "	NR
2937 . . .	343 "	29
2945 . . .	375 "	68
2946 . . .	375 "	
2947 . . .	376 "	NR
2950 . . .	416 "	
2952 . . .	416 "	101
2953 . . .	416 "	
2955 . . .	416 "	
2956 . . .	416 "	NR
2959 . . .	448 "	

Pagina la care a fost:

No. problemei	Propusă ¹⁾	Rezolvată ²⁾
2960 . . .	448 (XXVII)	
2961 . . .	448	NR
2965 . . .	38 (XXVIII)	
2969 . . .	39	
2970 . . .	39	388
2971 . . .	39	
2972 . . .	40	
2974 . . .	40	
2977 . . .	79	
2978 . . .	79	
2980 . . .	79	
2983 . . .	79	
2985 . . .	80	
2986 . . .	80	
2991 . . .	119	
2993 . . .	119	
2994 . . .	119	
2995 . . .	120	NR
2996 . . .	120	
2999 . . .	120	
3000 . . .	120	
3003 . . .	159	
3005 . . .	159	NR
3007 . . .	159	
3008 . . .	160	258
3010 . . .	160	264
3012 . . .	199	187
3013 . . .	199	NR
3014 . . .	199	190
3017 . . .	200	
3019 . . .	200	NR
3021 . . .	239	
3022 . . .	239	59
3023 . . .	239	265
3024 . . .	239	
3025 . . .	239	229
3026 . . .	239	32
3030 . . .	240	
3031 . . .	278	
3032 . . .	278	468
3034 . . .	279	
3035 . . .	279	72
3036 . . .	279	146
3037 . . .	279	105
3038 . . .	280	34
3039 . . .	280	147
3040 . . .	280	
3041 . . .	319	
3042 . . .	319	NR
3043 . . .	319	351
3044 . . .	319	423
3045 . . .	319	NR
3046 . . .	320	
3047 . . .	320	

Pagina la care a fost:

No. problemei	Propusă ¹⁾	Rezolvată ²⁾
3048 . . .	320 (XXVIII)	306
3050 . . .	320	74
3051 . . .	359	191
3052 . . .	359	
3053 . . .	360	
3054 . . .	360	
3055 . . .	360	NR
3056 . . .	360	
3057 . . .	360	107
3058 . . .	360	109
3059 . . .	360	
3060 . . .	360	NR
3061 . . .	398	35
3062 . . .	398	
3063 . . .	399	307
3064 . . .	399	267
3065 . . .	399	37
3066 . . .	399	271
3067 . . .	438	
3068 . . .	400	110
3069 . . .	400	NR
3070 . . .	400	
3071 . . .	439	
3072 . . .	439	352
3073 . . .	439	
3074 . . .	439	151
3075 . . .	439	NR
3076 . . .	439	194
3077 . . .	440	391
3078 . . .	440	
3079 . . .	440	111
3080 . . .	440	308
3081 . . .	479	
3082 . . .	479	
3083 . . .	480	
3084 . . .	480	
3085 . . .	480	
3086 . . .	480	
3087 . . .	480	309
3088 . . .	480	232
	(118 (XXIX)	
3089 . . .	480 (XXVIII)	NR
3090 . . .	480	NR
3091 . . .	39 (XXIX)	
3092 . . .	39	
3093 . . .	40	
3094 . . .	40	113
3095 . . .	40	
3096 . . .	40	NR
3097 . . .	40	
3098 . . .	40	
3099 . . .	40	154
3100 . . .	40	
3101 . . .	79	425

Pagina la care a fost :

No. problemei Propusă¹⁾ Rezolvată²⁾

3102 . . .	79 (XXIX)	
3103 . . .	79	469
3104 . . .	79	"
3105 . . .	79	234
3106 . . .	80	195
3107 . . .	80	NR
3108 . . .	80	"
3109 . . .	80	"
3110 . . .	80	"
3111 . . .	118	"
3112 . . .	119	NR
3113 . . .	119	"
3114 . . .	119	NR
3115 . . .	119	"
3116 . . .	119	273
	158	
3117 . . .	120	"
3118 . . .	120	"
3119 . . .	120	275
3120 . . .	120	471
3121 . . .	159	"
3122 . . .	159	"
3123 . . .	159	354
3124 . . .	159	235
3125 . . .	159	428
3126 . . .	159	"
3127 . . .	159	NR
3128 . . .	160	"
3129 . . .	160	NR
3130 . . .	160	310
3131 . . .	199	NR
3132 . . .	199	473
3133 . . .	199	"
3134 . . .	199	NR
3135 . . .	200	"
3136 . . .	200	"
3137 . . .	200	311
3138 . . .	200	"
3139 . . .	200	"
3140 . . .	200	NR
3141 . . .	238	NR
3142 . . .	238	393
3143 . . .	239	313
3144 . . .	239	"
3145 . . .	239	"
3146 . . .	239	432
3147 . . .	239	"
3148 . . .	240	NR
3149 . . .	240	"
3150 . . .	240	NR
3151 . . .	279	"
3152 . . .	279	"
3153 . . .	318	"
3154 . . .	279	435
3155 . . .	279	"

Pagina la care a fost :

No. problemei Propusă¹⁾ Rezolvată²⁾

3156 . . .	279 (XXIX)	
3157 . . .	280	"
3158 . . .	280	"
3159 . . .	280	"
3160 . . .	280	NR
3161 . . .	318	NR
3162 . . .	318	"
3163 . . .	319	NR
3164 . . .	319	NR
3165 . . .	319	NR
3166 . . .	320	437
3167 . . .	320	"
3168 . . .	320	"
3169 . . .	320	NR
3170 . . .	320	"
3171 . . .	358	NR
3172 . . .	358	"
3173 . . .	358	"
3174 . . .	359	"
3175 . . .	359	NR
3176 . . .	359	NR
3177 . . .	359	NR
3178 . . .	360	"
3179 . . .	360	NR
3180 . . .	360	NR
3181 . . .	399	NR
3182 . . .	399	"
3183 . . .	399	NR
3184 . . .	399	NR
3185 . . .	399	NR
3186 . . .	400	NR
3187 . . .	400	NR
3188 . . .	400	"
3189 . . .	400	NR
3190 . . .	400	NR
3191 . . .	439	NR
3192 . . .	439	NR
3193 . . .	439	NR
3194 . . .	439	NR
3195 . . .	439	NR
3196 . . .	439	NR
3197 . . .	440	NR
3198 . . .	440	NR
3199 . . .	440	NR
3200 . . .	440	NR
3201 . . .	479	NR
3202 . . .	479	NR
3203 . . .	479	NR
3204 . . .	480	NR
3205 . . .	480	NR
3206 . . .	480	NR
3207 . . .	480	NR
3208 . . .	480	NR
3209 . . .	480	NR
3210 . . .	480	NR

H. EXERCIȚII.¹⁾

Aritmetica.

1 (38); 2 (38); 3 (38); 8 (75); 9 (76); 10 (76); 11 (77);
19 (114); 20 (114); 21 (115); 22 (115);
23 (115); 24 (115); 34 (155); 35 (156); 45 (197);
46 (197); 48 (197); 54 (237); 55 (237); 60 (276);
61 (277); 68 (315); 69 (315); 70 (315); 78 (356);
79 (355); 80 (356); 88 (394); 89 (394); 90 (395);
91 (395); 93 (396); 94 (396); 95 (396); 96 (397);
97 (397); 105 (437); 106 (438); 110 (478); 111 (478);
112 (478).

Geometria.

4 (38); 12 (77); 13 (77); 25 (116); 26 (116); 27 (116);
28 (116); 36 (156); 37 (156); 38 (156); 39 (156);
49 (198); 50 (198); 51 (198); 56 (237); 57 (237);
58 (238); 62 (277); 71 (316); 83 (357); 98 (397);
99 (397).

Algebra.

14 (77); 15 (78); 16 (78); 18 (78); 29 (117); 30 (117);
31 (117); 40 (157); 47 (197); 59 (238); 66 (278);
67 (278); 74 (317); 75 (317); 85 (357); 86 (357);
92 (395); 100 (397); 101 (398); 102 (398); 103 (398);
104 (398); 107 (438); 113 (478).

Trigonometria.

5 (39); 6 (39); 7 (39); 17 (78); 32 (118); 33 (118);
41 (157); 42 (157); 52 (198); 53 (199); 63 (277);
64 (278); 65 (278); 72 (316); 73 (316); 76 (317); 77 (318);
81 (356); 82 (357); 84 (357); 108 (438); 109 (438);
114 (478); 115 (478).

Geometria analitică.

43 (157); 44 (158).

Mecanica.

87 (358).

I. TABLOUL NUMELOR.

Abason E. 5, 6, 22, 23, 80, 82, 180, 226, 247, 320, 360.	Andrieșescu G. 276.	233, 236, 273, 276, 306, 312, 352, 354, 355, 393.
Ablov A. 75, 189.	Angelescu A. 6, 160, 175, 180, 204, 256, 257, 320,	397, 426, 427, 432, 471.
Abramescu N. 5, 6, 14, 89, 239, 251, 297, 324, 360, 445.	323, 368, 399, 453, 480.	Arnold Alfred 455, 457.
Abramovici A. 38, 59, 148.	Angelescu T. 114, 195, 233, 236, 270, 273, 275, 312,	Aron L. 32.
Adam M. 59, 72, 75, 77, 105, 109, 111, 112, 113, 116, 117, 147, 148, 149, 150, 153, 155, 189, 193, 195, 196, 227, 228, 233, 236, 270, 273, 274, 275, 280, 306, 309, 310, 311, 314, 315, 317, 351, 354, 392, 415, 426, 429, 433, 434, 435, 437, 452, 464, 468, 469, 471, 473.	351, 354, 355, 356, 363, 396, 426, 436, 437, 438, 469, 470, 471.	Aronovici S. 311.
Alaci V. 6, 143, 339, 418, 457, 459.	Anghelută T. 5, 6, 22, 29, 30, 40, 53, 68, 71, 80, 81, 120, 160, 190, 200, 258, 263, 291, 317, 319, 328, 378, 397, 398, 400, 440, 480.	Augustin R. 455, 457.
Aldea Gh. 455.	Antoniou A. 351.	Avramescu C. 6, 254.
Amărăscu G. 108, 109, 195, 196, 306, 307.	Antoniou I. 39, 105, 111, 185, 189, 191, 228.	Bădărău A. 455.
	Apostol Vasilica 312.	Bădulescu V. 455.
	Arcadian N. 36, 59, 100, 108, 109, 112, 113, 114, 119, 147, 153, 155, 158, 185, 191, 193, 195, 228,	Baidaf Ig. 23, 58, 224, 418.
		Ballan E. 32, 37, 59, 75, 104, 105, 111, 113, 135, 185, 198, 228, 237, 270, 306, 424.
		Banciu I. 6, 225.
		Barbălat B. 28, 32, 37, 39, 59, 75, 77, 89, 103, 104, 105, 109, 112, 113, 116, 147, 148, 150, 152, 155, 156, 174, 194, 195, 228, 233, 234, 235, 257, 269.

1) Numerele din paranteză indică pagina, iar cele din afară numărul ce poartă exercițiul.

- 273, 278, 292, 309, 310,
316, 351, 363, 391, 397,
418, 423, 425, 426, 428,
431, 440, 472.
Bărbulescu C. 276, 473.
Bărbulescu G. 435.
Barisien E. 23.
Basacov G. 234.
Beleş I. 6.
Bellan R. 456.
Bercovici E. 59, 109, 112,
150, 151, 228, 276, 309,
311, 354, 433, 473.
Berdan C. 228, 233, 273,
275, 332, 437, 473.
Berlinblum H. 456.
Bernhardt R. 312.
Blaha N. 359, 433, 435.
Bleiweiss P. 276, 312, 315,
354, 355, 426, 432, 435,
471, 472.
Blumenfeld D. 59, 100, 109,
111, 112, 148, 150, 151,
155, 228, 236, 237, 275,
312, 314, 328, 355, 393,
426, 435, 472.
Bocancea K. 311.
Bogdan G. 276, 310, 311,
315, 435.
Bogdan M. 59, 105, 108,
109, 114, 148, 153, 191,
195, 228, 232, 270, 273,
276, 306, 310, 311, 350,
436, 437, 464, 471.
Bogdan C. M. 471.
Boju R. 311.
Bolgiu O. 236, 355, 400,
433, 434.
Bonea I. 111, 114, 307.
Borneanu G. 5, 6, 362.
Bosmans H. 23.
Botea N. 274, 276, 312,
313, 353, 354, 397, 399,
426, 432, 433, 435, 436,
437, 477, 480.
Botez N. 236, 436, 473.
Botezatu M. 310.
Brăileanu A. 227.
Brătescu M. 37, 111, 147,
195, 236, 274, 276, 312,
315, 355, 356, 426, 432,
436, 437, 464, 473.
Brătescu N. 355.
Bratu G. 6.
Brener A. 456.
Bruckner V. 6.
Brüll L. 276, 313, 312, 354,
355, 432, 435, 437, 472,
477.
Budeanu I. 6.
Buicliu G. 5, 6, 26, 28, 79,
159, 200, 239, 246, 257,
258, 279, 318, 329, 339,
341, 354, 355, 368, 374,
377, 383, 388, 391, 413,
419, 423, 425, 428, 439,
451, 461, 464, 467, 468.
Bulgăreanu C. 456.
Bungetzianu D. 362.
Buradescu T. 6.
Burstin O. 276, 311, 355,
393, 435, 471.
Buşilă A. 32, 59, 105, 109,
114, 146, 147, 151, 177,
185, 195, 228, 233, 271,
272, 273, 306, 356, 424,
472.
Buşilă C. 6.
Buşilă I. 6, 14.
Cădere R. 109, 195, 274,
306, 311, 473.
Căldăraru L. 311, 355, 426,
436, 472.
Cambureanu V. 6.
Cantacuzino I. 355.
Capriel D. 6.
Capriel I. 7.
Caraman E. 5, 7, 98.
Carnabel S. 457.
Cazacincu V. 59, 150, 151.
Cazacu C. 7.
Cazacu G. 312, 436.
Ceaşoglu V. 456.
Cernat V. 456, 457.
Chiricuţă A. 7.
Chiţulescu I. 7.
Cioc M. 7.
Cioceanu H. 457.
Ciorănescu I. C. 236, 270,
273, 276, 311, 315, 348,
355, 393, 395, 432, 436,
437.
Ciorănescu N. 27, 357, 378,
416, 423.
Ciřeş P. 392.
Climescu C. 95, 241.
Coca Adela 313.
Comănescu Al. 315, 335,
436.
Constantinescu Arghir 310,
312.
Constantinescu I. 185, 228,
312, 437, 457.
Constantinescu N. 312.
Constantinescu Tancred 7.
Coşoreanu I. 32, 37, 59, 72,
75, 101, 105, 109, 111,
112, 113, 147, 150, 151,
152, 156, 191, 195, 198,
224, 228, 234, 236, 257,
270, 306, 309, 310, 352,
355, 425, 457, 471.
Cosmăvici G. 435, 437.
Coşniţă I. 436.
Coşniţă V. 111, 148, 228,
233, 238, 273, 275, 312,
425, 436, 437, 473.
Costăchescu I. 311.
Costinescu D. 7.
Cristea I. 275.
Cristescu V. 5, 7, 112, 148,
151, 159, 174, 182, 233,
301, 303, 342, 344, 428,
431, 432, 439, 442, 452.
Cronberg V. 456, 457.
Culianu S. 228.
Cuşută H. 456.
Dămoianu Gh. 315.
Dan V. 228.
David G. 319, 355, 364,
394.
Davidescu M. 213, 456, 457.
Davidsohn I. 456.
Davidsohn M. 235, 312.
Demir I. 456.
Dimitriu A. 456, 457.
Dimitriu V. 37, 109, 111,
150.
Dinulescu Tr. 456.
Dobrescu-Băbici 59, 108,
109, 112, 146, 150, 153,
193, 196, 227, 249, 270,
306, 354, 392, 457.
Doncescu A. 149.
Dordea T. 39, 59, 95, 224,
278, 377.
Dorneanu V. 472.
Drăghici Zenobia 393.
Dragomir I. 59, 148, 150,
312, 315, 439, 468.
Dumitrescu Al. 312.
Dumitrescu Arg. D. 7.
Dumitrescu G. 455, 457.
Dumitrescu I. G. 7.
Dumitrescu M. 58, 88, 111,
112, 115, 116, 150, 155,
228, 273, 276, 355, 471.
Dumitrescu Savu 59.
Dumitriu V. 270.

- Ene** A. 235, 312.
Epure Șt. 109, 112, 148, 152, 155, 233, 267, 273, 276, 392, 436, 437, 472.
Fajon M. 101.
Felix C. 7.
Filipescu G. 7, 14, 95, 96, 247, 280.
Fințescu A. 182, 228, 383.
Florescu Al. 456, 457.
Florescu I. 31, 102, 105, 132, 159, 172, 185, 197, 215, 227, 248, 289, 347, 468.
Florescu O. 315, 354, 434, 478.
Focșăneanu L. 185.
Focșeneanu M. 37, 75, 107, 111, 113, 147, 153, 158, 164, 191, 233, 234, 237, 269, 271, 280, 319, 352, 382, 424, 425, 432, 433, 437, 471.
From M. 59, 112, 113, 149, 171, 236, 276, 312, 354, 426, 435, 480.
Gabrielescu R. 7.
Gabrielescu V. 236, 311, 436, 437, 473.
Gâlcă T. 7.
Gataianțu B. 315, 355.
Gătan M. 228.
Georgeacopol V. 456.
Georgescu C. 436, 456.
Georgescu Eug. 311, 435, 471.
Georgescu E. C. 32, 40, 74, 75, 102, 105, 185, 228, 240.
Georgescu I. C. 31, 32, 37, 40, 59, 72, 75, 84, 105, 109, 111, 113, 114, 120, 146, 148, 151, 157, 182, 185, 191, 195, 199, 200, 228, 238, 271, 272, 275, 306, 311, 342, 424, 472.
Georgescu Fl. 78, 79, 88, 101, 102, 111, 113, 119, 148, 150, 151, 185, 228.
Georgescu G. 457.
Georgescu I. 235.
Georgescu M. 311, 355, 435, 471.
Georgescu I. N. 7, 246, 361.
Georgescu N. N. 7.
Georgescu-Gorjan St. 59, 228.
Georgescu-Roegen N. 31, 81, 105, 185, 227, 307, 423.
Georgescu-Val I. 275, 472.
Ghelber M. 235, 315, 355, 356, 396, 478.
Gheorghies A. Lt. Col. 246.
Gheorghiu I. 7.
Gheorghiu M. 7.
Ghermănescu M. 5, 7, 51, 59, 61, 63, 92, 93, 95, 97, 99, 108, 176, 200, 209, 239, 256, 278, 279, 283, 296, 297, 308, 332, 352, 354, 376, 400, 413, 432, 435, 454, 456, 457, 468, 480.
Ghimicescu V. 437, 472.
Ghimuș D. 5, 7.
Ghiolu S. 456.
Ghițescu V. 59, 105, 109, 148, 152, 195, 228, 233, 271, 273, 424, 473.
Giurumescu C. 435, 437, 471.
Goilav C. 34, 111, 112, 148, 185, 191, 228.
Goldstein F. 429, 472.
Goldstein I. 110, 114, 152, 155, 191, 194, 234, 236, 275, 351, 355, 392, 424, 472.
Goldstein M. 312, 315, 473.
Gorovei S. 59, 75, 456.
Gradin I. 112.
Gradiny G. 276.
Grigorescu C. 8.
Grigorescu E. 456.
Grigorescu I. 274, 311, 355.
Groșoreanu G. 311, 355, 393, 435, 472.
Grünbaum M. 28, 175, 228, 234, 276, 297, 339, 359, 388, 433, 434.
Gulian E. 312.
Gutzu A. 108, 110, 238, 288.
Gutzu V. 8.
Hahn L. 456.
Hamburger L. 382.
Hangan M. 61, 456, 457.
Haret V. 228.
Harnagea G. 363.
Hirsch I. 312.
Hirsch V. 235.
Hristea H. 349.
Huber I. 32, 147, 228.
Huzuneanu G. 112, 236, 273, 311, 313, 393.
Ianculescu O. 311.
Ignace S. 189.
Iarion A. 227.
Iliescu D. 59.
Iliescu E. 59, 105, 109, 112, 170, 185, 228, 318, 354, 437.
Iliescu Gh. 5, 8, 362.
Iliescu I. 59, 109, 148, 228, 275, 473.
Iliescu P. 311.
Ioachimescu A. 8, 95, 96, 111, 291, 388, 414.
Ioanovici A. 8.
Ionescu A. 312, 436, 473.
Ionescu Bogdan 163.
Ionescu C. 152, 274, 411, 469, 473.
Ionescu V. D. 8, 21, 34, 40, 147, 160, 218, 252, 320, 434, 452.
Ionescu G. 457.
Ionescu I. 5, 8, 19, 23, 24, 35, 36, 40, 48, 50, 58, 60, 74, 79, 86, 87, 95, 96, 100, 101, 113, 119, 123, 130, 144, 145, 159, 170, 185, 199, 212, 213, 225, 226, 234, 235, 238, 245, 288, 314, 320, 328, 358, 375, 379, 400, 418, 419, 439, 448, 479.
Ionescu V. I. 457.
Ionescu Longin 78, 112, 150, 155, 195, 228, 310, 354, 392, 464.
Ionescu P. 60, 112, 233, 236, 237, 270, 273, 276, 311, 312, 315, 354, 393, 394, 424, 425, 436, 437, 473.
Ionescu V. 313.
Ionescu-Brezuica I. 108, 109, 112, 146, 189, 195, 228, 233, 235, 273, 279, 306, 308, 311, 317, 352, 355, 393, 432, 436, 473.
Ionescu-Bujor C. 315, 355, 435.
Ionescu-Zane G. 236, 276, 279, 312, 313, 393, 426, 434, 436, 437, 477.
Iordanian N. 264.

Iosif I. 228.

Jijie A. 8.

Jojea G. 435.

Jojea N. 435.

Jujescu G. 39, 185, 228.

Juster Al. 456, 457.

Kahane Arno 436.

Kahane L. 456, 457.

Katz P. 59, 151, 189, 191,
228, 232, 236, 273, 315,
351, 354, 355, 392, 425,
468, 473.

Katz S. 36, 38, 59, 114,
235, 236, 267, 312, 354,
355, 435.

Kaufmann N. 129.

Kaufmann S. 456.

Kivovicz I. 342.

Kiwovicz A. 456.

Lalescu Tr. 8, 14, 23, 43,
53, 86, 92, 95, 96, 123,
174, 246, 247, 256, 270,
338, 348, 378, 434, 455.

Lăzărescu D. 456.

Lăzărescu E. D-ra 59, 63,
101.

Lăzărescu I. 59, 108, 311,
355, 456.

Lăzărescu J. 148, 185, 194.

Lăzărescu Șt. 35, 109, 111,
115, 147, 152, 182, 191,
195, 227, 233, 236, 267,
273, 274, 276, 308, 309,
314, 315, 355, 363, 388,
392, 426, 436, 473.

Lăzărescu V. 312, 315, 355,
393, 436.

Lazarovici I. 148, 153.

Lepădatu V. 435, 471.

Linteș I. 5, 8, 19, 24, 26,
40, 47, 50, 63, 68, 118,
134, 173, 180, 187, 189,
190, 191, 193, 199, 224,
238, 253, 255, 256, 279,
293, 298, 301, 308, 309,
331, 339, 347, 348, 376,
393, 394, 400, 410, 411,
440, 448, 449, 450, 454,
459, 461, 464, 466, 471,
473, 478, 480.

Liteanu A. 388.

Liteanu G. 5, 8, 38, 80, 87,
88, 105, 120, 151, 449.
Lungu V. 456.

Măcrineanu Șt. 59, 109, 148.

Malcoci C. 8.

Manoil Șt. 456.

Manoilescu C. 101.

Manoliu A. 456.

Manope V. 435.

Mareș T. 5, 8, 40.

Marinescu I. 311, 313, 393.

Măru D. 59, 351.

Mateescu C. 5, 8, 162, 163,
240, 264, 360.

Mateescu G. 59, 107, 109,
111, 112, 147, 149, 151,
153, 195, 228, 270, 275,
306, 424, 426.

Melas P. 342, 382, 456, 457.

Menciu C. 59.

Mendelsoln M. 313.

Miclescu A. 76, 160, 224,
228, 310, 399.

Miclescu Șt. 155, 237.

Mihăescu C. 111, 147, 148,
153, 200, 233, 239, 270,
275, 313, 351, 363, 392,
480.

Mihăilescu C. 351.

Mihăilescu R. 108, 112, 113,
149, 233, 273, 276, 312,
426, 435, 473.

Mihalopol C. 8.

Mihoc G. 233, 312, 355,
426, 474.

Mineur A. 58, 224.

Mirea Șt. 8, 247.

Mirescu P. 112, 149, 155,
157, 232, 267, 273, 276,
436, 473.

Mitescu C. 457.

Mitescu R. 393.

Mititelu C. 8.

Mititelu I. 9.

Miu I. 313, 354, 435.

Mladenovici Al. 312, 355,
426, 436, 437, 469, 473,
477.

Moisil Gr. 34, 116, 159,
166, 211, 285, 338.

Moșoiu Lenuța 312.

Moșoi I. 9.

Măsturaș D. 9.

Nedelcu Fl. 379.

Negoescu Șt. 456.

Negretzu F. 36, 102, 108,
111, 185, 193, 194, 280,
298, 306, 354, 375, 376,
438, 455.

Negretzu I. 9.

Negulescu I. 457.

Negulescu V. 456.

Neuberg J. 23, 83, 88, 180,
181, 224, 226, 256, 297.

Nichifor G. 5, 9, 15, 37.

Nicolaescu Dorin 456.

Nicolaescu I. 315.

Nicolau A. 228, 457.

Nicolau C. 28, 82, 456.

Nicolau M. 9, 166, 208.

Nicolescu N. 9, 361.

Nicolescu N. 426, 435, 437,
471.

Nicolescu S. 111, 195, 456.

Niculescu A. 37, 75, 90,
107, 110, 151, 228, 306,
351, 425.

Niculescu B. 228.

Niculescu C. 9.

Niculescu D. 276, 312, 355,
436.

Niculescu G. Lt. 5, 9, 61,
468.

Niculescu Ion 435.

Niculescu M. 77, 97, 98,
99, 185, 208, 209, 277.

Niculescu S. 80, 457.

Niculescu V. 457.

Novac A. 312, 354, 435,
437, 471.

Olariu I. 312.

Onicescu O. 5, 9, 95.

Opran A. 312, 315, 355,
397, 426, 436.

Oprea R. 109.

Oprescu G. 311, 393.

Oprișanu E. 148, 191.

Orănescu O. 58, 119, 319,
360, 456, 457.

Orășanu C. 5, 9, 142, 180,
223, 246.

Orășanu Gr. 9.

Pălărieru E. 114, 155, 236,
276, 312, 354, 426, 473.
Panaitelescu A. 59, 109, 149,
191, 276, 291, 364, 438,
473.

Panaitelescu D. 68, 348.

Panaitelescu I. 112.

Panaitelescu Sc. 9, 145.

Pantoleon I. 456.

Partenie A. 455.

Pătrașcu G. 236.

Patriciu T. 9.

Pătroianu E. 313.

- Pătoreanu M. 274, 311, 355, 393, 425, 435, 469, 471.
Petreanu H. 59, 267.
Petreanu P. 355, 435.
Petteu R. 456.
Phillipide M. 9.
Pintea T. 457.
Pintilescu V. 102, 456.
Pompeiu D. 95, 96, 321, 324.
Popa T. 149, 185, 227, 228.
Popea O. 37, 105, 108, 109, 111, 112, 147, 148, 150, 151, 152, 156, 171, 193, 195, 196, 228, 233, 236, 270, 273, 306, 312, 332, 351, 358, 375, 392, 432, 433, 435, 449, 468, 471, 474, 479.
Popeanu A. 227, 306.
Popescu A. 456.
Popescu N. A. 456.
Popescu Corneliu 195, 270, 355, 435.
Popescu Dorin 275, 311, 315, 355, 392, 426, 429, 433, 435, 471, 477.
Popescu F. 315, 355, 478.
Popescu G. 9.
Popescu G. Maior 303.
Popescu D. G. 31, 56, 72, 96, 120, 228, 347, 351, 461, 471.
Popescu I. 9.
Popescu M. 315, 355.
Popescu N. 112, 436.
Popovici D. 270.
Popovici I. 270, 274, 276, 312, 354, 355, 473.
Popoviciu T. 28, 32, 33, 89, 105, 110, 117, 147, 149, 151, 153, 155, 167, 180, 185, 191, 194, 195, 225, 228, 256, 297, 301, 309, 310, 339, 363, 378, 419, 423, 454, 457, 474, 480.
Popp E. 233, 236, 273, 311, 313, 354, 473.
Rabinovici F. 59, 108, 354, 355, 425.
Rabinovici S. 436.
Radu M. 9.
Rădulescu M. 198, 200.
Rădulescu S. 315, 355, 393.
Rădulescu T. 315, 354.
Reinhorn A. 276, 437.
Reinhorn B. 236, 312, 313, 355, 392, 398, 435, 471, 477.
Reinhorn M. 456.
Reinhorn R. 315.
Revici T. 10.
Rigani Cr. 228.
Ringler S. 313, 472.
Rizescu G. 26, 457.
Rizescu I. 227, 426.
Roco M. 10.
Rosenberg G. 456.
Rosenfeld L. 104, 199.
Roşu V. 10.
Rusu E. 75, 112, 149, 195, 228, 274, 275, 306, 311, 351, 364, 435, 473.
Saligny A. 10, 86.
Saligny M. 10.
Samoilă D. 109, 112, 150, 155, 228, 312, 473.
Sane M. 109, 149.
Şapira H. 456.
Săpunaru G. 10.
Sarian M. 227.
Săvescu M. 228.
Schächter I. 393, 426, 435, 393, 477.
Schächter O. 311, 315, 355, 393, 477.
Schileru D. 114, 118, 155, 228, 341, 378.
Schlifca E. 109.
Schönfeld C. 149, 228, 312, 364.
Şcodrano A. 32, 34, 75, 105, 111, 118, 150, 232, 270.
Segărceanu N. 355.
Şerbănescu I. 52, 75, 105, 113, 147, 149, 151, 155, 185, 227, 228, 275, 306, 424.
Şerbănescu V. 10.
Sergescu P. 10, 135, 180, 197, 229, 240, 253, 257, 348, 377, 388, 406, 478.
Sergheiev I. 195, 276.
Sîntescu C. 10.
Silberman J. 61, 456.
Simionescu G. 235, 236, 273, 274, 276, 311, 313, 355, 393, 425, 432, 436, 437, 439, 470, 473.
Simionescu M. 274, 473.
Simionescu N. 436.
Smântănescu A. 10.
Smărăndescu D. 354.
Solacoglu S. 228.
Solacolu S. 59, 112, 114, 194.
Solomon A. 228.
Solomon D. 59, 312, 355, 395.
Solomon W. 20, 27, 35, 59, 107, 108, 109, 111, 147, 150, 190, 228, 252, 272, 275, 308, 351, 364, 374, 392, 433, 469.
Spacu P. 276, 312, 473.
Staicu I. 312.
Stamatescu D. 10.
Stamatiu M. 233, 273, 354, 413, 426, 472.
Stan D. 10.
Stănculescu G. 273, 355.
Stănescu N. 228.
Stavrat G. 310, 311.
Stavrat M. 310, 312, 473.
Ştefan M. 112, 150, 155, 196, 228, 233, 306, 312, 313, 316, 359, 392, 426, 471, 477, 479.
Ştefănescu C. 456.
Ştefănescu E. 39, 40, 59, 75, 76, 79, 101, 109, 110, 112, 114, 115, 117, 118, 147, 148, 149, 152, 154, 156, 157, 159, 189, 190, 191, 194, 197, 199, 225, 228, 233, 237, 257, 273, 275, 277, 279, 294, 306, 307, 309, 310, 315, 352, 353, 354, 357, 358, 363, 395, 396, 399, 426, 432, 436, 438, 439, 464, 468, 470, 471.
Stoenescu A. 256.
Stoenescu I. 19, 54, 57, 58, 92, 228.
Stoian A. 315.
Stoica A. 182, 354.
Stroescu G. 59.
Şuselescu I. 311, 355.
Tailer G. 355, 478.
Tănăsescu T. 247, 306.
Tănăreanu P. 355.
Tauber A. 26, 59, 79, 101, 102, 109, 111, 113, 114, 119, 147, 150, 151, 156, 191, 194, 195, 213, 236, 270, 276, 306, 308, 309, 312, 351, 357, 364, 392, 415, 426, 435, 453, 468, 469.

- Teodor I. 10, 86, 246, 247, 441, 442.
 Teodoreanu V. 10.
 Teodorescu D. 57, 109, 112, 114, 149, 152, 233, 235, 236, 237, 273, 276, 312, 435, 473.
 Teodorescu I. 59, 75, 109, 110, 157, 195, 228, 392, 425, 468, 471.
 Teodorescu N. 10.
 Teodorescu N. 436.
 Teodoriu L. 456, 457.
 Therrin G. 10, 362.
 Tino O. 5, 10.
 Țițeica G. 5, 10, 82, 95, 226, 364, 450.
 Tomescu C. 468.
 Triandaf A. 61, 456.
 Trofimov P. 440.
 Tudorache S. 471.
 Tudoran P. 456.
 Tuhai N. 61.
 Tunaru D. 312.
 Tunaru Tr. 471.
 Udrisky T. 75, 105, 112, 113, 146, 150, 153, 155, 180, 233, 273, 312, 363, 430, 431, 473.
 Ulescu A. 10.
 Urzică A. 111, 112, 147, 312, 432.
 Vainfeld T. 355.
 Vălcovici V. 87.
 Văleanu N. 457.
 Vardala I. 10, 15.
 Varlam H. 472.
 Vărlan V. 276, 355, 435, 473.
 Vasilache S. 267.
 Vasilescu F. 344.
 Vasilescu Gr. 11.
 Vasilescu I. 11.
 Vasilescu D. I. 228, 274, 275.
 Vasilescu M. 228, 273, 275, 312, 315, 436, 472.
 Vasiliu I. 112, 235, 236, 237, 267, 273, 313, 314, 320, 332, 354, 356, 358, 364, 393, 424, 425, 433, 435, 437, 473.
 Velescu I. 456.
 Vlad O. 59.
 Vlădescu A. 456.
 Vlațiu L. 233, 236, 273, 276, 311, 392, 433, 473.
 Vogel D. 456.
 Voronca S. 456, 457.
 Vuibert H. 95.
 Weiss* L. 38, 59, 102, 108, 109, 112, 114, 148, 153, 155, 189, 193, 194, 195, 196, 228, 233, 236, 237, 270, 273, 275, 278, 294, 306, 310, 311, 316, 351, 354, 355, 393, 414, 424, 425, 433, 435, 436, 372, 476.
 Weiss S. 59, 107, 108, 114, 152, 191, 198, 233, 236, 270, 273, 275, 306, 311, 313, 351, 424, 426, 433, 473.
 Zagher Didi 312.
 Zagher G. 114, 236.
 Zaharia E. 264.
 Zamfirescu A. 59, 354.
 Zamfirescu G. 101.
 Zapan Gh. 5, 11, 80, 87, 131, 214, 265, 267, 307, 318.
 Zapan Gr. 5, 11, 20, 113, 131, 197, 229, 276.
 Zuckerman B. 152, 351.

J. UVRAGE CITATE.

	Pag.
<i>Gazeta Matematică.</i>	5, 7, 12, 13, 14, 15, 19, 24, 54, 55, 56, 81, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 92, 112, 118, 121, 123, 131, 148, 151, 162, 163, 166, 167, 169, 171, 172, 174, 191, 195, 197, 201, 205, 208, 209, 213, 214, 246, 253, 258, 268, 281, 283, 291, 292, 307, 318, 348, 354, 362, 368, 374, 376, 388, 392, 409, 411, 426, 427, 431, 434, 449, 450, 451, 452, 455.
Revista Matematică din Timișoara	91, 113, 148, 270, 413, 461
Culegere de Probleme — Aritmetica	24, 100, 215
Culegere de Probleme — Trigonometria	109, 199, 227, 228, 274, 275, 318, 415, 416, 472
Culegere de Probleme — Algebra	117, 187, 197, 414
Culegere de Probleme de Mecanică	176
A. G. Ioachimescu. Culegere de Algebră	111, 291, 414
Buletinul Asociației de matematici pure și aplicate	30
Biblioteca Românească a lui Carcalechi	41
Tr. Lalescu. Théorie des équations intégrales	53
Vivanti. Equazioni integralli lineari	53
E. Catalan. Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire	82, 268, 270

	Pag-
<i>J. Neuberg.</i>	Sur les projections et les contreprojections d'un triangle fixe 83
Mathesis	 89, 181
<i>N. Abramescu.</i>	Algebra superioară 89
<i>H. Wiebitner.</i>	Spezielle Ebene Kurven 92
<i>Rouché et de Comberousse</i>	Traité de Géométrie. Géométrie plane 107, 269, 270, 431
<i>I. Bianu.</i>	Intâii bursieri români în străinătate 122
<i>A. D. Xenopol.</i>	Istoria contemporană a poporului Român 122
<i>F. — G. M.</i>	Exercices de Géométrie 167, 431
Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen unterricht	aller schulgattungen 173
<i>I. Fitz-Patrik</i>	 173
Oeuvres de Charles Hermite	 202
<i>Catalan.</i>	Premier Mémoire sur les fonctions X_n de Legendre 203
Correspondance d'Hermite et de Stieltjes	 204
Biserica ortodoxă română	 212
<i>Ed. Lucas.</i>	Recréations mathématiques 212
<i>W. Grosse.</i>	Unterhaltende Probleme und Spiele 213
<i>F. J.</i>	Exercices de Trigonométrie 237
Elemente a calcului practic	 241
<i>Lt.-Col. A. Gheorghies</i>	Cursul de Tragerile Artileriei 246
Revue de deux Mondes	 250
<i>Niewenglowski.</i>	Tratat de Algebră 252
<i>E. Goursat.</i>	Cours d'Analyse 259, 346
Curierul Judiciar	 267
Codul Civil	 267
Codul Comercial	 267
<i>D. Alexandresco VI</i>	 267
<i>Laurent XVII</i>	 267
<i>Aubry et Rau</i>	 267
<i>E. Pruvost et D. Piéron.</i>	Leçons d'Algèbre 292
Comptes Rendus	 322
Buletinul Societății române de științe matematice	 323, 453
<i>Dr. J. Sommer.</i>	Vorlesungen über Zahlentheorie 369
<i>Căpitan I. Linteș.</i>	Balistica exterioară 410
<i>Maior G. Manu.</i>	Arithmetica și Algebra cullasă și prelucrată pentru școlele publice din România 413
<i>Hermite.</i>	Sur l'indice des fractions rationnelles 443
<i>Biehler.</i>	Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles 443
<i>Laguerre.</i>	Oeuvres 443
C. R. Acad. sc. Paris	 478

Afară de uvrajele de mai sus, sunt citate :

20 Aritmetici diverse	 19, 170
30 Algebre diverse	 47, 129, 288
30 Astronomii diverse	 86, 212, 448
10 Mecanici diverse	 328
10 Geometrii diverse	 375

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (3109, 33, 73, 93, R); Arcadian N. (3109); Basacov G. (3179); Berdan C. (2838, 3128, 93); Bleiweiss P. (3168); Botea N. (2891, 3109, 33, 73); Botez N. (3188, R); Braieșter Otto (3172, 73); Brătescu Danubiu M. (2918, 78); Ciorănescu C. (2978, 3173); Ciorănescu I. (2972); Coșniță V. (2972); David Gh. (3172, N, E); Dorneanu I. V. (3139); Epure St. (3179); Focșeneanu M. (3168, 93); Genazzini Lucian (3172, R); Ghimicescu Gh. (3017); Goldstein F. (3117, 44); Iliescu St. Virgil (3172); Ionescu Paul (2918, 3188, 93); Katz P. (3096); Miu M. I. (3117, 68); Mladenovici A. (3188); Negretzu F. (3086); Nicolescu N. (3172, 73); Niculescu Miron (N); Pătroianu M. (2929); Popea O. (2974, 94, 3086, 168, 88); Popescu Dorin (2856, 918, 3133); Popoviciu T. (N); Rațiu L. (3188); Reinhorn B. (3109); Schächter O. (3109, 73, 84, P); Simionescu Gh. (2972, 3173); Ștefan Marin (2795, 99, 3159); Ștefănescu E. (3144); Ștefănescu G. (3188); Tăiler G. (3173, 84); Teodorescu St. I. (3117, 39, 72, 73, 88); Teodorescu N. (3117); Țigoiu Ion (P); Udrisky Traian (2974, 94, P); Vasiliu G. (P); Vasiliu I. (2972, 74, 78, 94, 3109, 64, 68, 73, 93, N, P); Weiss S. (2929, 72, 3109, 15, 72).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1892, 948, 2191, 222, 78, 329, 54, 56, 59, 60, 96, 402, 21, 524, 661, 82, 706, 92, 818, 37, 61, 79, 95, 910, 22, 31, 55, 71, 72, 80, 85, 86, 91, 93, 3019, 46, 47, 53, 56, 59, 73, 78, 82, 84, 86, 91, 92, 93, 97, 98, 100, 02, 03, 04, 09, 11, 13, 18, 22, 26, 28, 31, 32, 36, 38, 44, 47, 49, 51, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 67, 69, 70, 74, 78, 85, 89, 97 și 99, nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

28 VOLUME

Colecțiunea întreagă Lei 1500,—
Se vând și volume izolate, cu prețul de 70 lei, afară de
volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI și XXV, care se vând
numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie*. (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

2. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. N. Abramescu, *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăugită*, 1921. (Epuizată).

4. A. G. Ioachimescu și G. Țițeica, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă). (Epuizată).

5. Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. Tr. Lalescu, *Tratat de Geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăugită*, 1923 Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice Lei 20,—

7. Gh. Lazăr, *Trigonometria drept linară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) Lei 5,—

8. A. G. Ioachimescu, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăugită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme Lei 60,—

9. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, *Vocabular Matematic* Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăoga taxele poștale pentru expediție.

Bibliotēca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul*. Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septembrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca „Gazetei Matematice“, se vor trimite D-lui: Ing. G. Borneanu, Directorul Fabricilor de Chibrituri și Timbre (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimbările de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la casierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București.